



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures



http://dream-journal.org



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

Editor-in-Chief: Sergey V. Smirnov Deputy Editors-in-Chief: Sergey V. Gladkovsky Deputy Editors-in-Chief: Evgenii Yu. Prosviryakov

Editorial Council

Anatoly A. Burenin (Russia) Irina G. Goryacheva (Russia) Janez Grum (Slovenia) Mikhail P. Lebedev (Russia) Leopold I. Leontiev (Russia) Evgeny V. Lomakin (Russia) Valery P. Matveenko (Russia) Nikolay A. Makhutov (Russia) Nikita F. Morozov (Russia) Vladimir V. Moskvichev (Russia) Sergey V. Panin (Russia) Vasily M. Fomin (Russia) Shao Wen-zhu (China)

http://dream-journal.org

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow) Vladimir A. Bataev (Novosibirsk) Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg) Sergey V. Burov (Ekaterinburg) Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg) Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg) Vladimir G. Degtyar (Miass) Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg) Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg) Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg) Anatoly V. Konovalov (Ekaterinburg) Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg) Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg) Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg) Radik R. Mulyukov (Ufa) Vitaly V. Muravyov (Izhevsk) Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg) Oleg A. Plekhov (Perm) Anna M. Povlotskaya (Ekaterinburg) Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg) Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk) Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg) Roman A. Savray (Ekaterinburg) Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg) Alexander I. Ulyanov (Izhevsk) Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts Anna V. Garieva, maker-up Galina V. Torlopova, associate editor Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation phone: +7 (343) 375-35-83, fax: +7 (343) 374-53-30 e-mail: dream-journal@mail.ru http://dream-journal.org



Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н. Заместитель главного редактора: Сергей Викторович Гладковский, д.т.н. Заместитель главного редактора: Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф-м.н.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures

Редакционный совет:

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Грум Янез, Рh.D, (Республика Словения) Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия) Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия) Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Матвеенко Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия) Матвеенко Валерий Павлович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия) Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия) Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия) Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия) Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия) Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

http://dream-journal.org

Редакционная коллегия:

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва) Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск) Беляев Александр Константинович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург) Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург) Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург) Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург) Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс) Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург) Задворкин Сергей Михайлович, к.ф-м.н. (Екатеринбург) Залазинский Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург) Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург) Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург) Макаров Алексей Викторович, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург) Миронов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург) Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа) Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск) Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург) Плехов Олег Анатольевич, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Пермь) Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург) Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург) Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск) Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф-м.н. (Екатеринбург) Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург) Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург) Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск) Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык Циклина Ирина Михайловна – редактор текста Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции: Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30 e-mail: dream-journal@mail.ru http://dream-journal.org



ISSN 2410-9908

CONTENTS

Vandyshev A. B. Estimating the effect of some individual technological factors on the effectiveness of producing high-purity hydrogen from hydrocarbons in catalytic membrane devices	6
Strungar E. M., Staroverov O. A., Lynegova E. M. Comprehensive evaluation of fatigue damage accumulation and failure of specimens with operational stress concentrators	37
Mushnikov A. N., Zadvorkin S. M., Perunov E. N., Vyskrebentsev S. V., Izmailov R. F., Vichuzhanin D. I., Soboleva N. N. and Igumnov A. S. Experimental facility for studying the physical properties of materials in a plane stress state	50
Kazakov A. L., Spevak L. F. and Chuev N. P. An analytical and numerical study of free boundary dynamics for an isolated mass of a self-gravitating gas	61
Chupin V. V. and Chernogubov D. E. Studying supercritical deformations of flat ellipsoidal panels of constant thickness	81



ISSN 2410-9908

СОДЕРЖАНИЕ

Вандышев А. Б. Оценка влияния ряда отдельных технологических факторов на эффективность получения высокочистого водорода из углеводородного сырья в мембранно- каталитических устройствах	6
Струнгарь Е. М., Староверов О. А., Лунегова Е. М. Комплексная оценка процессов усталостного накопления повреждений и разрушения образцов с концентраторами напряжений эксплуатационного характера	37
Мушников А. Н., Задворкин С. М., Перунов Е. Н., Выскребенцев С. В., Измайлов Р. Ф., Вичужанин Д. И., Соболева Н. Н., Игумнов А. С. Экспериментальная установ- ка для исследований физических свойств материалов в условиях плоского напряженно- го состояния	50
Казаков А. Л., Спевак Л. Ф., Чуев Н. П. Аналитическое и численное исследование динамики свободной границы изолированной массы самогравитирующего газа	61
Чупин В. В., Черногубов Д. Е. Исследование закритических деформаций пологих эллипсоидальных панелей постоянной толщины	81



ISSN 2410-9908

Received: 11.04.2022 Revised: 28.07.2022 Accepted: 26.08.2022 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.006-036

ESTIMATING THE EFFECT OF SOME INDIVIDUAL TECHNOLOGICAL FACTORS ON THE EFFECTIVENESS OF PRODUCING HIGH-PURITY HYDROGEN FROM HYDROCARBONS IN CATALYTIC MEMBRANE DEVICES

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

A. B. Vandyshev

Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

vandyshev@imach.uran.ru

Corresponding author. E-mail: vandyshev@imach.uran.ru Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russian federation Tel.: +7 (343) 362 30 25; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper presents results of using a physically grounded mathematical model, verified in numerous practical applications, to estimate the effect of some individual technological factors on the effectiveness and efficiency of producing high-purity hydrogen from products of steam conversion of hydrocarbons in advanced catalytic membrane devices.

Keywords: mathematical simulation, process parameters, catalytic membrane devices, high-purity hydrogen, raw hydrocarbons.

References

1. Murav'ev L.L., Vandyshev A.B., Makarov V.M. Modeling of membrane extraction of hydrogen from the products of steam conversion of hydrocarbons. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 1999, vol. 33, iss. 3, pp. 258–263.

2. Vandyshev A.B. Analyzing the parameters of membrane catalytic systems for extraction of highly pure hydrogen from hydrocarbon feedstock with the application of mathematical modeling. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures,* 2016, iss. 4, pp. 6–46. DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.006-045. URL: https://dream-journal.org//DREAM_Issue_4_2016_Vandyshev_A.B._006_045.pdf

3. Vandyshev A.B., Kulikov V.A. Analysis of the Calculated Parameters of a Model Membrane-Catalytic Converter for the Production of High-Purity Hydrogen from Methane. *Chem Petrol Eng*, 2018, vol. 54, pp. 31–37. DOI: 10.1007/s10556-018-0434-y.

4. Vandyshev A.B., Kulikov V.A. Evaluation of Design Parameters for a 32-Module Disk-Type Membrane-Catalytic Reactor for Producing High-Purity Hydrogen from Diesel Fuel. *Chem Petrol Eng*, 2020, vol. 55, pp. 815–820. DOI: 10.1007/s10556-020-00698-8.

5. Vandyshev A.B. A Systematic Analysis of the Parameters of Disk-Type Membrane-Catalytic Devices for Producing High-Purity Hydrogen from Methane and Diesel Fuel. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 4, pp. 6–27. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.4.06-27. Available at: http://dream-journal.org/issues/2020-4/2020-4_284.html

6. Vandyshev A.B., Kulikov V.A. Analysis of Parameters for Producing High-Purity Hydrogen from Natural Gas in a Tubular Type Membrane-Catalytic Module. *Chem Petrol Eng*, 2021, vol. 56, pp. 715–720. DOI: 10.1007/s10556-021-00833-z.

7. Vandyshev A.B., Kulikov V.A. Assessment of the Effects of Temperature and Pressure on the Efficiency of High-Purity Hydrogen Production from Hydrocarbon Feedstocks in Membrane-Catalytic Devices. *Chem Petrol Eng*, 2021, vol. 56, pp. 799–808. DOI: 10.1007/s10556-021-00845-9.



8. Shirasaki Y., Tsuneki T., Ota Y., Yasuda I., Tachibana S., Nakajima H., Kobayashi K. Development of membrane reformer system for highly efficient hydrogen production from natural gas. *International Journal of Hydrogen Energy*, 2009, vol. 34, pp. 4482–4487. DOI: 10.1016/J.IJHYDENE.2008.08.056.

9. Shigarov A.B., Kirillov V.A., Amosov Y.I., Brayko A.S., Avakov V.B., Landgraf I.K., Urusov A.R., Jivulko S.A., Izmaylovich V.V. Membrane reformer module with Ni-foam catalyst for pure hydrogen production from methane: Experimental demonstration and modeling. *Int. J. Hy- drogen Energy*, 2017, vol. 42, No. 10, pp. 6713–6726. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2016.12.057.

10. Dittmar B., Behrens A., Schödel N., Rüttinger M., Franco Th., Straczewski G., Dittmeyer R. Methane steam reforming operation and thermal stability of new porous metal supported tubular palladium composite membranes. *Int. J. Hydrogen Energy*, 2013, vol. 38 (21), pp. 8759–8771. DOI: 10.1016/j.ijhydene.2013.05.030.

11. Goltsov V.A. *Vodorod v metallakh* [Hydrogen in metals. In: Atomic Hydrogen Energy and Technology, iss. 1]. Moscow, Atomizdat Publ., 1978, pp. 193–230. (In Russian).

12. Shirasaki Y., Sato T., Iton N., Tsuneki T., Nishii T., Kurokawa H., Yasuda I., Shimamori T., Takagi Y., Hikosaka H., Tanaka H. Development of a Membrane-on-Catalyst Hydrogen Production Module for Steam Reforming of City Gas. *Chemical Reaction Engineering* (Jap.), 2017, vol. 43, iss. 5, pp. 336–341. DOI: 10.1252/KAKORONBUNSHU.43.336.

13. Vandyshev A.B., Kulikov V.A. Hydrogen Permeability of Palladium Membranes Made of Alloy V-1 in Laboratory Investigations and Membrane Devices. *Chem Petrol Eng*, 2015, vol. 51, pp. 396–401. DOI: 10.1007/s10556-015-0058-4.

14. Vandyshev A.B., Makarov V.M., Usova T.B. Analyzing the conditions of hydrogen extraction from multicomponent hydrogen-containing gas mixtures by means of triple diagrams C-H-O. IMACH UrO RAN, 1998, deposited in VINITI 09.12.98. (In Russian).

15. Vandyshev A.B., Kulikov V.A. Evaluation of the efficiency of preparing especially pure hydrogen from methanol and ethanol in membrane equipment, combined with a methane or carbon monoxide conversion catalyst. *Chem Petrol Eng*, 2011, vol. 47, pp. 536–544. DOI: 10.1007/s10556-011-9506-y.



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 11.04.2022 УДК 66.071.6.001.57 **DOI:** 10.17804/2410-9908.2022.4.006-036

http://dream-journal.org

ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РЯДА ОТДЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА ЭФФЕКТИВНОСТЬ ПОЛУЧЕНИЯ ВЫСОКОЧИСТОГО ВОДОРОДА ИЗ УГЛЕВОДОРОДНОГО СЫРЬЯ В МЕМБРАННО-КАТАЛИТИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВАХ

А. Б. Ванлышев

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация



vandyshev@imach.uran.ru

Ответственный автор. Электронная почта: vandyshev@imach.uran.ru Адрес для переписки: 620049, ул. Комсомольская 34, Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7 (343) 362-30-25; факс: +7 (343) 374-53-30

Приведены результаты использования физически обоснованной математической модели, проверенной на многочисленных практических примерах, для оценки влияния ряда отдельных технологических факторов на эффективность и экономичность получения высокочистого водорода из продуктов паровой конверсии углеводородов в перспективных мембранно-каталитических устройствах.

Ключевые слова: математическое моделирование, технологические параметры, мембраннокаталитические устройства, высокочистый водород, углеводородное сырье.

1. Введение

Повышенный интерес к мембранно-каталитическим (МК) системам получения водорода из углеводородного сырья, основанным на совмещении мембранного извлечения водорода с каталитической конверсией углеводородов, связан с рядом преимуществ. Высокие водородопроницаемость и селективность тонких сплошных мембран из палладия и его сплавов обеспечивают эффективное извлечение водорода чистотой не менее 99,999 об. % непосредственно из продуктов паровой конверсии углеводородов. В этом случае в общей технологической схеме установки исключаются конвертор оксида углерода и адсорбционная очистка водорода от примесей, что существенно уменьшает габариты установки. К преимуществам МК-установок следует отнести более низкую рабочую температуру 550-600 °С.

Для дальнейшего развития и поиска путей повышения эффективности и экономичности получения высокочистого водорода из различных видов углеводородного сырья в перспективных МК-устройствах необходимо учитывать влияние отдельных технологических факторов.

При решении этой актуальной задачи наиболее доступным и менее затратным способом является применение математического моделирования, адекватно и на хорошем количественном уровне описывающего экспериментальные данные испытаний МК-устройств разных типов и производительности.

Ранее установлено, что физически обоснованная математическая модель [1, 2] адекватно и на хорошем количественном уровне описывает результаты испытаний, лабораторных исследований и проектных расчетов перспективных МК-устройств получения высокочистого водорода из углеводородного сырья разных типов и производительности [2-7].



Представляло интерес использовать эту модель для анализа влияния ряда отдельных технологических факторов на основные характеристики МК-устройств в целях интенсификации процесса извлечения высокочистого водорода и оптимизации режимов их эксплуатации.

2. Оценка влияния температуры и давления на эффективность получения высокочистого водорода из углеводородного сырья в мембранно-каталитических устройствах

Наиболее значимыми технологическими параметрами, влияющими на эффективность МК-устройств, являются рабочая температура и давление по обе стороны от мембраны. Предварительный анализ двух технологических параметров представлен в работе [8].

Из литературных данных по МК-системам известно, что рабочие температуры находятся в интервале от 500 [9] до 650 °C [10], а абсолютные давления над мембраной от 0,9 [9] до 1,6 МПа [11]. Ограниченность экспериментальных данных и многообразие типов испытанных МК-устройств при разных технологических условиях не позволяют установить корреляционные зависимости влияния температуры и давления на эффективность получения высокочистого водорода.

Метод математического моделирования позволяет рассчитать параметры МК-устройств, необходимые для оценки влияния основных технологических факторов температуры и давления на эффективность получения высокочистого водорода из углеводородного сырья на примере метана.

При проведении расчетов рассматривали два разных типа МК-устройств, отличающихся способом удаления высокочистого водорода. Для 1-го типа МК-устройств удаление высокочистого водорода осуществляется дополнительным устройством – металлогидридным компрессором при абсолютном давлении меньше атмосферного ($p_{\rm H}$ <0,1 МПа). Для 2-го типа МК-устройств высокочистый водород удаляется самотеком под избыточным абсолютным давлением ($p_{\rm H}$ >0,1 МПа) без применения металлогидридного компрессора.

Расчеты для МК-устройств обоих типов проводили при температурах 500; 550; 600 и 650 °С. Абсолютное давление сырьевого газа и продуктов конверсии в МК-устройстве 1-го типа принято фиксированным и равным $p_{\rm B} = 0,9$ МПа при абсолютных давлениях высокочистого водорода $p_{\rm H} = 0,08$; 0,04 и 0,02 МПа. Абсолютные давления сырьевого газа и продуктов конверсии в МК-устройстве 2-го типа приняты равными $p_{\rm B} = 1,1$; 1,6; 2,1 и 2,6 МПа, а абсолютное давление высокочистого водорода задано стандартным и равным $p_{\rm H} = 0,15$ МПа.

С целью исключения влияния других факторов кроме интересуемых температуры и давлений ($p_{\rm B}$, $p_{\rm H}$) остальные технологические условия и конструктивные параметры МК-устройства приняли одинаковыми. Так, в качестве исходного сырья для получения высокочистого водорода выбрана смесь CH₄–3H₂O с исходным потоком $Q_0 = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$. Здесь и далее по тексту объемные расходы приведены к нормальным условиям. При проведении расчетов выбрана мембрана из сплава на основе палладия типа B-1 [12] толщиной 20 мкм на прочной пористой подложке. Коэффициенты кажущейся удельной водородопроницаемости γ с учетом влияния подложки при исследуемых температурах 500; 550; 600 и 650 °C приняты, соответственно, следующими: 0,00921; 0,00963; 0,012 и 0,0136 см³H₂·мм/(см²·с·атм.^{0,5}).

Анализ расчетных параметров МК-устройств 1- и 2-го типов осуществляли в рамках технологической схемы для системы *высокотемпературный конвертор* – *высокотемпературный мембранный аппарат* (BTK-BTMA) с катализатором конверсии углеводорода (K1) в BTK и катализатором конверсии метана (K2) в надмембранном пространстве мембранного аппарата, представленной на рис. 1 и лежащей в основе математической модели [1, 2].

На вход системы ВТК-ВТМА подается смесь водяного пара и углеводорода с общей формулой $C_xH_yO_z$. Для проведения анализа в качестве углеводородного сырья выбран метан (CH₄) при x = 1; y = 4; z = 0 в общей формуле углеводорода. В высокотемпературном конверторе (BTK) на катализаторе конверсии метана (K2) исходная смесь CH₄–3H₂O превращается в смесь простых газов (H₂, H₂O, CO₂, CO и CH₄). Равновесный

ISSN 2410-9908

состав продуктов конверсии на выходе из ВТК определяются температурой, давлением, отношением H_2O/C в исходной смеси (CH₄–3H₂O) и двумя химическими равновесиями (1 и 2).

$$CH_4 + 2H_2O = 4H_2 + CO_2;$$
 (1)

$$CO + H_2O = H_2 + CO_2.$$
 (2)



- Рис. 1. Упрощенная схема системы ВТК-ВТМА: C_xH_yO_z углеводород; H₂O водяной пар; ВТК – высокотемпературный конвертор; ВТМА – высокотемпературный мембранный аппарат; ПВД – полость высокого давления; ПНД – полость низкого давления;
- СГ сбросной газ; К1 катализатор конверсии углеводорода; К2 катализатор конверсии метана; М палладиевая мембрана; СК свободный канал; ОК общий корпус; Q_0, Q_1, Q_P, Q_C объемные потоки по ходу технологической схемы

Далее продукты паровой конверсии поступают на мембранное разделение в полость высокого давления BTMA с катализатором конверсии метана К2. В свободном канале СК мембранного аппарата под действием перепада давлений происходит мембранное извлечение не только молекулярного водорода, образовавшегося в результате предварительной паровой конверсии метана в BTK, но и дополнительного водорода, образующегося за счет смещения вправо химического равновесия (1) по мере отвода водорода через мембрану

Результаты расчетов параметров на выходе из ВТК для обоих типов рассматриваемых МК-устройств представлены в табл. 1. В случае МК-устройства 1-го типа равновесные концентрации молекулярного (свободного) водорода и метана (связанного водорода) при постоянном абсолютном давлении $p_{\rm B} = 0,9$ МПа зависят только от температуры. Так, равновесная концентрация свободного водорода ($X_{\rm H_2}$) с ростом температуры от 500 до 650 °C увеличивается от 0,171 до 0,359 моль долей. Равновесная концентрация связанного водорода (метана) уменьшается с 0,185 моль долей при температуре 500 °C до 0,105 моль долей при температуре 650 °C (табл. 1).

Дополнительно в табл. 1 представлены результаты оценки концентрации общего водорода в продуктах паровой конверсии на выходе из ВТК, рассчитанные по приближенной формуле (3) с учетом стехиометрического коэффициента 4 при водороде в химическом равновесии (1):

$$X_{\rm H_2,o {\rm fu}_{\rm L}} = X_{\rm H_2} + 4 \cdot X_{\rm CH_4} \,. \tag{3}$$



ISSN 2410-9908

Таблица 1

Расчетные параметры на выходе ВТК в МК-устройствах 1- и 2-го типов

		Температура, °С						
параметры, размерность	500	550	600	650				
	$p_{\rm B} = 0,9$ МПа ((МК-устройство 1-	го типа)					
$Q_1, M^{3/4}$	109,5	113,3	118,2	123,9				
<i>X_{H2}</i> , моль. доли	0,171	0,229	0,293	0,359				
X_{CH_4} , моль. доли	0,185	0,162	0,135	0,105				
Х _{Н2(общ.)} , моль. доли	0,911	0,877	0,833	0,779				
	$p_{\rm B} = 1,1 {\rm M}\Pi{\rm a}$	(МК-устройство 2-	го типа)					
$Q_1, M^3/4$	108,8	112,4	116,8	122,3				
<i>X_{H2}</i> , моль. доли	0,159	0,215	0,276	0,34				
<i>Х</i> _{СН4} , моль. доли	0,189	0,168	0,142	0,113				
Х _{Н2(общ.)} , моль. доли	0,915	0,887	0,844	0,792				
	$p_{\rm B} = 1,6 {\rm M}\Pi{\rm a}$ ((МК-устройство 2-	-го типа)					
$Q_1, M^3/\Psi$	107,6	110,7	114,6	119,4				
<i>X_{H2}</i> , моль. доли	0,139	0,189	0,246	0,306				
<i>X</i> _{CH4} , моль. доли	0,197	0,178	0,154	0,128				
Х _{Н2(общ.)} , моль. доли	0,927	0,901	0,862	0,818				
	$p_{\rm B} = 2,1 {\rm M}\Pi{\rm a}$	(МК-устройство 2-	го типа)					
$Q_1, M^3/\Psi$	106,8	109,6	113,2	117,5				
<i>X_{H2}</i> , моль. доли	0,127	0,173	0,225	0,282				
$X_{{ m CH}_4}$, моль. доли	0,202	0,184	0,163	0,138				
Х _{Н2(общ.)} , моль. доли	0,935	0,909	0,877	0,834				
<i>p</i> _в = 2,6 МПа (МК-устройство 2-го типа)								
$Q_1, M^3/\Psi$	106,3	108,9	112,1	116,1				
X_{H_2} , моль. доли	0,117	0,16	0,21	0,264				
$X_{{ m CH}_4}$, моль. доли	0,206	0,189	0,169	0,146				
Х _{Н2(общ.)} , моль. доли	0,941	0,916	0,886	0,848				

Концентрация общего водорода ($X_{\rm H_2, oбщ.}$) для МК-устройства 1-го типа при достаточно высоком уровне слабо уменьшается от 0,911 до 0,779 моль долей при росте температуры от 500 до 650 °C (табл. 1).

В случае МК-устройства 2-го типа равновесные концентрации молекулярного (свободного) водорода и метана (связанного водорода) зависят не только от температуры, но и от абсолютного давления $p_{\rm B}$. Для МК-устройства 2-го типа при $p_{\rm B} = 1,1$ МПа расчетные параметры на выходе ВТК близки к данным, полученным при $p_{\rm B} = 0,9$ МПа для МК-устройства 1-го типа.

Для МК-устройства 2-го типа увеличение абсолютного давления от $p_{\rm B} = 1,1$ до $p_{\rm B} = 2,6$ МПа для каждой из исследованных температур приводит к уменьшению равновесной концентрации свободного (молекулярного) водорода и к увеличению равновесной концентрации связанного водорода (метана) (табл. 1). Тем не менее, концентрации общего водорода для МК-устройства 2-го типа при всех исследованных давлениях $p_{\rm B}$ имеют достаточно большую величину, которая с ростом температуры незначительно уменьшается (табл. 1). Таким образом, для МК-устройств 1- и 2-го типов в исследованном интервале абсолютных

ISSN 2410-9908

http://dream-journal.org

давлений *p*_в 0,9–2,6 МПа и температур 500–650 °С из исходной сырьевой смеси CH₄–3H₂O на выходе из ВТК формируется равновесная смесь продуктов паровой конверсии метана с достаточно высокой концентрацией общего водорода (более 0,779 моль. долей), пригодная для дальнейшего мембранного извлечения высокочистого водорода.

Результаты расчетов параметров мембранного извлечения высокочистого водорода с использованием математической модели [1, 2] для МК-устройства 1-го типа представлены в табл. 2.

Таблица 2

Параметры,	Температура, °С					
размерность	500	550	600	650		
	$p_{\rm H} = 0,08 {\rm M}\Pi{\rm a}$	$(X_{пред.} = 0,088 \text{ мо})$	ль. доли)			
$F_{\text{pacy.}}, \text{M}^2$	49,8	31,4	16,3	10,4		
Q_p , м 3 /ч	65,0	85,6	91,3	92,2		
$J_{\rm cp.},{\rm M}^{3}{\rm H}_{2}/{\rm M}^{2}{ m v}$	1,3	2,7	5,6	8,8		
Конц. Н ₂ на выходе	0,0898	0,0898	0,0894	0,0894		
ВТМА, моль. доли						
Конц. СН4 на выходе	0,0987	0,0322	0,00794	0,00199		
ВТМА, моль. доли						
q_V , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,65	0,856	0,913	0,922		
$f_{\rm уд.},{\rm M}^2/({\rm M}^3{\rm H}_2/{\rm Y})$	0,765	0,367	0,178	0,113		
	$p_{\rm H} = 0,04$ МПа	$(X_{пред.} = 0,044$ мо	ль. доли)			
$F_{\text{расч.}}, \text{м}^2$	27,2	15,6	10,3	7,2		
<i>Q</i> _{<i>P</i>} , м ³ /ч	93,9	96,3	96,6	96,4		
$J_{\rm cp.},{\rm M}^{3}{\rm H}_{2}/{\rm M}^{2}{ m v}$	3,46	6,2	9,3	13,4		
Конц. Н ₂ на выходе	0,0452	0,0451	0,0443	0,0447		
ВТМА, моль. доли						
Конц. CH ₄ на выходе	0,0143	0,0027	0,00053	0,00013		
ВТМА, моль. доли						
q_V , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,939	0,963	0,966	0,964		
$f_{\rm уд.},{\rm m}^2/{\rm m}^3{ m H}_2/{ m y}$	0,276	0,162	0,106	0,0747		
	$p_{\rm H} = 0,02$ МПа	$(X_{пред.} = 0,022$ мо	ль. доли)			
$F_{\text{расч.}}, \text{м}^2$	15,2	10,8	7,03	5,8		
$Q_{ m p}$, м 3 /ч	98,3	98,4	98,3	98,2		
$J_{cp.}, M^{3}H_{2}/M^{2}ч$	6,45	9,1	13,9	16,9		
Конц. Н ₂ на выходе	0,0227	0,0224	0,0226	0,0223		
ВТМА, моль. доли						
Конц. СН4 на выходе	0,00101	0,00017	0,000037	0,000009		
ВТМА, моль.доли						
q_V , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,983	0,984	0,983	0,982		
$f_{\rm уд.},{\rm m}^2/{\rm m}^3{ m H}_2/{ m y}$	0,155	0,109	0,0715	0,0591		

Расчетные параметры извлечения водорода в МК-устройстве 1-го типа

При каждом фиксированном абсолютном давлении высокочистого водорода $p_{\rm H} = 0,08$; 0,04 и 0,02 МПа максимальная производительность МК-устройства Q_p увеличивается с ростом температуры, а расчетная площадь мембраны $F_{\rm pacu}$, необходимая для практически полного извлечения водорода, уменьшается. Уменьшение абсолютного давления $p_{\rm H}$ с 0,08 до 0,04 и 0,02 МПа при каждой фиксированной температуре приводит к увеличению производительно-



ISSN 2410-9908

сти по высокочистому водороду Q_p и к снижению расчетной площади мембраны. Дополнительно в табл. 2 представлены расчетные величины средней плотности потока диффузии водорода через мембрану $J_{cp.} = Q_p/F_{pacy.}$. Эти величины свидетельствуют о том, что с уменьшением $p_{\rm H}$ и увеличением рабочей температуры интенсивность отвода водорода через мембрану увеличивается. Для удобства дальнейшего сравнительного анализа рассчитали удельные показатели МК-устройства 1-го типа: объемный выход водорода $q_V = Q_p/Q_0$ и удельную площадь мембраны $f_{\rm VA} = F_{\rm pacy.}/Q_p$, необходимую для получения 1 м³H₂ в час.

Эти два критерия наиболее удобны для сравнительной оценки влияния рабочей температуры и абсолютного давления $p_{\rm H}$ на эффективность и экономичность получения водорода в МК-устройстве из углеводородного сырья (метана) при прочих равных условиях.

В графическом виде расчетные данные объемных выходов водорода q_V для МК-устройства 1-го типа, представленные на рис. 2, свидетельствуют о влиянии рабочей температуры и давления $p_{\rm H}$ на эффективность получения высокочистого водорода из метана.

При абсолютном давлении $p_{\rm H} = 0,02$ МПа объемный выход водорода q_V составляет 0,982–0,984 м³H₂/м³ сырья в интервале исследуемых температур 500–650 °C и практически не зависит от рабочей температуры МК-устройства. Для $p_{\rm H} = 0,04$ МПа уровень объемного выхода водорода q_V при рабочих температурах 500–650 °C также достаточно высок 0,939–0,966 м³H₂/м³ сырья, а в случае абсолютного давления $p_{\rm H} = 0,08$ МПа объемный выход водорода q_V при изменении рабочей температуры от 650 до 500 °C заметно снижается от 0,922 до 0,65 м³H₂/м³ сырья.

Из приведенных графических зависимостей следует, что снижение абсолютного давления $p_{\rm H}$ от 0,08 до 0,02 МПа для каждой рабочей температуры приводит к повышению объемного выхода водорода (рис. 2).



Рис. 2. Температурные зависимости объемного выхода высокочистого водорода при абсолютном давлении под мембраной $p_{\rm H} = 0,08~(1);~0,04~(2)$ и 0,02 МПа (3) для МК-устройства 1-го типа при фиксированном $p_{\rm B} = 0,9$ МПа: 4 – диапазон оптимальных температур; 5 – средняя оптимальная температура; 6 – данные из работы [2]; 7 – данные из работы [2]; 8 – экспериментальные данные [13]

Вертикальными пунктирными линиями 4 обозначена оптимальная область температур 550–650 °С с высоким удельным показателем объемного выхода водорода. Вертикальной линией 5 обозначена средняя оптимальная рабочая температура 600 °С с высоким значением объемного выхода водорода для МК-устройства 1-го типа. Точкой 6 обозначена величина объемного выхода водорода $q_V = Q_p/Q_0 = 31,36/(11,6\cdot 4) = 0,67 \text{ м}^3\text{H}_2/\text{м}^3$ сырья, рассчитанная на основании анализа экспериментальных данных [2] при температуре 500 °С, $p_B = 0,9$ МПа и $p_H = 0,073$ МПа для МК-устройства производительностью 40 м³H₂/ч [9]. Точкой 7 обозначена

ISSN 2410-9908

величина объемного выхода водорода $q_V = Q_p/Q_0 = 40/(11,874 \cdot 4) = 0,84 \text{ м}^3\text{H}_2/\text{M}^3$ сырья при температуре 550 °C, $p_B = 0,9 \text{ МПа и } p_H = 0,073 \text{ МПа } [2]$ для того же МК-устройства [9]. Точкой 8 отмечена оценка показателя объемного выхода водорода $q_V = 0,0636/0,067 = 0,95 \text{ м}^3\text{H}_2/\text{M}^3$ сырья по экспериментальным данным для лабораторного МК-устройства трубчатого типа с мембраной из Pd–Ag сплава толщиной 7,3 мкм и площадью 93 см² при температуре 547 °C, $p_B = 0,9 \text{ МПа и } p_H = 0,04 \text{ МПа из работы } [13].$

Таблица 3

	Температура, °С				
параметры, размерность	500	550	600	650	
$p_{\rm B} = 1,1$ МПа ($X_{\rm пред.}$	= 0,136 мо.	пь. доли)		•	
$F_{\text{pacy., M}}^2$	29,4	41,9	25,6	15,4	
$Q_p, \mathrm{M}^{3/\mathrm{H}}$	13,7	52,3	76,2	84,6	
$J_{\rm cp., M}^{3} {\rm H}_{2}/{\rm M}^{2}{\rm Y}$	0,466	1,24	2,98	5,49	
Конц. H ₂ на выходе ВТМА, моль. доли	0,137	0,137	0,137	0,137	
Конц. СН ₄ на выходе ВТМА, моль. доли	0,180	0,112	0,0457	0,0141	
q_{V} , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,137	0,523	0,762	0,846	
$f_{\rm yg.}, {\rm m}^2/{\rm m}^3{\rm H_2/{\rm y}}$	2,15	0,803	0,335	0,182	
$p_{\rm B} = 1,6 {\rm M} \Pi {\rm a} (X_{\rm npeg.})$	= 0,094 мол	њ. доли)			
$F_{\text{pacy., M}}^2$	35,3	33,4	17,5	10,8	
$Q_P, \mathrm{M}^3/\mathrm{H}$	35,9	70,7	86,1	90,5	
$J_{\rm cp}, {\rm m}^3 {\rm H}_2 / {\rm m}^2 {\rm y}$	1,00	2,11	4,93	8,41	
Конц. H ₂ на выходе ВТМА, моль. доли	0,0946	0,0946	0,0947	0,0942	
Конц. СН ₄ на выходе ВТМА, моль. доли	0,161	0,0799	0,0268	0,00735	
<i>q_V</i> , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,359	0,707	0,861	0,905	
$f_{y,z,y} M^2/M^3H_2/Y$	0,983	0,473	0,203	0,119	
$p_{\rm B} = 2,1$ МПа ($X_{\rm пред.}$	= 0,071 мо.	пь. доли)			
$F_{\text{pacy., }} M^2$	34,5	26,9	13,3	7,8	
$Q_{p}, \mathrm{M}^{3}/\mathrm{H}$	50,7	79,9	90,5	93,1	
$J_{cp.,} M^{3}H_{2}/M^{2}\Psi$	1,47	2,96	6,81	11,8	
Конц. H ₂ на выходе ВТМА, моль. доли	0,0723	0,0723	0,0724	0,0723	
Конц. CH ₄ на выходе ВТМА, моль. доли	0,139	0,0586	0,0174	0,00461	
q_{V} , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,507	0,799	0,905	0,931	
$f_{\rm yg.}, {\rm m}^2/{\rm m}^3{\rm H}_2/{\rm q}$	0,681	0,338	0,147	0,0841	
$p_{\rm B} = 2,6$ МПа ($X_{\rm пред.}$	= 0,0577 мо	ль. доли)			
$F_{\text{pacy., M}}^2$	31,6	22,4	10,8	6,5	
$Q_p, \mathrm{M}^{3/\mathrm{H}}$	60,8	85,2	92,9	94,6	
$J_{\rm cp.}, {\rm m}^3 {\rm H}_2 / {\rm m}^2 {\rm y}$	1,92	3,78	8,57	14,6	
Конц. H ₂ на выходе ВТМА, мол. доли	0,0586	0,0585	0,0586	0,0586	
Конц. СН ₄ на выходе ВТМА, мол. доли	0,12	0,044	0,0121	0,0031	
q_{V} , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,608	0,852	0,929	0,946	
$f_{\rm YZ.}, {\rm m}^2/{\rm m}^3{\rm H_2/{\rm Y}}$	0,52	0,263	0,117	0,068	

Расчетные параметры извлечения водорода в МК-устройстве 2-го типа

Таким образом, диаграмма, представлена на рис. 2, пригодна не только для оценки влияния температуры и давления на эффективность получения высокочистого водорода из углеводородного сырья в МК-устройствах 1-го типа, но и для сравнительного анализа известных из литературы других подобных МК-устройств.

Аналогичные расчеты выполнены для МК-устройства 2-го типа с удалением высокочистого водорода самотеком при абсолютном давлении $p_{\rm H} = 0,15$ МПа без применения металлогидридного компрессора. Результаты расчетов параметров мембранного извлечения высокочистого водорода, сопряженного с каталитическими реакциями (1, 2) представлены в табл. 3.

При каждом фиксированном абсолютном давлении исходной смеси и продуктов конверсии $p_{\rm B}$ максимальная производительность МК-устройства Q_p увеличивается с ростом температуры, а расчетная площадь мембраны $F_{\rm pacu.}$, необходимая для практически полного извлечения водорода, уменьшается.

Увеличение абсолютного давления $p_{\rm B}$ с 1,1 до 2,6 МПа для каждой фиксированной температуры приводит к росту производительности по высокочистому водороду Q_p и к снижению расчетной площади мембраны $F_{\rm pacy.}$

Для МК-устройства 2-го типа в табл. З представлены также расчетные величины средней плотности потока диффузии водорода через мембрану $J_{cp.} = Q_p/F_{pacч.}$, которые свидетельствуют об увеличении интенсивности отвода высокочистого водорода с ростом абсолютного давления $p_{\rm B}$ и рабочей температуры. Кроме того, рассчитали удельные показатели МК-устройства 2-го типа: объемный выход водорода $q_V = Q_p/Q_0$ и удельную площадь мембраны $f_{\rm Yd.} = F_{\rm pacч.}/Q_p$, необходимую для получения 1 м³H₂ в час.

Эти удельные показатели (q_V и f_{yg}), как и для МК-устройства 1-го типа, представляются удобными при сравнительной оценке влияния рабочей температуры и абсолютного давления p_B на эффективность и экономичность получения водорода в МК-устройстве 2-го типа из метана при прочих равных условиях.

В графическом виде расчетные температурные зависимости объемных выходов водорода q_V для МК-устройства 2-го типа представлены на рис. 3, из которого очевидно влияние рабочей температуры и абсолютного давления $p_{\rm B}$ на эффективность получения высокочистого водорода из метана. Для МК-устройства 2-го типа объемные выходы водорода при всех исследуемых абсолютных давлениях $p_{\rm H}$ более сильно зависят от температуры (рис. 3), чем в случае МК-устройства 1-го типа (рис. 1).



Рис. 3. Температурные зависимости объемного выхода высокочистого водорода при абсолютном давлении над мембраной *p*_в 1,1 (*1*); 1,6 (*2*); 2,1 (*3*) и 2,6 (*4*) МПа для МК-устройства 2-го типа при фиксированном *p*_н = 0,15 МПа: 5 – диапазон оптимальных температур; 6 – оценка из работы [4] по экспериментальным данным [10]

Из приведенных графических зависимостей следует, что повышение абсолютного давления $p_{\rm B}$ от 1,1 до 2,6 МПа для каждой рабочей температуры приводит к более высоким значениям объемного выхода водорода. Вертикальными пунктирными линиями 5 на рис. 3 обозначена оптимальная область температур 600–650 °C с высоким удельным пока-



ISSN 2410-9908

http://dream-journal.org

зателем объемного выхода водорода q_V , которая стала уже и сдвинулась по сравнению с МК-устройством 1-го типа в область более высоких температур.

Точкой 7 на рис. 3 отмечены результаты оценки показателя $q_V = Q_p/Q_0 = 0,177/0,190 = 0,93 \text{ м}^3\text{H}_2/\text{м}^3$ сырья [4] по экспериментальным данным из работы [10] для МК-модуля дискового типа с площадью мембран 0,0323 м² из палладиевого сплава толщиной 50 мкм при температуре 650 °C, $p_B = 1,3$ и $p_H = 0,1$ МПа. При температурах 600–650 °C и абсолютном давлении $p_B = 2,6$ МПа достигается как максимальный объемный выход высокочистого водорода $q_V 0,929-0,946 \text{ м}^3\text{H}_2/\text{M}^3$ сырья (рис. 3), так и минимальный уровень удельной площади мембраны f_{yd} . 0,117–0,068 м², необходимой для получения 1 м³H₂ в час (табл. 3).

Диаграммы на рис. З представляют корреляционные зависимости и позволяют в наглядной форме оценивать влияние температуры и абсолютного давления над мембраной ($p_{\rm B}$) на эффективность и экономичность получения водорода в МК-устройствах 2-го типа, а также проводить сравнительный анализ других известных из литературы МК-устройств подобного типа.

На основании расчетных данных, приведенных в табл. 2 и 3, построили еще одну обобщенную диаграмму зависимости объемного выхода водорода от отношения абсолютных давлений $p_{\rm H}/p_{\rm B} = X_{\rm пред.}$ при рабочей температуре 600 °C для МК-устройств 1- и 2-го типов (рис. 4). На производительность МК-устройств обоих типов по высокочистому водороду Q_p и удельный показатель объемного выхода водорода $q_V = Q_p/Q_0$ влияние оказывают отношения $p_{\rm H}/p_{\rm B}$, входящее в уравнение локальной диффузионной характеристики для участка площади мембраны. Чем меньше величина отношения $p_{\rm H}/p_{\rm B}$ (концентрационный предел $X_{\rm пред.} = p_{\rm H}/p_{\rm B}$), тем выше производительность по высокочистому водороду Q_p и удельный показатель объемного выхода водорода $q_V = Q_p/Q_0$ при фиксированном потоке питания Q_0 исходной сырьевой смеси.



Рис. 4. Зависимости объемного выхода водорода q_V от отношения $p_{\rm H}/p_{\rm B} = X_{\rm пред.}$ для МК-устройств 1-го (1) и 2-го (2) типов при рабочей температуре 600 °C

Для обоих типов МК-устройств различие зависимостей q_V от $p_{\rm H}/p_{\rm B}$ (кривые 1, 2, рис. 4) в диапазоне отношений $p_{\rm H}/p_{\rm B}$ 0,05–0,1 незначительно.



ности получения высокочистого водорода использован удельный показатель объемного выхода водорода.

3. Оценка влияния расхода исходной смеси углеводорода с парами воды на основные параметры получения высокочистого водорода в мембранно-каталитическом устройстве

Перспективность методики анализа методом математического моделирования влияния технологических параметров рабочей температуры и давлений на эффективность и экономичность получения высокочистого водорода в МК-устройствах подтверждена в первом разделе и работе [8].

Представляло интерес этим же методом проанализировать влияние еще одного технологического параметра – расхода исходного сырья на основные параметры получения высокочистого водорода в МК-устройстве с фиксированной площадью мембраны.

Для проведения анализа методом математического моделирования заданы следующие стандартные исходные данные МК-устройства. В качестве исходного сырья для получения высокочистого водорода была принята парометановая смесь с отношением $H_2O/CH_4 = 3$. Рабочая температура задана равной 600 °C. Абсолютное давление в высокотемпературном конверторе и полости высокого давления высокотемпературного мембранного аппарата МКустройства (*p*_в) принято равным 2,6 МПа (рис. 1). Абсолютное давление высокочистого водорода (под мембраной) задано равным p_н = 0,15 МПа. Отметим, что согласно оценок [8] принятые рабочие температура и давления (*p*_в и *p*_н) обеспечивают высокие показатели эффективности и экономичности получения высокочистого водорода из углеводородного сырья, включая удельный показатель объемного выхода водорода. Для проведения расчетов выбрана мембрана из серебряно-палладиевого сплава типа В-1 [12] толщиной 20 мкм на пористой подложке с общей площадью 10 м². Коэффициент удельной водородопроницаемости мембраны для рабочей температуры 600 °C был принят равным 0,015 см³H₂·мм/(см²·с·атм.^{0,5}) [14]. Напомним, что мембрана из сплава палладия с редкоземельным элементом аналогичной толщины 20 мкм и общей площадью 10,3 м² испытана в МК-устройстве производительностью 40 м³H₂/ч в течение 3000 ч. [9].

Исходная смесь водяного пара с метаном, поступающая в высокотемпературный конвертор (ВТК на рис. 1 в 1-м разделе), согласно обратимых химических реакций (1,2) в присутствии катализатора конверсии метана (К2) превращается в смесь простых газов (H₂, H₂O, CO₂, CO, CH₄). Далее продукты паровой конверсии метана подаются на извлечение водорода в свободный канал (СК) высокотемпературного мембранного аппарата (ВТМА) между мембраной (М) и катализатором метана (К2).

Результаты расчетов состава продуктов паровой конверсии метана при рабочих условиях на выходе из ВТК, а также состава по атомам водорода, кислорода и углерода на входе и выходе ВТК, представлены в табл. 4. Сырьем для мембранного извлечения высокочистого водорода в продуктах конверсии метана являются свободный (молекулярный) водород с концентрацией 20,96 об. % и метан (связанный водород) с концентрацией 16,89 об. %. Содержание сырья для мембранного извлечения высокочистого водорода в продуктах паровой конверсии характеризуется концентрацией общего водорода, которую можно рассчитать по приближенной формуле (3) с учетом стехиометрического коэффициента 4 при водорода в химическом равновесии (1). Оценка показала, что величина концентрации общего водорода, рассчитанная по формуле (3) с учетом данных табл. 2 составила $X_{\rm H_2,oбщ.} = 0,2096+4.0,1689 =$

= 0,8852 моль. долей.



ISSN 2410-9908

Таблица 4

	Mo	ольные дол	Атомные доли на входе					
Исх.	Исх. на выходе ВТК					и выходе ВТК		
смесь	$X_{\rm H_2}$	$X_{\rm H_2O}$	$X_{\rm CO_2}$	$X_{\rm CO}$	$X_{\rm CH_4}$	Н	0	С
CH ₄ –3H ₂ O	0,2096	0,5674	0,0475	0,0066	0,1689	0,7143	0,2143	0,0714

Равновесный состав продуктов паровой конверсии метана при температуре 600 °С и давлении 2,6 МПа

Напомним, что свободный (молекулярный) водород непосредственно участвует в процессе мембранного извлечения, а связанный водород (метан) участвует в мембранном разделении опосредованно через смещение химического равновесия (1) вправо при отборе водорода через мембрану.

В данном разделе рассмотрены четыре технологических режима с разным расходом исходной парометановой смеси Q_0 . Отметим, что для всех четырех режимов состав продуктов конверсии на выходе из ВТК одинаковый (табл. 4).

Для 1-го (базового) режима расход исходной парометановой смеси выбран $Q_0 = 113,2 \text{ м}^3/\text{ч}$. Объемные расходы, как и 1-м разделе, приведены к нормальным условиям. Расчет параметров МК-устройства с фиксированной площадью мембраны $F_{yct.} = 10 \text{ м}^2$ проводили с помощью математической модели [1, 2] мембранного извлечения высокочистого водорода в режиме идеального вытеснения из продуктов паровой конверсии углеводородов, учитывающей отток водорода через сплошную мембрану из палладиевого сплава под действием перепада давлений и химическое взаимодействие между компонентами газовой фазы при мембранном извлечении водорода. Результаты расчетов в численном виде представлены в табл. 5, а в графическом виде – на рис. 5.

Для 1-го (базового) режима при $Q_0 = 113,2 \text{ м}^3/\text{ч}$ расчетная производительность по высокочистому водороду Q_p с увеличением площади мембраны F от 0 до $F_{\text{уст.}}$ (кривая 1, рис. 5) растет и достигает максимального значения 105,2 м³H₂/ч при расчетной площади мембраны $F_{\text{расч.}} = 9,972 \text{ м}^2$, близкой к установленной площади мембраны $F_{\text{уст.}} = 10 \text{ м}^2$.

По мере мембранного извлечения высокочистого водорода концентрация молекулярного водорода $X_{\rm H_2}$ уменьшается от 0,2096 до 0,0585 моль. долей (кривая *I*', рис. 5) и приближается к концентрационному пределу $X_{\rm пред.} = p_{\rm H}/p_{\rm B} = 0,0577$ моль. долей, обозначенному горизонтальной пунктирной линией 5.

Концентрация метана за счет смещения химического равновесия (1) вправо при селективном извлечении водорода снижается с 0,1689 моль. долей (табл. 4) до 0,012 моль. долей (табл. 5).

Расчетный удельный показатель объемного выхода водорода для 1-го режима составил $q_V = 0.929 \text{ м}^3 \text{H}_2/\text{м}^3$ сырья (табл. 5), а показатель мольного выхода водорода – $q_m = 3.72 \text{ м}^3 \text{H}_2/\text{моль}$ CH₄, величина которого достаточно близка к стехиометрическому коэффициенту при водороде в химическом равновесии (1).

Для 2-го режима расход исходной парометановой смеси приняли в 2 раза ниже, чем для 1-го $Q_0 = 113,2/2 = 56,6 \text{ м}^3/4$. В этом случае производительность по высокочистому водороду (кривая 2, рис. 5) достигает максимального значения $Q_p = 52,6 \text{ м}^3/4$ при расчетной площади мембраны $F_{\text{расч.}} = 5,22 \text{ м}^2$ (табл. 5). На этой же площади мембраны расчетная концентрация остаточного молекулярного водорода X_{H_2} (кривая 2', рис. 5) приближается к концентрационному пределу $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей. Оставшаяся площадь мембраны $F_{\text{уст.}}-F_{\text{расч.}} = 10-5,22 = 4,78 \text{ м}^2$ не участвует в извлечении водорода.



ISSN 2410-9908

Таблица 5

		_	·			
Παραγιστρι ι	$Q_0,{ m M}^3$ /ч					
параметры,	113,2	56,6	169,8	226,4		
размерность	(1-й режим)	(2-й режим)	(3-й режим)	(4-й режим)		
<i>Q</i> ₁ , м ³ /ч	126,92	63,46	190,38	253,84		
$F_{\text{pacy.}}, \text{M}^2$	9,972	5,22	9,98	9,981		
Q_p , м ³ /ч	105,2	52,6	150,4	179,6		
$J_{\rm cp.},{\rm m}^{3}{\rm H}_{2}/{\rm m}^{2}{ m y}$	10,55	10,08	15,07	17,99		
Конц. Н ₂ на выходе ВТМА,						
моль. доли	0,0585	0,0582	0,0726	0,0927		
Конц. СН4 на выходе ВТМА,						
моль. доли	0,012	0,012	0,025	0,052		
q_{V} , м ³ H ₂ /м ³ сырья	0,929	0,929	0,886	0,793		
q_m , м 3 H ₂ /моль CH ₄	3,72	3,72	3,54	3,17		

Расчетные параметры извлечения водорода в МК-устройстве с фиксированной площадью мембраны F_{уст.} = 10 м²



Рис. 5. Зависимости производительности по высокочистому водороду Q_p (1, 2, 3, 4) и концентрации водорода XH_2 над поверхностью мембраны (1', 2', 3', 4') от площади мембраны F: 1, 1' – $Q_0 = 113,2$; 2, 2' – $Q_0 = 56,6$; 3, 3' – $Q_0 = 169,8$; 4, 4' – $Q_0 = 226,4$ м³/ч; 5 – уровень концентрационного предела $X_{пред.} = p_H/p_B = 0,0577$ моль. долей; 6 – уровень установленной площади мембраны $F_{ycr.} = 10$ м²

Далее рассмотрен 3-й режим с расходом исходной парометановой смеси в 1,5 раза больше, чем для 1-го режима $Q_0 = 113, 2 \cdot 1, 5 = 169, 8 \text{ м}^3/4$ (табл. 5). Расчетная производительность по высокочистому водороду Q_p с увеличением площади мембраны *F* (кривая *3*, рис. 5) растет и достигает максимального значения 150,4 м³H₂/ч. Основные расчетные параметры мембранного извлечения высокочистого водорода для 3-го режима представлены в табл. 5. Максимальная производительность по высокочистому водороду $Q_p = 150,4 \text{ м}^3\text{H}_2/4$ существенно выше, чем для 1-го режима и достигается при расчетной площади мембраны $F_{\text{расч.}} = 9,98 \text{ м}^2$, близкой к установленной площади мембраны $F_{\text{уст.}} = 10 \text{ м}^2$. Концентрация остаточного молекулярного водорода X_{H_2} составила 0,0726 моль. долей, т. е. выше концентрационного предела $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей, что свидетельствует о неполном извлечении



ISSN 2410-9908

высокочистого водорода. Концентрация остаточного метана составила 0,025 моль. долей, это выше, чем для 1- и 2-го режимов (табл. 5).

Для 4-го режима расход исходной парометановой смеси приняли в 2 раза больше, чем для 1-го режима $Q_0 = 113, 2 \cdot 2 = 226, 4 \text{ m}^3/4$. Расчетная производительность по высокочистому водороду Q_p с увеличением площади мембраны F (кривая 4, рис. 5) растет и достигает максимального значения 179,6 м³H₂/4 (табл. 5), что выше, чем для всех исследованных режимов при расчетной площади мембраны $F_{\text{расч.}} = 9,981 \text{ m}^2$, близкой к установленной площади мембраны $F_{\text{уст.}} = 10 \text{ m}^2$. Расчетная концентрация остаточного молекулярного водорода X_{H_2} составила 0,0927 моль. долей, что существенно выше концентрационного предела $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей и так же, как и для 3-го режима, свидетельствует о неполном извлечении высокочистого водорода. Концентрация остаточного метана составила 0,052 моль. долей, что заметно выше, чем для остальных режимов. Используя расчетные данные табл. 5, построили графическую зависимость производительности МК-устройства по высокочистому водороду от расхода исходной парометановой смеси, представленную на рис. 6.



Рис. 6. Зависимость производительности по высокочистому водороду Q_p от потока исходной парометановой смеси Q_0 : I – зависимость Q_p от Q_0 ; 2 – уровень потока исходной парометановой смеси $Q_0 = 113,2 \text{ м}^3/\text{ч}$

На участке от $Q_0 = 0$ до $Q_0 = 113,2 \text{ м}^3/\text{ч}$ наблюдается линейная зависимость Q_p от Q_0 , проходящая через начало координат, что в пределах установленной площади мембраны $F_{\text{ycr.}} = 10 \text{ м}^2$ характеризует процесс мембранного извлечения водорода до остаточной концентрации молекулярного водорода, близкого к концентрационному пределу $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей. На участке A-B зависимости Q_p-Q_0 при $Q_0>113,2 \text{ м}^3/\text{ч}$ наблюдается отклонение от первоначального линейного хода в сторону меньших значений Q_p .

Аналогичный вид начальному линейному участку до точки *A* на рис. 6 для расходной характеристики МК-конвертора [9] получен ранее в работе [2] и представлен на рис. 7.

Отметим, что экспериментальные данные [9] в виде треугольных точек 2 (рис. 7) хорошо укладываются на прямую линию в координатах $Q_p - Q_{III}$ (где Q_{III} – расход природного газа), рассчитанную по той же математической модели [1, 2]. Состав природного газа, по данным работы [9], представлял смесь предельных углеводородов: 88,5 % CH₄, 4,6 % C₂H₆, 5,4 % C₃H₈ и 1,5 % C₄H₁₀.

На основании расчетных данных (табл. 5) построили графическую зависимость объемного выхода водорода q_v от потока исходной парометановой смеси Q_0 , представленную на рис. 8. Удельный показатель $q_v = Q_p/Q_0$ отражает эффективность получения высокочистого водорода в МК-устройстве. На участке A-E (рис. 8) эффективность извлечения высокочистого водорода высокая и соответствует величине $q_v = 0,929 \text{ м}^3 \text{H}_2/\text{M}^3$ сырья. На участке E-B

ISSN 2410-9908

(рис. 8) эффективность извлечения высокочистого водорода q_v за счет неполного извлечения водорода заметно уменьшается до $q_v = 0,793 \text{ м}^3 \text{H}_2/\text{м}^3$ сырья (табл. 5).

Зависимости типа $q_v - Q_0$ представляют практический интерес при испытаниях МК-устройств для оценки их эффективности и экономичности с точки зрения полноты извлечения высокочистого водорода и эффективности использования установленной площади мембраны (рис. 8).



Рис. 7. Зависимость производительности МК-конвертора по высокочистому водороду Q_p от потока природного газа $Q_{пг}$: 1 – расчетные данные из работы [2]; 2 – экспериментальные данные [9]

При экспериментальных исследованиях МК-устройств, как правило, измеряются объемный расход исходного сырья Q_0 и поток высокочистого водорода Q_p . Эти два показателя позволяют рассчитывать объемный выход водорода $q_v = Q_p/Q_0$ при фиксированном расходе исходного сырья Q_0 . Ступенчато изменяя расход исходного сырья Q_0 при постоянных остальных технологических и конструктивных параметрах, можно найти Q_0 , при котором расчетный параметр объемного выхода водорода q_v начнет отклоняться в сторону меньших значений.



Рис. 8. Зависимость объемного выхода водорода q_v от потока исходной парометановой смеси Q_0

Это позволит определить расход исходной сырьевой смеси Q_0 , при котором установленная площадь мембраны полностью участвует в извлечении высокочистого водорода при минимальной остаточной концентрации молекулярного водорода в разделяемой смеси продуктов паровой конверсии метана.

ISSN 2410-9908



http://dream-journal.org

В табл. 6 приведены расчетные данные полных составов реакционной смеси газов после максимально возможного извлечения высокочистого водорода для четырех исследованных режимов с разным расходом исходной парометановой смеси. Для 1- и 2-го режимов, несмотря на разную производительность МК-устройства по высокочистому водороду, полные расчетные составы газовой фазы одинаковые, что связано с полным извлечением высокочистого водорода на установленной площади мембраны, которое характеризуется концентрацией остаточного водорода, близкой к концентрационному пределу $X_{\rm пред.} = 0,0577$ моль. долей.

Таблица б

	2	Мольные доли продуктов конверсии на выходе ВТМА						
Режим <i>Q</i> ₀ , м ³ /ч	<i>Q</i> ₀ , м ³ /ч	X_{H_2}	$X_{\rm H_2O}$	$X_{\rm CO_2}$	X _{CO}	$X_{\rm CH_4}$		
1	113,2	0,0585	0,4921	0,4186	0,01867	0,0121		
2	56,6	0,0582	0,4920	0,4194	0,01860	0,0118		
3	169,8	0,0726	0,4994	0,3819	0,02082	0,0253		
4	226,4	0,0927	0,5164	0,3174	0,02136	0,0521		

Составы реакционной смеси газов после извлечения высокочистого водорода

Для 3- и 4-го режимов составы реакционной смеси изменяются, причем чем больше расход исходного сырья, тем выше концентрации остаточных водорода и метана из-за неполного извлечения высокочистого водорода на фиксированной площади мембраны. Критерием неполного извлечения водорода для 3- и 4-го режимов является более высокие концентрации остаточного молекулярного водорода по сравнению с величиной концентрационного предела $X_{пред.} = 0,0577$ моль. долей.

Контролируя содержание молекулярного водорода в сбросном газе, при ступенчатом изменении расхода исходного сырья Q_0 можно экспериментально оценить величину Q_0 , при которой максимально эффективно используется установленная площадь мембраны МК-устройства при минимальном содержании остаточного молекулярного водорода и максимальном объемном выходе водорода q_v . Отметим, что остальные технологические параметры при ступенчатом изменении расхода исходного сырья Q_0 должны оставаться постоянными.

4. Влияние вида и атомного состава углеводородного сырья на эффективность получения высокочистого водорода в мембранно-каталитических системах

В качестве исходного сырья для получения высокочистого водорода в МК-устройствах могут быть использованы различные виды углеводородов, однако систематических экспериментальных и расчетных данных, необходимых для установления влияния вида и атомного состава углеродного сырья на эффективность получения высокочистого водорода в этих устройствах, в литературе практически нет.

В качестве примера для проведения анализа влияния вида и атомного состава исходного углеводородного сырья при одинаковых исходных технологических условиях и конструктивных параметрах выбрали предельные углеводороды с числом углеродных атомов от 1 до 4 (CH₄, C₂H₆, C₃H₈, C₄H₁₀), а также кислородсодержащие углеводороды (спирты) с таким же числом углеродных атомов (CH₃OH, C₂H₅OH, C₃H₇OH, C₄H₉OH).

Структурная схема (рис. 1) и принцип работы МК-устройств получения высокочистого водорода из углеводородного сырья рассмотрены ранее. При расчетах технологических параметров ВТК для смесей паров воды и углеводорода ($C_xH_yO_z$) в качестве исходного пара-



ISSN 2410-9908

метра использовали отношение числа молей паров воды на один углеродный атом углеводорода $m = H_2 O / C$ (4).

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

Для фиксированной величины *m* в формуле 4 моль. доли паров воды и углеводорода в исходной смеси выразили следующим образом:

$$XH_2O = x \cdot m/(1 + x \cdot m); \tag{5}$$

$$XC_{x}H_{y}O_{z} = 1/(1+x \cdot m).$$
(6)

Согласно представлениям, развитым для тройных диаграмм С–H–O [14] атомные доли водорода (H_0), кислорода (O_0) и углерода (C_0) в исходной смеси $H_2O - C_xH_yO_z$ рассчитывали по формулам (7)–(9):

$$H_0 = (y + 2 \cdot x \cdot m) / (x + y + z + 3 \cdot x \cdot m);$$
(7)

$$O_0 = (z + x \cdot m)/(x + y + z + 3 \cdot x \cdot m);$$
(8)

$$C_0 = x/(x+y+z+3\cdot x\cdot m).$$
 (9)

Зная исходный атомный состав (H_0, O_0, C_0) в исходной смеси на входе ВТК и полагая его неизменным при рабочих условиях по методике [15] вычисляли равновесный мольный состав продуктов конверсии ($X'H_2$, $X'H_2O$, $X'CO_2$, X'CO, $X'CH_4$) на выходе из ВТК. При заданном потоке исходной смеси Q_0 на входе в ВТК, по выражению (10), вытекающему из уравнения материального баланса по атомам водорода, и равновесных концентраций $X'H_2$, $X'H_2O$, $X'CH_4$, рассчитывали поток продуктов паровой конверсии углеводорода Q_1 на выходе из ВТК.

$$Q_{1} = Q_{0} (y \cdot X C_{X} H_{Y} O_{Z} + 2 \cdot X H_{2} O) / (2 \cdot X H_{2} + 2 \cdot X H_{2} O + 4 \cdot X C H_{4})$$
(10)

Для проведения расчетов приняты следующие стандартные исходные данные: отношение $m = H_2O/C = 3$, исключающее углеродоотложение в газовой фазе для всех исследуемых углеводородов. Как и в предыдущих разделах, мембрана представляла собой тонколистовой прокат из палладиевого сплава типа B-1 [12] толщиной 0,02 мм на прочной пористой подложке. Абсолютное давление газа $p_{\rm B}$ в BTK и ПВД мембранного аппарата во всех случаях принято равным 2,6 МПа, а абсолютное давление газа $p_{\rm H}$ в полости низкого давления (ПНД) мембранного аппарата – 0,15 МПа. Согласно результатов анализа, приведенного в 1-м разделе и работе [8], указанные выше величины $p_{\rm B}$ и $p_{\rm H}$ при рабочей температуре 600 °C обеспечивают высокую эффективность МК-системы, характеризуемую удельным показателем объемного выхода водорода $q_{\rm v} = Q_p/Q_0$. Кроме того, принятая величина $p_{\rm H} = 0,15$ МПа свидетельствует об удалении водорода-продукта из ПНД мембранного аппарата не только самотеком, но и под избыточным давлением 0,05 МПа. Коэффициент удельной водородопроницаемости γ для сплава B-1 при рабочей температуре 600 °C принят равным 0,015 см³H₂/(с·см²·ат^{0,5}) [14].

Исходные составы, а также расчетные мольные доли паров воды и углеводородов для исследуемых восьмии исходных смесей представлены в табл. 7. При проведении анализа системы ВТК-ВТМА расход каждой исходной смеси Q_0 был принят одинаковым (100 м³/ч) для всех рассматриваемых случаев (табл. 7). Объемные расходы, как и в предыдущих разделах, приведены к нормальным условиям.

Далее, используя формулы (5) и (6), рассчитали мольные доли паров воды $X_{\rm H_2O}$ и углеводорода $X_{\rm C_xH_yO_z}$ в исходной смеси, представленные в табл. 7.



ISSN 2410-9908

Таблица 7

№ исх. смеси	Исходные смеси	Мольная доля паров воды	Мольная доля угле- водорода	<i>Q</i> ₀ , м ³ /ч	<i>Q</i> ₁ , м ³ /ч
	Пре	дельные углево	дороды		
1	CH_4-3H_2O	0,75	0,25	100	112,1
2	$C_2H_6-6H_2O$	0,8571	0,1429	100	118,8
3	$C_3H_8-9H_2O$	0,9	0,1	100	121,6
4	$C_4H_{10}-12H_2O$	0,9231	0,0769	100	123,2
		Спирты			
5	CH ₃ OH–3H ₂ O	0,75	0,25	100	123,5
6	C ₂ H ₅ OH–6H ₂ O	0,857	0,143	100	125,6
7	C ₃ H ₇ OH–9H ₂ O	0,9	0,1	100	126,4
8	$C_4H_9OH-12H_2O$	0,923	0,077	100	126,8

Технологические параметры ВТК

Рассчитанные по методике [15] равновесные вещественные и атомные составы продуктов конверсии, получаемых из исследуемых смесей 1–8 (табл. 7), представлены в табл. 8. Выходные потоки продуктов конверсии Q_1 на выходе из ВТК (табл. 7) рассчитаны по уравнению (10) с учетом данных табл. 8 при условии сохранения постоянным атомного состава по трем элементам (C, H, O) в исходной смеси и продуктах конверсии.

Отметим, что с увеличением числа углеродных атомов для предельных углеводородов (смеси 1–4, табл. 7) при фиксированном отношении $H_2O/C = 3$ в исходной смеси на выходе из ВТК концентрации водорода и метана уменьшаются (табл. 8).

Таблица 8

Равновесные и атомные составы продуктов паровой конверсии исследуемых смесей углеводородного сырья

N⁰	М	Атомнь	ые доли на	входе				
исх.		на в	ыходе ВТК			ИЕ	выходе BTI	K
сме- си	X'_{H_2}	$X'_{\rm H_2O}$	$X'_{\rm CO_2}$	X' _{CO}	X'_{CH_4}	Н	0	С
			Предель	ные углево	дороды			
1	0,2096	0,5674	0,0475	0,0066	0,1689	0,7143	0,2143	0,0714
2	0,1883	0,5713	0,0706	0,0087	0,1611	0,6923	0,2308	0,0769
3	0,1818	0,5715	0,0795	0,0095	0,1577	0,6842	0,2368	0,0789
4	0,1787	0,5715	0,0841	0,0099	0,1559	0,68	0,24	0,08
				Спирты				
5	0,1695	0,6281	0,0864	0,0087	0,1073	0,6667	0,2667	0,0666
6	0,17	0,6025	0,0921	0,0097	0,1257	0,6666	0,2593	0,0741
7	0,17	0,5926	0,0942	0,0101	0,1330	0,6666	0,2564	0,0769
8	0,17	0,5874	0,0954	0,0103	0,1369	0,6666	0,2549	0,0784

Для спиртов (смеси 5–8, табл. 7), в отличие от предельных углеводородов при увеличении числа углеродных атомов, концентрация молекулярного водорода в продуктах конверсии на выходе из ВТК практически одинаковая, а концентрация метана увеличивается (табл. 8). Концентрации общего водорода в продуктах паровой конверсии на

ISSN 2410-9908

выходе из ВТК, рассчитанные по приближенной формуле (3) с учетом стехиометрического коэффициента 4 при водороде в химическом равновесии (1) для исходных смесей 1–8 (табл. 7) представлены в табл. 9.

Концентрация общего водорода для предельных углеводородов (смеси 1–4) с ростом числа углеродных атомов уменьшается, а для спиртов (смеси 5–8) – увеличивается (табл. 9).

Таблица 9

№ исх. смеси	<i>Х</i> Н ₂ ,общ., моль. доли	<i>F</i> _{расч.} , м ²	<i>Q_P</i> , м ³ /ч	<i>J</i> _{ср.} , м ³ H₂/(м ² ·ч)	$q_{ u}, \ { m m}^{3}{ m H}_{2}/~{ m m}^{3}{ m cырь}$ я	<i>q_m</i> , м ³ H₂/ моль. у.в.			
Предельные углеводороды									
1	0,8852	8,67	92,9	10,71	0,929	3,7			
2	0,8327	9,41	91,9	9,77	0,919	6,43			
3	0,8126	9,69	91,5	9,44	0,915	9,15			
4	0,8023	9,9	91,3	9,22	0,913	11,87			
				Спирты					
5	0,5987	7,38	67,7	8,679	0,677	2,192			
6	0,6728	8,74	77,8	8,9	0,778	4,33			
7	0,702	9,086	81,7	8,99	0,817	8,17			
8	0,7176	9,414	83,8	8,9	0,838	10,9			

Основные расчетные показатели получения высокочистого водорода в МК-устройстве из смесей углеводородов разных типов с парами воды

Для проведения расчетов мембранного извлечения высокочистого водорода из продуктов паровой конверсии углеводородов (смеси 1–8 табл. 8) использовали базовый алгоритм математической модели [1, 2], а также стандартные исходные технологические и конструктивные параметры, представленные ранее. В графическом виде результаты численного моделирования мембранного извлечения водорода из продуктов паровой конверсии предельных углеводородов представлены на рис. 9, а для спиртов – на рис. 10.

Характер расчетных зависимостей $Q_p - F$ и $X_{H_2} - F$ для двух видов углеводородов, приведенных на рис. 9 и 10, одинаковый. По мере прохождения продуктов конверсии углеводородов по свободному каналу вдоль поверхности мембраны *F* за счет оттока водорода через мембрану под действием перепада давлений и смещения химических равновесий (1) и (2) вправо равновесная концентрация водорода X_{H_2} над участком поверхности мембраны (кривые 1'-4', рис. 9 и 10) уменьшается и приближается к концентрационному пределу $X_{пред.} = p_{H}/p_{B} = 0,0577$ моль. долей, отмеченному на рис. 9 и 10 горизонтальной пунктирной линией 6, а производительность по высокочистому водороду Q_p (кривые 1-4 рис. 9 и 10) выходит на насыщение.

Отличие заключается в том, что для предельных углеводородов (рис. 9) производительность по высокочистому водороду Q_p снижается с ростом числа углеродных атомов, а для спиртов (рис. 10) – увеличивается.





ISSN 2410-9908



Рис. 9. Зависимости производительности МК-устройства $Q_P(1, 2, 3, 4)$ и концентрации водорода над поверхностью мембраны $XH_2(1',2',3',4')$ от площади мембраны F для исходных смесей: $1 - CH_4 - 3H_2O$; $2 - C_2H_6 - 6H_2O$; $3 - C_3H_8 - 9H_2O$; $4 - C_4H_{10} - 12H_2O$; $5 - уровень потока исходного сырья <math>Q_0 = 100 \text{ м}^3/4$; 6 -уровень концентрационного предела $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей

В численном виде основные расчетные показатели получения высокочистого водорода в МК-устройстве из продуктов паровой конверсии для всех исследуемых углеводородов (смеси 1–8 табл. 7) приведены в табл. 9. Представленные показатели свидетельствуют о том, что с увеличением числа углеродных атомов в предельном углеводороде эффективность получения высокочистого водорода в МК-устройстве при стандартных условиях снижается. Так при переходе от метана к бутану при достаточно высоком уровне максимальной производительности МК-устройства по высокочистому водороду Q_p незначительно уменьшается от 92,9 до 91,3 м³/ч, а объемный выход водорода $q_v = Q_p/Q_0$ снижается от 0,929 до 0,913 м³H₂/м³сырья (табл. 9).



Рис. 10. Зависимости производительности МК-устройства $Q_P(1, 2, 3, 4)$ и концентрации водорода над поверхностью мембраны $XH_2(1', 2', 3', 4')$ от площади мембраны F для исходных смесей: $1 - CH_3OH-3H_2O$; $2 - C_2H_5OH-6H_2O$; $3 - C_3H_7OH-9H_2O$; $4 - C_4H_9OH-12H_2O$; 5 - уровень расхода исходного сырья $Q_0 = 100 \text{ m}^3/\text{ч}$; 6 - уровень концентрационного предела $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей



Расчетная площадь мембраны $F_{\text{расч.}}$, необходимая для наиболее полного извлечения водорода для смесей 1–4, увеличивается от 8,67 до 9,9, что связано с уменьшением концентрации молекулярного (свободного) водорода (табл. 9), влияющего на локальную диффузионную характеристику мембранного аппарата, и отражается на средней плотности потока диффузии водорода через мембрану $J_{cp.} = Q_p/F_{pacч.}$, которая уменьшается от 10,71 до 9,22 м³H₂/(м²·ч) при переходе от метана к бутану (табл. 9).

Числовые значения основных расчетных показателей получения высокочистого водорода из спиртов (табл. 9), свидетельствуют о более низкой эффективности получения высокочистого водорода по сравнению с предельными углеводородами. Для смесей 5–8 производительность по водороду-продукту Q_p и объемный выход водорода q_v ниже, чем для предельных углеводородов и в отличие от последних Q_p растет от 67,7 до 83,8 м³H₂/ч, а q_v увеличивается от 0,677 до 0,838 м³H₂/м³сырья с ростом числа углеродных атомов в исследуемых спиртах (табл. 9).

Для исследованных спиртов расчетная площадь мембраны, необходимая для наиболее полного извлечения высокочистого водорода, увеличивается с 7,38 до 9,414 м², что связано с ростом концентрации общего водорода в продуктах конверсии, поступающих на мембранное разделение, а для его полного извлечения при практически постоянной средней плотности потока диффузии водорода через мембрану J_{cp} . 8,679–8,9 м³H₂/(м²·ч) требуется большая площадь мембраны (табл. 9).

Корреляционная связь удельного показателя объемного выхода водорода q_v с числом углеродных атомов x в исследованных углеводородах проиллюстрирована на рис. 11. Так, для предельных углеводородов снижение удельного показателя объемного выхода водорода q_v от числа углеродных атомов x (кривая 3, рис. 11) коррелирует с уменьшением концентрации общего водорода (кривая 1, рис. 11). Для спиртов рост удельного параметра q_v (кривая 4, рис. 11) от числа углеродных атомов в углеводороде x коррелирует с увеличением концентрации общего водорода (кривая 2, рис. 11).



Рис. 11. Зависимости концентраций общего водорода $XH_{2,06\mu}$ на выходе из ВТК (1 и 2) и объемного выхода водорода q_{ν} (3 и 4) от числа углеродных атомов x в исходном углеводороде: 1 и 3 – предельные углеводороды; 2 и 4 – спирты

На примере проведенного сравнительного анализа установлено, что для предельных углеводородов максимальная эффективность МК-устройства для получения высокочистого водорода достигается для чистого метана. Далее, с увеличением числа углеродных атомов в предельном углеводороде эффективность извлечения водорода снижается, что связано с уменьшением концентрации общего водорода на входе в мембранную часть МК-устройства. При равных исходных технологических условиях и конструктивных параметрах эффективность получения высокочистого водорода для исследованных кислородсодержащих



углеводородов (спиртов) ниже, чем для предельных углеводородов. С увеличением числа углеродных атомов в спиртах эффективность получения высокочистого водорода несколько увеличивается, но в целом остается ниже, чем для предельных углеводородов.

5. Оценка влияния отношения H₂O/C в исходных смесях на эффективность получения высокочистого водорода из углеводородов в мембранно-каталитическом устройстве

Для наиболее широко используемых в качестве углеводородного сырья предельных углеводородов отношение паров воды к атому углерода в углеводороде ($m = H_2O/C$) в исходных смесях обычно принимают m = 3, что гарантирует отсутствие углеродоотложения. Тем не менее, в работе [16] приведены результаты экспериментальных исследований МК-модуля дискового типа при отношении $H_2O/C = 2,5$, а в работе [17] расчетным путем доказано, что для спиртов (метанол, этанол) это отношение может быть снижено до 1,5–2 при отсутствии вероятности углеродоотложения.

В данном разделе метод математического моделирования использован для оценки влияния отношения H₂O/C в исходных смесях на эффективности получения высокочистого водорода в МК-устройстве из продуктов паровой конверсии углеводородного сырья.

Для проведения анализа в качестве сырья выбрали исходные смеси паров воды с метаном (H_2O-CH_4) при отношениях H_2O/C равным 3,0; 2,8; 2,6 и 2,4, а также смеси паров воды с метанолом (H_2O-CH_3OH) при отношениях H_2O/C равным 3,0; 2,5; 2,0 и 1,5.

На вход системы МК-устройства (рис. 1) подаются смеси метана или метанола с парами воды. В высокотемпературном конверторе (ВТК) на катализаторе конверсии углеводорода (К1 или К2) исходная смесь углеводорода с парами воды согласно водородообразующих реакций (11) или (12) и сопряженной обратимой химической реакции (13) превращается в смесь простых газов (H₂, H₂O, CO₂, CO, CH₄).

$$CH_4 + 2H_2O = 4H_2 + CO_2;$$
 (11)

$$CH_3OH + H_2O = 3H_2 + CO_2;$$
 (12)

$$CO + H_2O = H_2 + CO_2.$$
(13)

Далее продукты конверсии поступают в свободный канал (СК) полости высокого давления (ПВД) высокотемпературного мембранного аппарата (ВТМА), где под действием перепада давлений в присутствии катализатора конверсии метана (К2) происходит селективное мембранное извлечение как молекулярного (свободного) водорода, так и водорода, образующегося главным образом из метана (связанный водород) при смещении вправо химического равновесия (11) по мере отвода водорода через тонкую сплошную мембрану (М) из палладиевого сплава. Обедненная по водороду смесь продуктов конверсии в виде сбросного газа (СГ) выходит из ПВД мембранного аппарата, а водород-продукт выводится из ПНД мембранного аппарата и подается потребителю. Высокотемпературный конвертор ВТК и ВТМА размещены в общем корпусе (ОК), обогреваемом снаружи.

Исходные составы, а также расчетные мольные доли паров воды и исследуемых углеводородов (метана и метанола) для восьми смесей представлены в табл. 10.

Для проведения анализа приняты следующие стандартные исходные данные. В качестве мембраны выбрана фольга из палладиевого сплава типа B-1 толщиной 0,02 мм на прочной пористой металлической подложке, обеспечивающей механическую прочность. Абсолютное давление газа $p_{\rm B}$ в высокотемпературном конверторе (BTK) и полости высокого давления (ПВД) мембранного аппарата во всех случаях принято равным 2,6 МПа, а абсолютное давление газа $p_{\rm H}$ в полости низкого давления (ПНД) мембранного аппарата – 0,15 МПа.

Согласно оценкам из 1-го раздела и работы [8] указанные величины $p_{\rm B}$ и $p_{\rm H}$ обеспечивают высокий уровень объемного выхода водорода $q_{\rm v} = Q_p/Q_0$ при рабочей температуре 600 °C для исходной смеси CH₄–3H₂O. Кроме того, указанная выше величина $p_{\rm H} = 0,15$ МПа свидетельствует об удалении водорода-продукта из ПНД мембранного аппарата не только самотеком, но и под избыточным давлением 0,05 МПа, что не требует применения дополнительного устройства (металлогидридного компрессора [8]) для откачки высокочистого водорода.

Коэффициент удельной водородопроницаемости γ для сплава B-1 при рабочей температуре 600 °С принят равным 0,015 см³H₂/(с·см²·ат^{0,5}) [14]. При проведении анализа системы ВТК–ВТМА расход каждой исходной смеси Q_0 был принят одинаковым (100 м³/ч) для всех рассмотренных случаев (табл. 10). Объемные расходы, как и в предыдущих разделах, приведены к нормальным условиям.

Таблица 10

№ исх. смеси	Исходные смеси	Мольная доля паров воды	Мольная доля углеводорода	<i>Q</i> ₀ , м ³ /ч	$Q_1, \ M^3/4$
		Метан			
1	CH ₄ –3 H ₂ O	0,75	0,25	100	112,12
2	CH ₄ –2,8 H ₂ O	0,737	0,263	100	112,19
3	CH ₄ –2,6 H ₂ O	0,722	0,278	100	112.26
4	CH ₄ –2,4 H ₂ O	0,7059	0,2941	100	112,32
		Метанол			
5	CH ₃ OH–3 H ₂ O	0,75	0,25	100	123,5
6	CH ₃ OH–2,5 H ₂ O	0,714	0,286	100	125,57
7	CH ₃ OH–2 H ₂ O	0,667	0,333	100	128,25
8	CH ₃ OH–1,5 H ₂ O	0,6	0,4	100	131,92

Технологические параметры ВТК

Состав продуктов конверсии на выходе из ВТК определяются температурой, давлением, отношением H_2O/C в исходной смеси и двумя химическими равновесиями (11, 13). С помощью представлений, развитых для тройных диаграмм С–H–O [15], учитывая неизменность атомного состава водорода, кислорода, углерода в исходном сырье и продуктах конверсии, рассчитали равновесные составы газовой смеси на выходе из ВТК (табл. 11).

При заданном стандартном расходе исходной смеси $Q_0 = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$ (табл. 10) на входе в ВТК с учетом равновесных мольных долей компонентов газовой фазы (табл. 11), используя уравнение материального баланса по атомам водорода, рассчитали объемные расходы продуктов конверсии Q_1 на выходе из ВТК (табл. 10). Перед проведением анализа предварительно с помощью методики из работы [1] проведена проверка термодинамической вероятности углеродоотложения для всех исследуемых исходных смесей (табл. 10).

Результаты количественной оценки вероятности углеродоотложения для всех исследуемых смесей 1–8 в виде графических зависимостей критерия углеродоотложения ω от площади мембраны *F* представлены на рис. 12 и 13. Расчеты подтвердили отсутствие термодинамической вероятности углеродоотложения для всех исходных смесей (табл. 10), поскольку зависимости ω –*F* на рис. 12 и 13 расположены выше границы углеродоотложения ($\omega = 1$), обозначенной горизонтальной пунктирной линией 5 на рис. 12 и 13.





ISSN 2410-9908

2410-9900

Таблица 11

Равновесные и атомные составы продуктов паровой конверсии исследуемых смесей углеводородного сырья

№ исх. смеси	Мс	Атомные доли на входе и выходе ВТК										
	<i>X</i> _{H₂}	$X_{\rm H_2O}$	$X_{\rm CO_2}$	X _{CO}	X_{CH_4}	Н	0	С				
Метан												
1	0,2096	0,5674	0,0475	0,0066	0,1689	0,7143	0,2143	0,0714				
2	0,2106	0,5549	0,0476	0,0068	0,1802	0,716	0,209	0,075				
3	0,2114	0,5411	0,0476	0,0070	0,1928	0,719	0,203	0,078				
4	0,2122	0,5260	0,0476	0,0072	0,2070	0,721	0,197	0,082				
Метанол												
5	0,1695	0,6281	0,0864	0,0087	0,1073	0,667	0,266	0,067				
6	0,1700	0,6025	0,0921	0,0097	0,1257	0,667	0,259	0,074				
7	0,1697	0,5704	0,0991	0,0111	0,1497	0,667	0,25	0,083				
8	0,1679	0,5289	0,1081	0,0129	0,1822	0,667	0,238	0,095				



Рис. 12. Зависимости критерия углеродоотложения ω от площади мембраны F для метана в качестве сырья при отношениях $m = H_2O/C$: 1 - 3,0; 2 - 2,8; 3 - 2,6; 4 - 2,4; 5 -граница углеродоотложения ($\omega = 1$)

Для проведения расчетов параметров мембранного извлечения высокочистого водорода из продуктов паровой конверсии углеводородов (смеси 1–8 табл. 11) использовали основной алгоритм математической модели [1, 2], а также стандартные исходные технологические данные и конструктивные параметры, приведенные ранее.

В графическом виде результаты расчетов мембранного извлечения водорода из продуктов паровой конверсии для исследуемых углеводородов представлены на рис. 14 и 15. Характер расчетных зависимостей Q_p -*F* и $X_{\rm H_2}$ - *F* для двух видов углеводородов на рис. 14 и 15 одинаковый.



ISSN 2410-9908



Рис. 13. Зависимости критерия углеродоотложения ω от площади мембраны F для метанола в качестве сырья при отношениях $m = H_2O/C$: 1 - 3,0; 2 - 2,5; 3 - 2,0; 4 - 1,5; $5 - граница углеродоотложения (<math>\omega = 1$)

По мере прохождения продуктов конверсии углеводородов вдоль поверхности мембраны F за счет оттока водорода через мембрану под действием перепада давлений и смещения химических равновесий (11) и (13) вправо производительность по высокочистому водороду Q_p (кривые *1*–4, рис. 14 и 15) растет и выходит на насыщение.



Рис. 14. Зависимости производительности по высокочистому водороду Q_p (1–4) и концентрации водорода XH_2 (1'–4') от площади мембраны F для исходных смесей CH₄–mH₂O при $m = H_2O/C$: 1, 1'–3,0; 2, 2'–2,8; 3, 3'–2,6; 4, 4'–2,4; 5 – уровень расхода исходной смеси $Q_0 = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$; 6 – уровень концентрационного предела $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей

В этом случае равновесная концентрация водорода $X_{\rm H_2}$ над участком поверхности мембраны (кривые l'-4', рис. 14 и 15) уменьшается и приближается к концентрационному пределу $X_{\rm пред.} = p_{\rm H}/p_{\rm B} = 0,0577$ моль. долей, отмеченному на рис. 14 и 15 горизонтальной пунктирной линией 6.



ISSN 2410-9908



Рис. 15. Зависимости производительности по высокочистому водороду Q_p (1–4) и концентрации водорода XH_2 (1'–4') от площади мембраны F для исходных смесей CH_3OH-mH_2O при $m = H_2O/C$: 1, 1'–3,0; 2, 2'–2,5; 3, 3'–2,0; 4, 4'–1,5; 5 – уровень расхода исходной смеси $Q_0 = 100 \text{ м}^3/\text{ч}$; 6 – уровень концентрационного предела $X_{\text{пред.}} = 0,0577$ моль. долей

В численном виде основные расчетные показатели эффективности получения высокочистого водорода в МК-системе из продуктов паровой конверсии для всех исследуемых исходных смесей 1–8 (табл. 10) представлены в табл. 12.

Максимальная производительность по высокочистому водороду Q_p при тех же условиях для смесей 1–4 увеличивается с 92,9 до 106,7 м³H₂/ч, а для смесей 5–8 – с 67,7 до 106,3 м³H₂/ч (табл. 12). Точно так же реагирует на уменьшение отношения H₂O/C удельный показатель объемного выхода водорода $q_v = Q_p/Q_0$, который растет от 0,929 до 1,07 м³H₂/м³сырья для смесей 1–4 и от 0,677 до 1,06 м³H₂/м³сырья для смесей 5–8 (табл. 12). Средняя плотность потока диффузии водорода через мембрану $J_{cp.} = Q_p/F$ снижается для смесей 1–4 с 10,7 до 9,3 м³H₂/м²), а для смесей 5–8 увеличивается от 7,74 до 9,17 м³H₂/м² (табл. 12). Расчетная площадь мембраны $F_{pacч.}$, необходимая для полного извлечения водорода при снижении отношения H₂O/C для смесей 1–4 увеличивается с 8,67 до 11,47 м², а для смесей 5–8 растет с 7,38 до 13,72 м², что связано с увеличением концентрации общего водорода (табл. 12), а для наиболее полного извлечения водорода в этом случае требуется большая площадь мембраны.

Мольные выходы водорода q_m для смесей 1–4 изменяются в достаточно узких пределах 3,72–3,64 м³H₂/моль углеводорода при уменьшении отношения H₂O/C от 3,0 до 2,4 и приближаются к стехиометрическому коэффициенту при водороде равному 4 для водородообразующей реакции (11). Для смесей 5–8 мольные выходы водорода q_m также достаточно близки между собой (2,71–2,65 м³H₂/моль углеводорода) при изменении отношения H₂O/C от 3,0 до 1,5 и приближаются к стехиометрическому коэффициенту при водороде равному 3 для водородообразующей реакции (12).

Для дальнейшего анализа влияния отношения H₂O/C в исходных смесях на основные параметры извлечения высокочистого водорода в МК-устройстве использовали концентрацию общего водорода в продуктах конверсии, которая складывается из суммы концентраций молекулярного (свободного) и связанного (CH₄) водорода с учетом того, что из 1 моля CH₄ по реакции (11) образуется 4 моля H₂.



ISSN 2410-9908

Таблица 12

№ исх. смеси	<i>X</i> H ₂ ,общ., моль. доли	$Q_P, M^3/4$	$F_{\rm pacч.},{ m m}^2$	$J_{cp.}, M^{3}H_{2}/(M^{2}\cdot \Psi)$	$q_{ u}, \ { m m}^3{ m H}_2/~{ m m}^3{ m cырь}$ я	<i>q_m</i> , мольН ₂ / моль у.в.					
Метан											
1	0,8852	92,9	8,67	10,7	0,929	3,72					
2	0,9314	97,5	9,58	10,2	0,975	3,71					
3	0,9826	102,2	10,53	9,7	1,022	3,68					
4	1,0402	106,7	11,47	9,3	1,07	3,64					
Метанол											
5	0,5987	67,7	7,38	9,17	0,677	2,71					
6	0,6728	77,8	8,74	8,9	0,778	2,72					
7	0,7685	90,6	10,45	8,66	0,906	2,72					
8	0,8985	106,3	13,72	7,74	1,06	2,65					

Основные расчетные показатели получения высокочистого водорода в МК-системе из смесей углеводородов с парами воды

Зависимости объемного выхода водорода q_v (кривые 1 и 2) и концентрации общего водорода $XH_{2, oбщ.}$ (кривые 3 и 4) на выходе из ВТК от отношении $m = H_2O/C$ для исходных смесей соответственно 1–4 и 5–8 представлены на рис. 16, где четко видна корреляция зависимостей q_v –H₂O/C и $XH_{2, oбщ.}$ – H₂O/C для исследованных двух типов исходных смесей метана и метанола с парами воды.



Рис. 16. Зависимости объемного выхода водорода $q_V (1 \text{ и } 2)$ и концентрации общего водорода $XH_{2,oбщ.} (3 \text{ и } 4)$ от отношении $m = H_2O/C$ в исходных смесях: $1 \text{ и } 3 - CH_4 - mH_2O$; $2 \text{ и } 4 - CH_3OH - mH_2O$

Результаты проведенного анализа показали, что снижение отношения H₂O/C в исходных смесях можно рассматривать как дополнительный способ интенсификации процесса получения высокочистого водорода в перспективных мембранно-каталитических устройствах при прочих равных технологических условиях и конструктивных параметрах. Однако при выборе нижней границы отношения H₂O/C в исходных смесях необходимо строго контролировать ограничивающий фактор, связанный с углеродоотложением.

6. Заключение

Методом математического моделирования проведен анализ влияния основных технологических факторов на эффективность и экономичность получения высокочистого водорода из углеводородного сырья в мембранно-каталитических устройствах.

1. Установлено, что рабочая температура и давления по обе стороны от мембраны оказывают существенное влияние на эффективность получения высокочистого водорода из углеводородного сырья в мембранно-каталитических устройствах двух основных типов отличающихся способом отвода водорода-продукта. На основании расчетных данных представлены простые графические диаграммы для выбора оптимальных исходных параметров – температуры и давлений по обе стороны от мембраны. С помощью этих диаграмм проведена количественная оценка эффективности получения высокочистого водорода для известных из литературы результатов испытаний мембранно-каталитических устройств. В качестве критерия оценки эффективности использован удельный показатель объемного выхода водорода, независящий от производительности мембранно-каталитического устройства.

2. На основании проведенного анализа выявлено, что расход исходного сырья при неизменных остальных технологических параметрах и фиксированной площади мембраны существенно влияет на показатели извлечения высокочистого водорода в мембраннокаталитическом устройстве. Производительность по высокочистому водороду и объемный выход водорода растут при увеличении расхода исходного сырья в достаточно широких пределах, но эффективность и экономичность извлечения высокочистого водорода, связанные с неполным извлечением водорода при фиксированной площади мембраны, заметно снижаются. Для определения границы перехода действующего мембранно-каталитического устройства в режим неэффективного и неэкономичного режима извлечения высокочистого водорода и по концентрации молекулярного водорода в сбросном газе при ступенчатом изменении расхода исходной сырьевой смеси.

3. На примере предельных углеводородов и спиртов с одинаковым числом атомов углерода от 1 до 4 показал возможности использования математического моделирования для оценки влияния как вида, так и атомного состава исходного углеводорода на основные параметры мембранно-каталитического устройства получении высокочистого водорода при стандартном отношении $H_2O/C = 3$. Установлено, что для предельных углеводородов максимальная эффективность достигается для чистого метана. С увеличением числа углеродных атомов в предельном углеводороде эффективность извлечения водорода снижается, что связано с уменьшением концентрации общего водорода на входе в мембранную часть мембранно-каталитического устройства. При равных исходных технологических условиях и конструктивных параметрах эффективность получения высокочистого водорода для исследованных спиртов ниже, чем для предельных углеводородов. С увеличением числа углеродных атомов в спиртах эффективность получения высокочистого водорода для исследованных спиртов ниже, чем для предельных углеводородов.

4. На примере метана и метанола показано, что снижение отношения H₂O/C в исходных сырьевых смесях можно рассматривать как дополнительный способ интенсификации процесса получения высокочистого водорода в перспективных мембранно-каталитических устройствах при прочих равных технологических условиях и конструктивных параметрах. При выборе нижней границы отношения H₂O/C в исходных смесях необходимо строго контролировать ограничивающий фактор, связанный с углеродоотложением.

Приведенные результаты анализа влияния основных технологических факторов на эффективность и экономичность получения высокочистого водорода из углеводородного сырья могут быть полезны при разработке и выборе оптимальных режимов эксплуатации перспективных мембранно-каталитических устройств.



Литература

1. Murav'ev L. L., Vandyshev A. B., Makarov V. M. Modeling of membrane extraction of hydrogen from the products of steam conversion of hydrocarbons // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 1999. – Vol. 33, iss. 3. – P. 258–263.

2. Vandyshev A. B. Analyzing the parameters of membrane catalytic systems for extraction of highly pure hydrogen from hydrocarbon feedstock with the application of mathematical modeling. – 2016. – Iss. 4. – P. 6–46. – DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.006-045. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_4_2016_Vandyshev_A.B._006_045.pdf

3. Vandyshev A. B., Kulikov V. A. Analysis of the Calculated Parameters of a Model Membrane-Catalytic Converter for the Production of High-Purity Hydrogen from Methane // Chem Petrol Eng. – 2018. – Vol. 54. – P. 31–37. – DOI: 10.1007/s10556-018-0434-y.

4. Vandyshev A. B., Kulikov V. A. Evaluation of Design Parameters for a 32-Module Disk-Type Membrane-Catalytic Reactor for Producing High-Purity Hydrogen from Diesel Fuel. – Chem Petrol Eng. – 2020. – Vol. 55. – P. 815–820. – DOI: 10.1007/s10556-020-00698-8.

5. Vandyshev A. B. A Systematic Analysis of the Parameters of Disk-Type Membrane-Catalytic Devices for Producing High-Purity Hydrogen from Methane and Diesel Fuel // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 4. – P. 6–27. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.4.06-27. – URL: http://dream-journal.org/issues/2020-4/2020-4_284.html

6. Vandyshev A. B., Kulikov V. A. Analysis of Parameters for Producing High-Purity Hydrogen from Natural Gas in a Tubular Type Membrane-Catalytic Module. – Chem Petrol Eng. – 2021. – Vol. 56. – P. 715–720. – DOI: 10.1007/s10556-021-00833-z.

7. Vandyshev A. B., Kulikov V. A. Assessment of the Effects of Temperature and Pressure on the Efficiency of High-Purity Hydrogen Production from Hydrocarbon Feedstocks in Membrane-Catalytic Devices // Chem Petrol Eng. – 2021. – Vol. 56. – P. 799–808. – DOI: 10.1007/s10556-021-00845-9.

8. Development of membrane reformer system for highly efficient hydrogen production from natural gas / Y. Shirasaki, T. Tsuneki, Y. Ota, I. Yasuda, S. Tachibana, H. Nakajima, K. Kobayashi // International Journal of Hydrogen Energy. – 2009. – Vol. 34. – P. 4482–4487. – DOI: 10.1016/J.IJHYDENE.2008.08.056.

9. Membrane reformer module with Ni-foam catalyst for pure hydrogen production from methane: Experimental demonstration and modeling / A. B. Shigarov, V. A. Kirillov, Y. I. Amosov, A. S. Brayko, V. B. Avakov, I. K. Landgraf, A. R. Urusov, S. A. Jivulko, V. V. Izmaylovich // Int. J. Hydrogen Energy. – 2017. – Vol. 42, No. 10. – P. 6713–6726. – DOI: 10.1016/j.ijhydene.2016.12.057.

10. Methane steam reforming operation and thermal stability of new porous metal supported tubular palladium composite membranes / B. Dittmar, A. Behrens, N. Schödel, M. Rüttinger, Th. Franco, G. Straczewski, R. Dittmeyer // Int. J. Hydrogen Energy. – 2013. – Vol. 38. – P. 8759–8771. – DOI: 10.1016/j.ijhydene.2013.05.030.

11. Гольцов В. А. Водород в металлах // Атомно-водородная энергетика и технология : сборник статей. – М. : Атомиздат, 1978. – Вып. 1. – С. 193–230.

12. Development of a Membrane-on-Catalyst Hydrogen Production Module for Steam Reforming of City Gas / Y. Shirasaki, T. Sato, N. Iton, T. Tsuneki, T. Nishii, H. Kurokawa, I. Yasuda, Shimamori T., Y. Takagi, H. Hikosaka, H. Tanaka // Chemical Reaction Engineering (Jap.). – 2017. – Vol. 43, iss. 5. – P. 336–341. – DOI: 10.1252/KAKORONBUNSHU.43.336.

13. Vandyshev A. B., Kulikov V. A. Hydrogen Permeability of Palladium Membranes Made of Alloy V-1 in Laboratory Investigations and Membrane Devices // Chem Petrol Eng. – 2015. – Vol. 51. – P. 396–401. – DOI: 10.1007/s10556-015-0058-415.

14. Вандышев А. Б., Макаров В. М., Усова Т. Б. Анализ условий извлечения водорода из многокомпонентных водородосодержащих газовых смесей с помощью тройных диаграмм



ISSN 2410-9908

С-Н-О / Ин-т машиноведения УрО РАН. – Екатеринбург, 1998. – 18 с. – Деп. в ВИНИТИ 09.12.98. – № 3610–В98.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

15. Vandyshev A. B., Kulikov V. A. Evaluation of the efficiency of preparing especially pure hydrogen from methanol and ethanol in membrane equipment, combined with a methane or carbon monoxide conversion catalyst // Chem Petrol Eng. – 2011. – Vol. 47. – P. 536–544. – DOI: 10.1007/s10556-011-9506-y.


ISSN 2410-9908

Received: 24.04.2022 Revised: 22.07.2022 Accepted: 26.08.2022 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.037-049

COMPREHENSIVE EVALUATION OF FATIGUE DAMAGE ACCUMULATION AND FAILURE OF SPECIMENS WITH OPERATIONAL STRESS CONCENTRATORS

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

E. M. Strungar^{a)*}, O. A. Staroverov^{b)}, E. M. Lynegova^{c)}

Perm National Research Polytechnic University, 29 Komsomolskiy Ave., Perm, 614990, Russian Federation

a) b https://orcid.org/0000-0002-2246-8638 cem.spaskova@mail.ru;
 b) b https://orcid.org/0000-0001-6095-0962 cem_staroverov@mail.ru;
 c) b https://orcid.org/0000-0001-8829-3546 cem.zubova@mail.ru

^{*}Corresponding author. E-mail: cem.spaskova@mail.ru Address for correspondence: Komsomolsky prospekt, 29, Perm, 614990, Russian Federation Tel.: +7(342)219 87 34

The paper presents the results of studying the mechanical behavior of laminated carbonfiber-reinforced plastic under complex low-velocity impact three-point bending followed by cyclic tension. An integrated approach to studying damage accumulation patterns is implemented with the use of state-of-the-art testing and diagnostic equipment. The residual fatigue life of the composite is related to the intensity of preliminary impact bending. The fields of temperature distribution in the active zone of the samples during the tests are shown. Data on damage accumulation obtained by recording acoustic emission signals are presented. Relation of the change in the recorded acoustic response signals to infrared thermal scanning data has been detected, which is supported by the results of an experimental study. The use of additional equipment for infrared thermal scanning and recording of acoustic emission signals gives a complete picture of damage accumulation and failure in composite materials, with a good agreement with experimental data.

Keywords: experimental mechanics, low-velocity impact, cyclic bending, fatigue life, acoustic emission, infrared thermal scanning.

Acknowledgment

The experimental study was performed in the Perm National Research Polytechnic University and financially supported by a grant of the President of the Russian Federation for the state support of young Russian scientists (grant No. MK-1545.2022.4).

The experimental investigations on estimating fatigue damage accumulation were made under the state assignment from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (No. FSNM-2020-0027).

References

1. Bogenfeld R., Schmiedel P., Kuruvadi N., Wille T., & Kreikemeier J. An experimental study of the damage growth in composite laminates under tension-fatigue after impact. *Composites Science and Technology*, 2020, 108082. DOI: 10.1016/j.compscitech.2020.10.

2. Kang K.W., Kim J.K., & Kim H.S. Fatigue Behavior of Impacted Plain-Weave Glass/Epoxy Composites under Tensile Fatigue Loading. *Key Engineering Materials*, 2005, vols. 297–300, pp. 1291–1296. DOI: 10.4028/www.scientific.net/kem.297-300.1291.



3. Feng Y., He Y., Tan X., An T., & Zheng J. Investigation on impact damage evolution under fatigue load and shear-after-impact-fatigue (SAIF) behaviors of stiffened composite panels. *International Journal of Fatigue*, 2017, vol. 100 (1), pp. 308–321. DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2017.03.046.

4. Cantwell W.J., Morton J. The impact resistance of composite materials – a review. *Composites*, 1991, vol. 22 (5), pp. 347–362. DOI: 10.1016/0010-4361(91)90549-V.

5. Staroverov O.A., Strungar E.M., Wildemann V.E. Evaluation of the survivability of CFRP honeycomb-cored panels in compression after impact tests. *Frattura ed Integrità Strutturale (Frac-ture and Structural Integrity)*, 2021, vol. 15 (56), pp. 115. DOI: 10.3221/IGF-ESIS.56.01.

6. Tai N., Yip M., & Lin J. Effects of low-energy impact on the fatigue behavior of carbon/epoxy composites. *Composites Science and Technology*, 1998, vol. 58 (1), pp. 1–8. DOI: 10.1016/s0266-3538(97)00075-4.

7. Staroverov O.A., Babushkin A.V., Gorbunov S.M. Evaluation of the damage degree to carbonfiber composite materials under impact. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, No. 1, pp. 161–172. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.14. (In Russian).

8. Suh S.S., Han N.L., Yang J.M., Hahn H.T. Compression behavior of stitched stiffened panel with a clearly visible stiffener impact damage. *Composite Structures*, 2003, vol. 62, No. 2, pp. 213–221. DOI: 10.1016/S0263-8223(03)00116-8.

9. Tretyakova T.V., Dushko A.N., Strungar E.M., Zubova E.M., Lobanov D.S. Comprehensive analysis of mechanical behavior and frac- ture processes of specimens of three-dimensional reinforced carbon fiber in tensile tests. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2019, No. 1, pp. 173–183. DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.15. (In Russian).

10. Tsigkourakos G., Silberschmidt Vadim V., Ashcroft Ian A. Damage analysis of CFRP under impact fatigue. *Shock and Vibration*, 2012, vol. 19, pp. 573–584. DOI 10.3233/SAV-2011-0651.

11. Lobanov D.S., Wildemann V.E., Spaskova E.M., Chikhachev A.I. Experimental investigation of the defects influence on the composites sandwich panels strength with use digital image correlation and infrared thermography methods. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2015, No. 4. pp. 159–170. DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.10. (In Russian).

12. Staroverov O., Tretyakov M., Wildemann V. Tests features of composite materials under complex mechanical loads. *IOP Conference. Series: Materials Science and Engineering*, 2020, vol. 918. DOI 10.1088/1757-899X/918/1/012115.



Подана в журнал: 24.04.2022 УДК 620 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.037-049

КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ПРОЦЕССОВ УСТАЛОСТНОГО НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕНИЙ И РАЗРУШЕНИЯ ОБРАЗЦОВ С КОНЦЕНТРАТОРАМИ НАПРЯЖЕНИЙ ЭКСПЛУАТАЦИОННОГО ХАРАКТЕРА

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

Е. М. Струнгарь^{а)}*, О. А. Староверов⁶⁾, Е. М. Лунегова^{в)}

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, д. 29, Комсомольский проспект, г. Пермь, Пермский край, 614990, Российская Федерация

^{a)} b https://orcid.org/0000-0002-2246-8638 🖾 cem.spaskova@mail.ru;

⁶⁾ D https://orcid.org/0000-0001-6095-0962 🗟 cem_staroverov@mail.ru;

^{B)} D https://orcid.org/0000-0001-8829-3546 🖾 cem.zubova@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: cem.spaskova@mail.ru Адрес для переписки: пр. Комсомольский, д. 29, г. Пермь, 614990, Пермский край, Российская Федерация Тел.: +7(342)219–87–34

В работе представлены результаты исследования механического поведения слоистоволокнистого углепластика при комплексном низкоскоростном ударном трехточечном изгибе и последующем циклическом растяжении. Реализован комплексный подход при изучении закономерностей процессов накопления повреждений с использованием современного испытательного и диагностического оборудования. Установлена зависимость остаточной усталостной долговечности исследуемого композита от интенсивности предварительного ударного изгиба. Показаны поля распределения температур в рабочей зоне образцов в ходе испытаний. Приведены данные о процессах накопления повреждений, полученные при регистрации сигналов акустической эмиссии. Выявлена связь изменения регистрируемых сигналов акустического отклика и данных инфракрасного термосканирования, подкрепленная результатами экспериментального исследования. Использование дополнительной аппаратуры инфракрасного термосканирования и регистрации сигналов акустической эмиссии дает полноту картины накопления повреждений и разрушения композиционных материалов при хорошей корреляции с экспериментальными данными.

Ключевые слова: экспериментальная механика, низкоскоростной удар, циклический изгиб, усталостная долговечность, акустическая эмиссия, инфракрасное термосканирование.

1. Введение

Композиты замещают традиционные металлы и сплавы во многих отраслях, включая авиационную, космическую, строительную, автомобильную, нефтехимическую и т. п., за счет меньшего удельного веса при относительно равных физико-механических характеристиках, что позволяет внедрять их в ответственные высоконагруженные конструкции и детали. Данные об изменении остаточных механических характеристик, допустимых повреждениях позволяют увеличивать ресурс эксплуатации, живучесть и безопасность разрушения конструкций из композитов. Одними из самых опасных воздействий, которые могут возникать при эксплуатации, являются низкоскоростные удары, ориентированные в перпендикулярном направлении относительно ориентации армирующих слоев. Данные виды нагрузок способствуют возникновению межслоевых трещин в структуре материала, что впоследствии может привести к расслоению и снижению эксплуатационных характеристик конструкций из композитов [1–4]. Основными методами исследований при таких видах воздействий являются испытания на локальный удар падающим грузом с полусферическим наконечником и сжа-

тие после удара с оценкой остаточной прочности композиционных ламинатов [5–9]. При этом зафиксировать наличие новых дефектов при визуальном осмотре без специализированной аппаратуры затруднительно. В работах, которые ориентированы на материалы, используемые в гражданской авиации, к таким видам воздействий относят крупный град, падающий на наружную обшивку фюзеляжа, лед и камни на полосе, попадающие в двигатель самолета на взлете, случайно брошенный инструмент при монтаже звукопоглощающих панелей.

В литературе отмечается перспективность комплексного подхода с использованием обширного спектра испытательного и диагностического оборудования при изучении механического поведения композитов [10]. Например, в работе [11] проведен анализ возможностей и ограничений рентгеновского микро-КТ-сканирования для оценки ударных повреждений, вызванных циклическими испытаниями. В работе [12] объектами исследования являются конструктивно подобные элементы – образцы звукопоглощающих панелей с искусственно нанесенным дефектом типа сквозного пробоя – после локального ремонта. Для контроля внутренней геометрии образца и оценки возможных дефектов осуществлялась тепловая дефектоскопия с помощью инфракрасной тепловизионной системы.

Использование дополнительной аппаратуры инфракрасного термосканирования, регистрации сигналов акустической эмиссии, контроля полей перемещений и деформаций, подкрепленное результатами микроструктурного анализа, дают полноту картины накопления повреждений и разрушения композиционных материалов при хорошей корреляции с экспериментальными данными.

Главной целью данной работы является получение новых опытных данных, отражающих закономерности изменения остаточной усталостной долговечности углепластиков после предварительных ударов различной интенсивности, а также оценка процессов усталостного накопления повреждений и разрушения поврежденных образцов с использованием результатов инфракрасного термосканирования, регистрации сигналов акустической эмиссии и микроструктурного анализа картин изломов.

2. Материал и методика

Объектом исследования являлись углепластиковые композиты в форме прямоугольных полос, изготовленных на основе препрега ВКУ-39 и связующего ВСЭ 1212 со схемой армирования [0°/90°]_n методом автоклавного формования.

Для реализации режимов предварительного удара различной интенсивности использовался электродинамический копер Instron CEAS 9350 с диапазоном потенциальной энергии воздействия от 0,7 до 1800 Дж. Циклические испытания проведены на сервогидравлической испытательной системе Instron 8850, которая позволяла нагружать образцы с растягивающими усилиями до 100 кН и частотой до 100 Гц. Номинальные значения предела прочности определялись из испытаний на квазистатическое растяжение с использованием электромеханической системы Instron 5882.

Также в данной работе использованы системы регистрации сигналов акустической эмиссии AMSY-6 и инфракрасного термосканирования Flir SC 7700 М.

Запись сигналов осуществлялась с помощью многоканальной системы AMSY-6 фирмы Vallen GmbH (Германия) от начала испытания до полного разрушения образца. Использовались широкополосные пьезоэлектрические датчики AE105A (частотный диапазон 450– 1150 кГц) и усилитель (коэффициент усиления 34 дБ). Датчики крепились на образцы с помощью высоковакуумной силиконовой смазки Wacker Silicon и резинок. Частота дискретизации данных 10 МГц, пороговое значение при регистрации сигналов АЭ составляло 40 дБ.

Метод инфракрасной термографии широко применяется при проведении механических исследований с целью получения детальной информации о закономерностях накопления энергии в процессе деформирования материалов.





Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

http://dream-journal.org

В процессе циклического растяжения для контроля изменения температуры на поверхности рабочей части образцов использовалась инфракрасная тепловизионная система FLIR SC7700M. Тепловизор оснащен детектором типа «кадмий–ртуть–теллур», обладает разрешением 640×512 пикселей, скоростью регистрации 115 Гц (при полном разрешении) и чувствительностью <0,025 °C. Для полимерных композиционных материалов крайне необходимо отслеживать температуру образцов в процессе циклического нагружения, так как внутренний саморазогрев образцов существенно сказывается на значении усталостной долговечности. Синхронизация акустической и тепловизионной систем с контроллером испытательной машины в процессе испытания осуществлялась посредством блока АЦП (NI USB-6251). На рис. 1 представлена фотография испытательного и диагностического оборудования, используемого в исследовании.





б

Рис. 1. Фотографии диагностических систем и испытательной машины (*a*) и образца, установленного в захваты испытательной системы, с датчиком регистрации сигналов акустической эмиссии (б)

Исследование проведено при реализации предварительного поперечного удара падающим грузом по схеме трехточечного изгиба и последующего циклического растяжения. Удары производились падающим грузом с наконечником конической формы, соизмеримым с шириной образца [13].







В соответствии с разработанной методикой определено значение временного сопротивления разрыву (σ_B) исследуемого углепластика из испытаний на квазистатическое растя-

ISSN 2410-9908

жение. Номинальное значение усталостной долговечности (N_{max}) получено из испытаний при параметрах с максимальным значением напряжений в цикле $\sigma_{\text{max}} = 0,75 \cdot \sigma_{\text{B}}$, коэффициентом асимметрии R = 0,1 и частотой v = 20 Гц. При установочных испытаниях частота и амплитуда нагружения подбирались таким образом, чтобы разогрев образца не превышал 20 °C относительно температуры начала испытания. Из опытов на ударный изгиб определена потенциальная энергия (E_{max}), при которой происходило разрушение образцов. В дальнейшем испытания на предварительный удар по схеме трехточечного изгиба (рис. 2) проводились в диапазоне от 0,3 до 0,9 от энергии разрушения ($e' = E_{yg}/E_{\text{max}}$).

Однократные удары производились по всей ширине образцов. На каждом уровне воздействия, включая испытания на ударный изгиб и циклическое растяжение до разрушения, было испытано по 3 образца. Всего было испытано 24 образца.

3. Результаты и обсуждение

В соответствии с предложенной методикой исследования были проведены испытания на квазистатическое и циклическое растяжение, а также ударный изгиб для определения номинальных значений механических характеристик исследуемого углепластикового композита, которые были использованы при установке параметров предварительного воздействия.

В результате испытаний на трехточечный удар падающим грузом и последующее циклическое растяжение получены опытные зависимости остаточной усталостной долговечности от энергии предварительного ударного изгиба, представленные в табл. 1.

Таблица 1

Энергия удара Е _{уд} , Дж	Усталостная долговечность N _{max} , цикл						
	Creary as V	Среднеквадратическое	Коэффициент				
	Среднее х	отклонение S_{n-1}	вариации CV				
0	1156336	31849	2,75				
1,00	1104153	24722	2,24				
1,50	833894	51730	6,20				
2,00	475088	87876	18,50				
2,25	80304	61486	76,57				
2,50	14615	13748	94,07				
2,75	5916	9677	163,58				

Результаты испытаний



Рис. 3. Фотография углепластикового образца после удара падающим грузом с энергией e' = 0,33





ISSN 2410-9908

При анализе данных можно отметить, что остаточная долговечность исследуемых углепластиковых образцов значительно, более чем на 10 % от номинального значения, снижалась при ударах свыше 1 Дж, что соответствовало e' = 0,33. При ударах с энергиями e' = 0,33 вблизи поверхности, по которой наносился удар, образовывались трещины от контакта с ударником, при этом на лицевой и тыльной сторонах образцов трещин, вмятин, сколов и других видов повреждений, которые можно обнаружить при визуальном осмотре, не наблюдалось (рис. 3).

Воздействие с энергиями удара в диапазоне от e' = 0,5 до e' = 0,66 приводили к появлению трещин вблизи тыльной стороны по отношению к месту удара. При увеличении энергии удара образовывались дефекты в виде расслоений (рис. 4).



Рис. 4. Фотография углепластикового образца после удара падающим грузом с энергией e' = 0.5

В дальнейшем падение груза с интенсивностью в диапазоне от e' = 0,75 до e' = 0,9 способствовали смешанным типам повреждений в виде расслоений и трещин в поперечном направлении с локальным разрушением волокон (рис. 5).



Рис. 5. Фотографии углепластиковых образцов после удара падающим грузом с энергией e' = 0,75 (*a*) и e' = 0,9 (*б*)

Анализ изломов углепластиковых образцов при усталостном разрушении без предварительного ударного изгиба позволяет сделать вывод, что механизмы накопления повреждений и разрушения были без локализации по всей рабочей зоне образцов (рис. 6 *a*). Разрушение образцов после удара и последующего циклического воздействия происходило с поперечным разрывом армирующих волокон и межслоевыми трещинами (рис. 6 δ).



Рис. 6. Фотографии углепластиковых образцов после усталостного разрушения без предварительного удара (*a*) и с удром *e*' = 0,9 (*б*)

С целью оценки интенсивности процессов накопления повреждений рассмотрены зависимости изменения максимальной температуры ΔT от времени циклического воздействия. Значение ΔT определялось как разница между текущим значением максимальной температуры образца в процессе циклического нагружения и начальным.



Рис. 7. Диаграмма зависимости изменения относительного значения максимальной температуры образца от продолжительности циклического растяжения (*a*) и распределение температурных полей в рабочей зоне образца (*б*)

В качестве информативного параметра сигналов АЭ использовался энергетический параметр (E, eu), где 1 eu = 10^{-14} B²c. Путем суммирования данного параметра были получены значения кумулятивной энергии (E_{cum}), отражающие степень накопления дефектов в материале под действием нагрузки в течение всего испытания.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022



Для удобства анализа зависимость изменения максимальной температуры ΔT , кумулятивная энергия $E_{\rm cum}$ и продолжительность циклического растяжения *n* были представлены в относительных единицах: $\Delta T'$, $E'_{\rm cum}$, n'.

Полученные опытные данные приведены в виде зависимостей изменения относительного значения максимальной температуры образца $\Delta T'$ от продолжительности циклического растяжения (рис. 7 *a*). Изображение распределения температурных полей в рабочей зоне образца приведено на рисунке 7 *б*.

Анализ полученных данных позволяет сделать вывод, что кривая, описывающая изменение значения максимальной температуры, имеет монотонный характер. В процессе циклического нагружения на поверхности образца наблюдалось равномерное распределение полей температур вплоть до появления локализованного разогрева, предшествующего усталостному разрушению (рис. 7 a).

При ударах с энергиями в диапазоне от e' = 0,50 до e' = 0,66 процессы усталостного накопления повреждений происходили в несколько стадий (рис. 8 и 9), что подтверждалось качественным совпадением результатов. В данном случае наблюдается, что рост кумулятивной энергии сигналов АЭ начинается тогда, когда образец выдержал 40 % от предельного количества циклов нагружения. Активный рост энергии регистрируется до момента, когда образец простоял приблизительно 65 % от предельного количества циклов нагружения. Затем рост кумулятивной энергии уменьшается, о чем говорит изменение наклона кривой $E'_{cum} \sim n'$ при 0,65 < n' < 1. Вид кривой кумулятивной энергии качественно соотносится с видом кривой зависимости изменения относительного значения максимальной температуры образца $\Delta T'$ от продолжительности циклического растяжения.



Рис. 8. Совмещенная диаграмма зависимости изменения относительного значения максимальной температуры образца и изменения кумулятивной энергии сигналов АЭ от продолжительности циклического растяжения с предварительным ударом *e*' = 0,50







Рис. 9. Совмещенная диаграмма зависимости изменения относительного значения максимальной температуры образца и изменения кумулятивной энергии сигналов АЭ от продолжительности циклического растяжения с предварительным ударом *e*' = 0,66

Предварительные удары с энергиями в диапазоне от e' = 0,75 до e' = 0,9 (рис. 10 и 11) приводили к значительному разогреву на стадии первых циклов. Локализованное повышение температуры наблюдалось в зоне удара. Для данного образца (рис. 10) можно отметить, что интенсивный рост кумулятивной энергии сигналов АЭ, в отличие от образца, подвергшегося предварительному удару e' = 0,66, начинается с самого начала циклического нагружения. Активный рост энергии регистрируется до момента, когда образец простоял приблизительно 40 % от предельного количества циклов нагружения. Затем рост кумулятивной энергии уменьшается, о чем говорит изменение наклона кривой $E'_{cum} \sim n'$ при 0,4 < n' < 1. Вид кривой кумулятивной энергии качественно соотносится с видом кривой зависимости изменения относительного значения максимальной температуры образца $\Delta T'$ от продолжительности циклического растяжения.

В результате сопоставления данных эксперимента, термографии и сигналов акустической эмиссии выявлено, что изменение характера усталостного накопления повреждений и последующего разрушения связано с дефектами, образованными после предварительного удара. Удары с энергиями, превышающими порог ударной чувствительности, способствовали возникновению межслоевых трещин в структуре материала, что, в свою очередь, приводило к ступенчатому характеру накопления повреждений.



ISSN 2410-9908



Рис. 10. Совмещенная диаграмма зависимости изменения относительного значения максимальной температуры образца и изменения кумулятивной энергии сигналов АЭ от продолжительности циклического растяжения с предварительным ударом *e*' = 0,75



Рис. 11. Совмещенная диаграмма зависимости изменения относительного значения максимальной температуры образца и изменения кумулятивной энергии сигналов АЭ от продолжительности циклического растяжения с предварительным ударом *e*' = 0,90



ISSN 2410-9908

4. Заключение

В результате получены экспериментальные зависимости влияния различной интенсивности ударного изгиба на остаточную усталостную долговечность углепластиковых образцов. Установлено, что изменение характера усталостного накопления повреждений и последующего разрушения связано с дефектами, образованными после предварительного удара. Предварительное ударное воздействие способствовало возникновению межслоевых трещин в структуре материала, что, в свою очередь, приводило к ступенчатому характеру накопления повреждений. При энергиях удара, близких к энергиям разрушения, в структуре материала наблюдался локальный разрыв волокон, характер усталостного накопления повреждений был интенсивным с самого начала, что подтверждается распределением полей температур в виде локализованного разогрева и видом кривых, описывающих изменение относительного значения максимальной температуры и изменение кумулятивной энергии сигналов АЭ. В работе показана корреляция опытных данных по изменению механических характеристик с результатами обработки данных из систем регистрации сигналов акустической эмиссии и инфракрасного термосканирования, подкрепленная микроструктурным анализом изломов образцов. С помощью инфракрасной тепловизионной системы зарегистрированы внутренняя структура, процессы развития дефектов, а также распределение температур на поверхности испытываемого образца. В результате комплексного анализа механического поведения углепластиковых образцов с использованием дополнительных средств регистрации при циклических испытаниях можно сделать вывод о высокой эффективности комбинированного использования испытательного и диагностирующего оборудования.

Благодарность

Результаты экспериментального исследования выполнены в Пермском национальном исследовательском политехническом университете при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых (Грант МК-1545.2022.4).

Экспериментальные исследования в рамках оценки процессов усталостного накопления повреждений проводились в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (№ FSNM-2020-0027).

Литература

1. An experimental study of the damage growth in composite laminates under tension-fatigue after impact / R. Bogenfeld, P. Schmiedel, N. Kuruvadi, T. Wille, & J. Kreikemeier // Composites Science and Technology. – 2020. – 108082. – DOI: 10.1016/j.compscitech.2020.10.

2. Kang K. W., Kim J. K., & Kim H. S. Fatigue Behavior of Impacted Plain-Weave Glass/Epoxy Composites under Tensile Fatigue Loading // Key Engineering Materials. – 2005. – Vols. 297–300. – P. 1291–1296. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/kem.297-300.1291.

3. Investigation on impact damage evolution under fatigue load and shear-after-impact-fatigue (SAIF) behaviors of stiffened composite panels / Y. Feng, Y. He, X. Tan, T. An, & J. Zheng // International Journal of Fatigue. – 2017. – Vol. 100 (1). – P. 308–321. – DOI: 10.1016/j.ijfatigue.2017.03.

4. Cantwell W. J., Morton J. The impact resistance of composite materials - a review // Composites. - 1991. - Vol. 22 (5). - P. 347-362. - DOI: 10.1016/0010-4361(91)90549-V.

5. Staroverov O. A., Strungar E. M., Wildemann V. E. Evaluation of the survivability of CFRP honeycomb-cored panels in compression after impact tests // Frattura ed Integrità Strutturale. – 2021. – Vol. 15 (56). – P. 1–15. – DOI: 10.3221/IGF-ESIS.56.01.

6. Tai N., Yip M., & Lin J. Effects of low-energy impact on the fatigue behavior of carbon/epoxy composites // Composites Science and Technology. – 1998. – Vol. 58 (1). – P. 1–8. – DOI: 10.1016/s0266-3538(97)00075-4.



7. Староверов О. А., Бабушкин А. В., Горбунов С. М. Оценка степени поврежденности углепластиковых композиционных материалов при ударном воздействии // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 1. – С. 163–174. – DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.14.

8. Compression behavior of stitched stiffened panel with a clearly visible stiffener impact damage / S. S. Suh, N. L. Han, J. M. Yang, H. T. Hahn // Composite Structures. – 2003. – Vol. 62, No. 2. – P. 213–221. – DOI: 10.1016/S0263-8223(03)00116-8.

9. Комплексный анализ механического поведения и процессов разрушения образцов пространственно-армированного углепластика в испытаниях на растяжение / Т. В. Третьякова, А. Н. Душко, Е. М. Струнгарь, Е. М. Зубова, Д. С. Лобанов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2019. – № 1. – С. 173–183. – DOI: 10.15593/perm.mech/2019.1.15.

10. Tsigkourakos G., Silberschmidt V. V., Ashcroft I. A. Damage analysis of CFRP under impact fatigue // Shock and Vibration. – 2012. – Vol. 19. – P. 573–584. – DOI 10.3233/SAV-2011-0651.

11. Experimental investigation of the defect influence on the composites sandwich panels strength with use digital image correlation and infrared thermography methods / D. S. Lobanov, V. E. Wildemann, E. M. Spaskova, A. I. Chikhachev // PNRPU Mechanics Bulletin. – 2015. – No. 4. – P. 159–170. – DOI: 10.15593/perm.mech/2015.4.10.

12. Staroverov O., Tretyakov M., Wildemann V. Tests features of composite materials under complex mechanical loads // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2020. – Vol. 918. – DOI 10.1088/1757-899X/918/1/012115.



ISSN 2410-9908

Received: 28.04.2022 Revised: 20.07.2022 Accepted: 26.08.2022 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.050-060

EXPERIMENTAL FACILITY FOR STUDYING THE PHYSICAL PROPERTIES OF MATERIALS IN A PLANE STRESS STATE

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

A. N. Mushnikov^{1, a)*}, S. M. Zadvorkin^{1, b)}, E. N. Perunov^{1, c)}, S. V. Vyskrebentsev², R. F. Izmailov³, D. I. Vichuzhanin^{1, d)}, N. N. Soboleva^{1, e)}, and A. S. Igumnov^{4, f)}

¹Institute of Engineering Science, UB RAS,

 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
 ²N. A. Semikhatov Scientific and Production Association of Automatics JSC, 145 Mamina-Sibiryaka St., Ekaterinburg, 620075, Russian Federation
 ³Ural Electromechanical Plant JSC, 9 Studencheskaya St., Ekaterinburg, 620137, Russian Federation

⁴N. N. Krasovsky Institute of Mathematics and Mechanics UB RAS, 16 S. Kovalevskoy St., Ekaterinburg, 620990, Russian Federation

^{a)} https://orcid.org/0000-0001-7073-6476 mushnikov@imach.uran.ru;
^{b)} D https://orcid.org/0000-0002-7918-8207 Zadvorkin@imach.uran.ru;
^{c)} erunovmail@mail.ru;
^{d)} D https://orcid.org/0000-0002-6508-6859 🕺 mmm@imach.uran.ru;
e) D https://orcid.org/0000-0002-7598-2980 🖾 natashasoboleva@list.ru;
^{f)} D https://orcid.org/0000-0002-0907-9187 🛛 parallel@imm.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: mushnikov@imach.uran.ru Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russian Federation Tel.: +7 (343) 362 30 29

An original experimental facility for studying the physical properties of materials during elastic-plastic deformation along two axes has been created. The facility has no ferromagnetic parts in the working area, thus enabling us to make more accurate magnetic measurements. Biaxial deformation is simulated by the finite element method in order to optimize the geometry of the specimen and to determine the stress state in the central zone of the specimen. Test experiments on the effect of biaxial tension on the coercive force of the 12G2S are performed.

Keywords: biaxial deformation, plane stress state, nondestructive testing.

Acknowledgment

The work was performed under the state assignment on theme No. AAAA-A18-118020790148-1. The equipment of the Plastometriya shared research facilities center of the IES UB RAS was used to determine the initial properties of the specimen material. The Uran supercomputer of the IMM UB RAS was used in the simulation.

References

1. Schneider C.S., Richardson J.M. Biaxial magnetoelasticity in steels. *Journal of Applied Physics*, 1982, vol. 53, pp. 8136–8138. DOI: 10.1063/1.330341.

2. Sablik M.J., Jiles D.C. Modeling the Effects of Torsional Stress on Hysteretic Magnetization. *IEEE Transactions on Magnetics*, 1999, vol. 35, No. 1, part 2, pp. 498–504. DOI: 10.1109/20.737472.



3. Kulak S.M., Novikov V.F., Probotyuk V.V., Vatsenkov S.M., Fursov E.S. Magnetic testing of stressed state of hydrotested gas-separator wall. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2019, vol. 55, pp. 225–232. DOI: 10.1134/S1061830919030070.

4. Kulak S.M., Novikov V.F., Mitrofanov D.D. Evaluation of stresses in a presurized vessel by magnetoelastic demagnetization. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 6, pp. 6–14. DOI: 10.1088/1757-899X/154/1/012004. Available at: http://dream-journal.org/issues/2019-6/2019-6_272.html (accessed: 22.04.2022).

5. Kulak S.M., Novikov V.F., Baranov A.V. Control of mechanical stresses of high pressure container walls by magnetoelastic method. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng*, 2016, vol. 154, 012004. DOI: 10.1088/1757-899X/154/1/012004.

6. Zakharov V.A., Ul'yanov A.I., Gorkunov E.S. Regularities of the change in the coercive force under biaxial asymmetric deformation of steel 3. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2010, vol. 46. pp. 194–205. DOI: 10.1134/S1061830910030071.

7. Novikov V.F., Zakharov V.A., Ul'yanov A.I., Sorokina S.V., Kudryashov M.E. The influence of biaxial elastic deformation on the coercive force and local remanent magnetization of construction steels. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2010, vol. 46, pp. 520–526. DOI: 10.1134/S1061830910070065.

8. Zakharov V.A., Ul'yanov A.I. & Gorkunov E.S. Coercive force of ferromagnetic steels under the biaxial symmetrical tension of a material. *Russian Journal of Nondestructive Testing*, 2011, vol. 47, pp. 359–368. DOI: 10.1134/S1061830911060106.

9. Langman R. Magnetic properties of mild steel under conditions of biaxial stress. *IEEE Transactions on magnetics*, 1990, vol. 26, No. 4, pp. 1246–1251. DOI: 10.1109/20.54015.

10. Aginey R.V., Islamov R.R., Mamedova E.A. Determination of stress-strain state of the pressure pipeline section by the coercive force measurement results. *Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation*, 2019, vol. 9, No. 3, pp. 284–294. DOI: 10.28999/2541-9595-2019-9-3-284-294.

11. Berdnik Maria, Berdnik Aleksandr. Aspects of the coercimetery application to estimate parameters of the structure strain-stress state. *NDT WORLD*, 2017, vol. 20, No. 4, pp. 53–56. DOI: 10.12737/article_5a2fb89e6134d2.05260495.

12. Andronov I.N., Kucheryavyj V.I., Savich V.L., Borejko D.A. Coercytimetric analysis of the stress state of technological gas pipelines of a compressor shop on the example of a gas air cooling apparatus. *Inzhener-neftyanik*, 2019, No. 1, pp. 38–45 (In Russian).

13. Gorkunov E.S., Zadvorkin S.M., Mushnikov A.N., Smirnov S.V., Yakushenko E.I. Effect of mechanical stresses on the magnetic characteristics of pipe steel. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55 (3), pp. 530–538. DOI: 10.1134/S002189441403016X.

14. Pearson J., Squire P.T., Maylin M.G., Gore J.G. Biaxial stress effects on the magnetic properties of pure iron. *IEEE Transactions on magnetics*, 2000, vol. 36, No. 5, pp. 3251–3253. DOI: 10.1109/20.908758.

15. Pearson J., Squire P.T., Maylin M.G., Gore J.G. Apparatus for magnetic measurements under biaxial stress. *IEEE Transactions on magnetics*, 2000, vol. 36, No. 5, pp. 3599–3601. DOI: 10.1109/20.908913.

16. Kai Y., Tsuchida Y., Todaka T., Enokizono M. Development of system for vector magnetic property measurement under stress. *Journal of Electrical Engineering*, 2010, vol. 61, No. 7/s, pp. 77–80.

17. Kai Y., Tsuchida Y., Todaka T., Enokizono M. Influence of biaxial stress on vector magnetic properties and 2-D magnetostriction of a nonoriented electrical steel sheet under alternating magnetic flux conditions. *IEEE Transactions on magnetics*, 2014, vol. 50, No. 4, 6100204. DOI: 10.1109/TMAG.2013.2287875.





18. Kai Y., Enokizono M. Effect of arbitrary shear stress on vector magnetic properties of nonoriented electrical steel sheets. *IEEE Transactions on magnetics*, 2017, vol. 53, No. 11, 2002304. DOI: 10.1109/TMAG.2017.2703592.

19. Aydin U., Rasilo P., Singh D., Lehikoinen A., Belahcen A., Arkkio A. Coupled magnetomechanical analysis of iron sheets under biaxial stress. *IEEE Transactions on magnetics*, 2016, vol. 52, No. 3, 2000804. DOI: 10.1109/TMAG.2015.2496207.

20. Aydin U., Rasilo P., Martin F., Belahcen A., Daniel L., Haavisto A., Arkkio A. Effect of multi-axial stress on iron losses of electrical steel sheets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2019, vol. 469, pp. 19–27. DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.08.003.

21. Aydin U., Martin F., Rasilo P., Belahcen A., Haavisto A., Singh D., Daniel L., Arkkio A. Rotational single sheet tester for multiaxial magneto-mechanical effects in steel sheets. *IEEE Transactions on magnetics*, 2019, vol. 55, No. 3, 2001810. DOI: 10.1109/TMAG.2018.2889238.

22. Aydin U., Rasilo P., Martin F., Belahcen A., Daniel L., Arkkio A. Modeling of multi-axial stress dependent iron losses in electrical steel sheets. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 2020, vol. 504, 166612. DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.08.003.

23. Biaxial and triaxial testing machines. *ZwickRoel.* Available at: https://www.zwickroell.com/products/ static-materials-testing-machines/biaxial-and-triaxial-testing-machines.

24. Biaxial testing machines. *ADMET*. Available at: https://www.admet.com/products/biaxial-testing-machines.

25. Gupte A.A. Optimization of Cruciform Biaxial Composite Specimen. In: *Master on Science Thesis, South Dakota State University*, 2003.

26. Escárpita D.A.A., Cárdenas D., Elizalde H., Ramirez R., Probst O. Biaxial tensile strength characterization of textile composite materials. In: *Composites and Their Properties*, ed. by N. Hu, London, United Kingdom: IntechOpen, 2012.

27. Zhao K., Chen L., Xiao R., Ding Z., Zhou L. Design of a biaxial ten10.1007/s10853-019-03358-2sile testing device and cruciform specimens for large plastic deformation in the central zone. *Journal of Materials Science*, 2019, vol. 54, pp. 7231–7245. DOI: 10.1007/s10853-019-03358-2.

28. G. Kirsch. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeislehre. Zantralblatt Verlin Deutscher Ingenieure, 1898, vol. 42, pp. 797–807.

29. Gorkunov E.S., Mushnikov A.N. Magnetic methods of evaluating elastic stresses in ferromagnetic steels (review). *Kontrol'. Diagnostika ("Testing. Diagnostics")*, 2020, vol. 23, No. 12, pp. 4–23. (In Russian).



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 28.04.2022 УДК 620.179.1:539.3 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.050-060

http://dream-journal.org

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ УСТАНОВКА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЙ ФИЗИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

А. Н. Мушников^{1, а)*}, С. М. Задворкин^{1, б)}, Е. Н. Перунов^{1, в)}, С. В. Выскребенцев², Р. Ф. Измайлов³, Д. И. Вичужанин^{1, г)}, Н. Н. Соболева^{1, д)}, А. С. Игумнов^{4, е)}

¹Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова УрО РАН,

ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, 620049, Российская Федерация ²Акционерное общество

«Научно-производственное объединение автоматики имени академика Н. А. Семихатова»,

ул. Мамина-Сибиряка, 145, г. Екатеринбург, 620075, Российская Федерация ³Акционерное общество «Уральский электромеханический завод»,

ул. Студенческая, 9, г. Екатеринбург, 620137, Российская Федерация ⁴Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,

ул. Софьи Ковалевской, 16, г. Екатеринбург, 620990, Российская Федерация

- ^{a)} thtps://orcid.org/0000-0001-7073-6476 mushnikov@imach.uran.ru;
- ⁶⁾ transformed by the base of the base o

^{B)} perunovmail@mail.ru;

^{r)} D https://orcid.org/0000-0002-6508-6859 mmm@imach.uran.ru;

¹⁰ https://orcid.org/0000-0002-7598-2980 🖾 natashasoboleva@list.ru;

^{e)} ttps://orcid.org/0000-0002-0907-9187 🖾 parallel@imm.uran.ru

Создана оригинальная экспериментальная установка, предназначенная для исследования физических свойств материалов в процессе упругопластического деформирования по двум осям. Установка не имеет ферромагнитных деталей в рабочей зоне, что позволяет более точно проводить магнитные измерения. Выполнено моделиро вание процесса двухосного деформирования методом конечных элементов для оптимизации геометрии образца и определения напряженного состояния в его центральной зоне. Проведены тестовые эксперименты по определению влияния двухосного растяжения на коэрцитивную силу конструкционной стали 12Г2С.

Ключевые слова: двухосное деформирование, плоское напряженное состояние, неразрушающий контроль.

1. Введение

Напряженно-деформированное состояние конструкций во многом определяет возможность их надежной эксплуатации. В ферромагнитных материалах, к которым относятся многие конструкционные стали, действие упругих деформаций сопровождается формированием особой доменной структуры (так называемой магнитной текстуры), которая определяет процессы намагничивания и перемагничивания. Это позволяет использовать различные магнитные параметры, получаемые из кривых намагничивания и петель магнитного гистерезиса, для неразрушающей оценки уровня действующих напряжений.

^{*}Ответственный автор. Электронная почта: mushnikov@imach.uran.ru Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Российская Федерация Тел.: +7 (343) 362-30-29



Исследованиями возможности применения магнитных методов неразрушающего контроля для оценки напряженно-деформированного состояния металлоконструкций ученые занимаются с середины прошлого века. Однако зачастую в экспериментах рассматривали одноосное нагружение. В реальных условиях, как правило, элементы конструкций подвержены более сложным воздействиям. Это обуславливает актуальность создания методик неразрушающей оценки напряжений, в частности, при плоском напряженном состоянии.

Исследования влияния двухосного напряженного состояния на магнитные характеристики начались сравнительно недавно. В некоторых работах [1, 2] для создания плоского напряженного состояния в исследуемых образцах использовали тот факт, что при кручении цилиндрического образца возникающие на поверхности касательные напряжения эквивалентны паре равных по модулю, но разных по знаку взаимно перпендикулярных растягивающих и сжимающих напряжений. Нагружение тонкостенной оболочечной конструкции внутренним давлением тоже создаст плосконапряженное состояние на поверхности [3–5]. Однако в обоих случаях напряжения, действующие по двум осям, взаимосвязаны, что значительно ограничивает возможности экстраполяции полученных данных на общий случай плоского напряженного состояния.

Ряд проведенных российскими [6–8] и зарубежными [9] учеными экспериментов на плоских крестообразных образцах обладает тем же недостатком: установки позволяли получать только симметричное (напряжения по двум осям совпадают) и асимметричное (напряжения совпадают) и асимметричное (напряжения совпадают) и асимметричное (напряжения совпадают) в величине, но различаются знаком) состояния.

В работах [10–13] рассмотрено комбинированное нагружение тонкостенной трубы осевой нагрузкой и внутренним давлением. В [14] сложнонапряженное состояние создается комбинацией растяжения или сжатия с кручением и внутренним давлением в полом цилиндрическом образце. Подобные схемы уже позволяют независимо изменять ортогонально действующие осевые и окружные напряжения. Ограничением является то, что окружные напряжения в таких экспериментах не могут быть отрицательными.

Испытательные машины, позволяющие получить произвольное плоское напряженное состояние, использовались в исследованиях [15–23]. Следует отметить, что исследования [15, 16] проводили на технически чистом железе, а в работах [17–23] объектами исследований были электротехнические стали, которые являются магнитомягкими материалами. Проведение подобных исследований на конструкционных сталях является актуальной задачей с точки зрения развития неразрушающих методов контроля напряженно-деформированного состояния элементов металлоконструкций.

На сегодняшний день существуют серийно выпускаемые машины для механических испытаний на двухосное деформирование [24, 25]. Однако наличие большого количества ферромагнитных элементов в рабочей зоне таких машин является существенным недостатком для магнитных исследований. Намагничиваясь за счет магнитоупругого эффекта и под действием прикладываемых в экспериментах магнитных полей, детали машины будут вносить искажения в результаты последующих измерений. Поэтому целью настоящей работы являлось создание оригинального стенда для двухосного деформирования, все силовые части которого изготовлены из неферромагнитных материалов.

2. Конструкция экспериментальной установки

Для повышения точности магнитных исследований каркас установки (рис. 1) изготовлен из алюминиевого сплава, а штанги и захваты изготовлены из аустенитной стали, то есть неферромагнитных материалов.

Экспериментальная установка оснащена четырьмя электромеханическими приводами с прецизионными червячными редукторами, шаговыми двигателями и программируемыми блоками управления шаговыми двигателями. Блоки управления шаговыми двигателями че-



рез коммутатор соединены с персональным компьютером для автоматизированного управления установкой.



Рис. 1. Внешний вид экспериментальной установки

Для закрепления образца в захватах применяются пальцы из аустенитной стали. Таким образом, в рабочей зоне отсутствуют элементы из ферромагнитных материалов, которые могли бы вносить искажения в результаты магнитных измерений. Фотография рабочей зоны представлена на рис. 2.



Рис. 2. Фото рабочей зоны

Для определения действующих сил на захваты установлены тензодатчики, подключенные к индикаторам и персональному компьютеру. Диапазон допустимых нагрузок по каждой из осей составляет от -50 кH до +50 кH. Величины прикладываемых нагрузок F_x и F_y , соответственно, вдоль осей х и у взаимно независимы (рис. 3). На боковые грани образца устанавливаются четыре высокоточных абсолютных линейных датчика перемещения. Персональный компьютер выводит попарно суммы и разности показаний датчиков. Они служат индикаторами, соответственно, деформации и нарушения симметрии. Кроме того на компьютер выводятся показания четырех тензодатчиков, определяющих действующие нагрузки и



также сигнализирующих о нарушении симметрии. Контроль симметрии позволяет удерживать центр образца неподвижным и избежать возникновения нежелательных боковых нагрузок на домкраты.



Рис. 3. Эскиз образца и схема нагружения

3. Расчет напряженного состояния

Для оценки параметров напряженно-деформированного состояния было выполнено моделирование процесса деформации методом конечных элементов. Была построена трехмерная модель процесса. Граничные условия задавали в перемещениях. Для материала деформируемого образца принимали изотропную упругую модель. Материал нагружающего инструмента (пальцев) рассматривался как абсолютно жесткое тело.

Для локализации напряжений в центральной зоне образца делают выборки круговой [26] или ромбовидной [27] формы (в указанных работах предметом исследований были композитные материалы, но этот же подход может быть применен и для стальных образцов). На распределение напряжений значительное влияние оказывают радиусы закругления углов [28]. В настоящей работе в центральной зоне образца была сделана круговая выборка (рис. 3), размер которой определялся, в том числе, используемым в эксперименте приставным магнитным устройством (ПМУ).

В результате моделирования процесса деформирования методом конечных элементов было установлено, что интенсивность напряжений распределена в центральной зоне равномерно в случае как одноосного, так и двухосного нагружения. Все касательные напряжения, а также нормальные напряжения, перпендикулярные плоскости образца, на 3–4 порядка меньше нормальных напряжений вдоль осей x и y (σ_x и σ_y), поэтому их величинами будем пренебрегать. Тогда связь напряженного состояния с нагрузками F_x и F_y определяется тензором напряжений:



ISSN 2410-9908

$$\begin{pmatrix} k_1 F_x + k_2 F_y & 0 & 0 \\ 0 & k_1 F_y + k_2 F_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
(1)

где коэффициенты $k_1 = 574 \text{ м}^{-2}$, $k_2 = -28 \text{ м}^{-2}$.

4. Влияние двухосного растяжения на коэрцитивную силу стали 12Г2С

В качестве тестового эксперимента было выполнено исследование изменений коэрцитивной силы стали при действии двухосного растяжения. Для эксперимента был изготовлен образец из конструкционной низколегированной стали 12Г2С. Химический состав стали, приведенный в табл. 1, был определен на оптическом эмиссионном спектрометре Spectromaxx.

Таблица 1

Элемент	С	Si	Mn	Ni	S	Р	Cr	V	Cu
Содержание,									
масс. %	0,139	0,67	1,58	0,033	0,0075	0,022	0,031	0,016	0,045

Химический состав исследуемой стали

Дополнительно, для определения механических свойств материала был изготовлен разрывной образец и проведены испытания в соответствии с ГОСТ 1497-84 на гидравлической испытательной машине Tinius Olsen Super L-60. Были определены следующее характеристики материала: условный предел текучести 340 МПа, временное сопротивление 540 МПа, модуль Юнга 190 ГПа, относительное удлинение при разрыве 29 %.

Магнитные характеристики материала в исходном состоянии были определены в замкнутой магнитной цепи на магнитоизмерительном комплексе Remagraph C-500 по петле магнитного гистерезиса с максимальной напряженностью поля 600 А/см. Коэрцитивная сила исследованной стали в исходном состоянии равна 3,57 А/см.

В работах [17–23] для определения индукции в рабочей зоне образца были сделаны отверстия, через которые намотаны катушки индукции. Такой метод позволяет более точно определять магнитную индукцию по сравнению с использованием ПМУ. Авторы утверждали, что эти отверстия не оказывают существенного влияния на напряженно-деформированное состояние исследуемого объема, но не представили расчеты, подтверждающие их слова. Данные утверждения выглядят сомнительно ввиду известной задачи Кирша [29], в соответствии с решением которой напряжения вблизи отверстия возрастают в 3 раза. Поэтому в настоящей работе для определения коэрцитивной силы было использовано П-образное ПМУ с сечением полюсов 18×9 мм и межполюсным расстоянием 16 мм. Максимальная напряженность магнитного поля достигала 200 А/см, что более чем на порядок превышает коэрцитивную силу исследуемой стали, то есть такое поле позволяет достичь технического насыщения материала. Для определения индукции измерительная обмотка была соединена с флюксметром EF-5.

Было получено 25 различных напряженных состояний, для каждого из которых было определено изменение коэрцитивной силы по отношению к ненагруженному состоянию (рис. 4).

Для стали 09Г2С, которая по составу близка к рассматриваемой в настоящей работе стали 12Г2С, ранее было определено, что в исследуемом диапазоне напряжений магнитострикция положительна [14, 30]. Поэтому наблюдаемые в настоящем эксперименте процессы можно объяснить формированием магнитных текстур, характерных для материалов с положительной магнитострикцией.

ISSN 2410-9908

При воздействии одноосного растяжения, соосного с направлением магнитных измерений *x*, величина $\lambda \sigma_x$ положитеньна, т. е. $\lambda \sigma_x > 0$. Формируется магнитная текстура типа «ось легкого намагничивания», что приводит к уменьшению коэрцитивной силы материала. Напряжения σ_y при растяжении перпендикулярно к направлению магнитных измерений способствуют повороту векторов магнитных моментов доменов к оси *y*, что затрудняет процессы перемагничивания и ведет к росту коэрцитивной силы.



Рис. 4. Относительные изменения коэрцитивной силы стали 12Г2С под действием двухосного растяжения

При двухосном растяжении растягивающие напряжения способствуют формированию двух противодействующих текстур типа «ось легкого намагничивания» вдоль осей *x* и *y*. Одна будет способствовать повороту векторов магнитных моментов доменов к направлению поля, а вторая препятствовать этому. Поэтому изменения результирующей намагниченности будут определяться величиной приложенного поля и значениями напряжений σ_x и σ_y . Симметричное растяжение ($\sigma_x = \sigma_y$) практически не оказывает влияния на относительные изменения коэрцитивной силы.

5. Заключение

Разработана оригинальная экспериментальная установка для двухосного деформирования, которая, ввиду отсутствия ферромагнитных деталей в рабочей зоне, позволяет осуществлять эксперименты на двухосное растяжение и сжатие одновременно с точными измерениями магнитных характеристик ферромагнитных материалов. Установка аналогично может быть использована для исследований свойств материалов вихретоковым, ультразвуковым

и другими методами с использованием малогабаритных приставных преобразователей.

Проведено моделирование с целью оптимизации геометрии крестообразного образца с круговой выборкой. Предложенная геометрия обеспечивает равномерное распределение напряжений в зоне установки приставного магнитного устройства.

Выполнен тестовый эксперимент по определению влияния двухосного растяжения на коэрцитивную силу конструкционной стали 12Г2С.

Благодарность



Работа выполнена в рамках государственного задания по теме № АААА-А18-118020790148-1. Для определения исходных свойств материала образца было использовано оборудование ЦКП «Пластометрия» ИМаш УрО РАН. При проведении моделирования был использован суперкомпьютер «Уран» ИММ УрО РАН.

Литература

http://dream-journal.org

1. Schneider C. S., Richardson J. M. Biaxial magnetoelasticity in steels // Journal of Applied Physics. – 1982. – Vol. 53. – P. 8136–8138. – DOI: 10.1063/1.330341.

2. Sablik M. J., Jiles D. C. Modeling the Effects of Torsional Stress on Hysteretic Magnetization // IEEE Transactions on Magnetics. – 1999. – Vol. 35, No. 1, part 2. – P. 498–504. – DOI: 10.1109/20.737472.

3. Magnetic testing of stressed state of hydrotested gas-separator wall / S. M. Kulak, V. F. Novikov, V. V. Probotyuk, S. M. Vatsenkov, E. S. Fursov // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2019. – Vol. 55. – P. 225–232. – DOI: 10.1134/S1061830919030070.

4. Kulak S. M., Novikov V. F., Mitrofanov D. D. Evaluation of Stresses in a Pressurized Vessel by Magnetoelastic Demagnetization // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 6. – P. 6–14. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.6.006-014. – URL: http://dream-journal.org/issues/2019-6/2019-6_272.html (accessed: 22.04.2022).

5. Kulak S. M., Novikov V. F., Baranov A. V. Control of mechanical stresses of high pressure container walls by magnetoelastic method // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 154. – 012004. – DOI: 10.1088/1757-899X/154/1/012004.

6. Zakharov V. A., Ul'yanov A. I., Gorkunov E. S. Regularities of the change in the coercive force under biaxial asymmetric deformation of steel 3 // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2010. – Vol. 46. – P. 194–205. – DOI: 10.1134/S1061830910030071.

7. The influence of biaxial elastic deformation on the coercive force and local remanent magnetization of construction steels / V. F. Novikov, V. A. Zakharov, A. I. Ul'yanov, S. V. Sorokina, M. E. Kudryashov // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2010. – Vol. 46. – P. 520–526. – DOI: 10.1134/S1061830910070065.

8. Zakharov V.A., Ul'yanov A.I. & Gorkunov E.S. Coercive force of ferromagnetic steels under the biaxial symmetrical tension of a material // Russian Journal of Nondestructive Testing. – 2011. – Vol. 47. – P. 359–368. – DOI: 10.1134/S1061830911060106.

9. Langman R. Magnetic properties of mild steel under conditions of biaxial stress // IEEE Transactions on magnetics. – 1990. – Vol. 26, No. 4. – P. 1246–1251. – DOI: 10.1109/20.54015.

10. Aginey R. V., Islamov R. R., Mamedova E. A. Determination of stress-strain state of the pressure pipeline section by the coercive force measurement results // Science & Technologies: Oil and Oil Products Pipeline Transportation. – 2019. – Vol. 9, No. 3. – P. 284–294. – DOI: 10.28999/2541-9595-2019-9-3-284-294.

11. Berdnik Maria, Berdnik Aleksandr. Aspects of the coercimetery application to estimate parameters of the structure strain-stress state // NDT WORLD. – 2017. – Vol. 20, No. 4. – P. 53–56. – DOI: 10.12737/article_5a2fb89e6134d2.05260495.

12. Коэрцитиметрический анализ напряженного состояния технологических газовых трубопроводов компрессорного цеха на примере аппарата воздушного охлаждения газа / И. Н. Андронов, В. И. Кучерявый, В. Л. Савич, Д. А. Борейко // Инженер-нефтяник. – 2019. – № 1. – С. 38–45.

13. Effect of mechanical stresses on the magnetic characteristics of pipe steel / E. S. Gorkunov, S. M. Zadvorkin, A. N. Mushnikov, S. V. Smirnov, E. I. Yakushenko // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2014. – Vol. 55 (3). – P. 530–538. – DOI: 10.1134/S002189441403016X.





14. Biaxial stress effects on the magnetic properties of pure iron / J. Pearson, P. T. Squire, M. G. Maylin, J. G. Gore // IEEE Transactions on magnetics. – 2000. – Vol. 36, No. 5. – P. 3251–3253. – DOI: 10.1109/20.908758.

15. Apparatus for magnetic measurements under biaxial stress / J. Pearson, P. T. Squire, M. G. Maylin, J. G. Gore // IEEE Transactions on magnetics. – 2000. – Vol. 36, No. 5. – P. 3599–3601. – DOI: 10.1109/20.908913.

16. Development of system for vector magnetic property measurement under stress / Y. Kai, Y. Tsuchida, T. Todaka, M. Enokizono // Journal of Electrical Engineering. -2010. - Vol. 61. - No. 7/s. - P. 77 - 80.

17. Influence of biaxial stress on vector magnetic properties and 2-D magnetostriction of a nonoriented electrical steel sheet under alternating magnetic flux conditions / Y. Kai, Y. Tsuchida, T. Todaka, M. Enokizono // IEEE Transactions on magnetics. – 2014. – Vol. 50, No. 4. – 6100204. – DOI: 10.1109/TMAG.2013.2287875.

18. Kai Y., Enokizono M. Effect of arbitrary shear stress on vector magnetic properties of nonoriented electrical steel sheets // IEEE Transactions on magnetics. – 2017. – Vol. 53, No. 11. – 2002304. – DOI: 10.1109/TMAG.2017.2703592.

19. Coupled magneto-mechanical analysis of iron sheets under biaxial stress / U. Aydin, P. Rasilo, D. Singh, A. Lehikoinen, A. Belahcen, A. Arkkio // IEEE Transactions on magnetics. – 2016. – Vol. 52, No. 3. – 2000804. – DOI: 10.1109/TMAG.2015.2496207.

20. Effect of multi-axial stress on iron losses of electrical steel sheets / U. Aydin, P. Rasilo, F. Martin, A. Belahcen, L. Daniel, A. Haavisto, A. Arkkio // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2019. – Vol. 469. – P. 19–27. – DOI: 10.1016/j.jmmm.2018.08.003.

21. Rotational single sheet tester for multiaxial magneto-mechanical effects in steel sheets / U. Aydin, F. Martin, P. Rasilo, A. Belahcen, A. Haavisto, D. Singh, L. Daniel, A. Arkkio // IEEE Transactions on magnetics. – 2019. – Vol. 55, No. 3. – 2001810. – DOI: 10.1109/TMAG.2018.2889238.

22. Modeling of multi-axial stress dependent iron losses in electrical steel sheets / U. Aydin, P. Rasilo, F. Martin, A. Belahcen, L. Daniel, A. Arkkio // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. – 2020. – Vol. 504. – 166612. – DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.166612.

23. Biaxial and triaxial testing machines // ZwickRoell. – URL: https://www.zwickroell.com/products//static-materials-testing-machines/biaxial-and-triaxial-testing-machines/ (дата обращения: 28.04.2022).

24. Biaxial testing machines // ADMET. – URL: https://www.admet.com/products/biaxial-testing-machines/ (дата обращения: 28.04.2022).

25. Gupte A. A. Optimization of cruciform biaxial composite specimen : Master on Science Thesis. – South Dakota State University, 2003.

26. Biaxial tensile strength characterization of textile composite materials / D. A. A. Escárpita, D. Cárdenas, H. Elizalde, R. Ramirez, and O. Probst // Composites and Their Properties. – London, United Kingdom: IntechOpen. – 2012. – URL: https://www.intechopen.com/chapters/38394. – DOI: 10.5772/48105.

27. Design of a biaxial tensile testing device and cruciform specimens for large plastic deformation in the central zone / K. Zhao, L. Chen, R. Xiao, Z. Ding, L. Zhou // Journal of Materials Science. – 2019. – Vol. 54. – P. 7231–7245. – DOI: 10.1007/s10853-019-03358-2.

28. Kirsch G. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeislehre // Zantralblatt Verlin Deutscher Ingenieure. – 1898. – Vol. 42. – P. 797–807.

29. Горкунов Э. С., Мушников А. Н. Магнитные методы оценки упругих напряжений в ферромагнитных сталях (обзор) // Контроль. Диагностика. – 2020. – Т. 23, № 12 (270). – С. 4–23. – DOI: 10.14489/td.2020.12.pp.004-023.



ISSN 2410-9908

Received: 17.06.2022 Revised: 19.07.2022 Accepted: 26.08.2022 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.061-080

AN ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF FREE BOUNDARY DYNAMICS FOR AN ISOLATED MASS OF A SELF-GRAVITATING GAS

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

A. L. Kazakov^{1, 2, a)}, L. F. Spevak^{1, b)*}, and N. P. Chuev^{3, c)}

 ¹Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
 ²Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 134 Lermontova St., Irkutsk, 664033, Russian Federation
 ³Ural State University of Railway Transport, 66 Kolmogorova St., Ekaterinburg, 620034, Russian Federation

^{a)} **b** https://orcid.org/0000-0002-3047-1650 **⊠** kazakov@icc.ru; ^{b)} **b** https://orcid.org/0000-0003-2957-6962 **⊠** lfs@imach.uran.ru; ^{c)} **⊠** chuev44@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: Ifs@imach.uran.ru Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russian Federation Tel.: +7 (343) 362 30 22; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper considers an evolution of the free boundary of a finite volume of a self-gravitating ideal gas moving in the vacuum. Unsteady flows are described by a phenomenological mathematical model, which has the form of a system of nonlinear Volterra integro-differential equations written in Eulerian coordinates. The gas volume moves in a force field generated by the Newtonian potential in general form. The boundary conditions are specified on the free gas-vacuum boundary, which is a priori unknown and determined simultaneously with gas flow construction. Conversion to Lagrangian coordinates allows us to reduce the original problem to an equivalent one, which consists of Volterra integral equations and the continuity equation in Lagrangian form, with Cauchy conditions specified for all these equations. Therefore, the application of Lagrangian coordinates makes it possible, in particular, to eliminate the unknown boundary. The theorem of the existence and uniqueness of the solution in the space of infinitely differentiable functions is proved for this problem. The free boundary is determined as an image of the surface bounding the gas-filled region in reverse transition. Herewith, the method for studying the free boundary is similar to the approach that the authors apply to studying the dynamics of the rarefied mass of a self-gravitating gas. Numerical calculations of gas flow are made, including the construction of the free gas-vacuum boundary. The influence of gravitation and the initial gas particle velocity on the formation of gas cloud configuration in the vacuum and on cloud evolution is studied. The results are of interest in terms of solving relevant astrophysical and cosmogonic problems.

Keywords: gas dynamics, self-gravitating gas, Lagrangian coordinates, nonlinear system of Volterra-type integro-differential equations, Cauchy problem, existence and uniqueness theorem, method of successive approximations, computational experiment.

Acknowledgment

The work was financially supported by the RFBR, project No. 20-07-00407.



References

1. Chandrasekhar S. *Ellipsoidal figures of equilibrium*. Chicago, Chicago University, 1967, 264 p.

2. Lamb H. *Hydrodynamics*, Cambridge, University Press, 1993, 604 p.

3. Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1959. ISBN 978-1-4832-0088-0. DOI: 10.1016/C2013-0-08173-X.

4. Sedov L.I. On the integration of the equations of one-dimensional motion of a gas. *Doklady AN SSSR*, 1953, vol. 90, No 5, pp. 735–739. (In Russian).

5. Bogoiavlenskii O.I. Dynamics of a gravitating gaseous ellipsoid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, iss. 2, pp. 246–256. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90061-7.

6. Ovsyannikov L.V. *Obshchie uravneniya i primery* [General equations and examples]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1967, 75 p. (In Russian).

7. Ovsyannikov L.V. On one class of unsteady motions of incompressible liquid. In: *Trudy V* sessii uchenogo soveta po narodno-hoziaystvennomy ispol'zovaniyu vzryva [Proc. of the 5th Session of Scientific Council on Explosion Application in National Economy]. Frunze, Izd-vo Ilim Publ., 1965, pp. 34–42. (In Russian).

8. Lavrentieva O.M. On Motion of a Fluid Ellipsoid. *Doklady AN SSSR*, 1988, vol. 253, No 4, pp. 828–831. (In Russian).

9. Strakhovskaya L.G. Evolution model of the self-gravitating gas disk. *KIAM Preprint No. 80*, Keldysh Inst. Appl. Math., Moscow, 2012. Available at: http://library.keldysh.ru/preprint.aspid=2012-80. (In Russian).

10. Parshin D.V., Cherevko A.A. & Chupakhin A.P. Steady vortex flows of a self-gravitating gas. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, pp. 327–334. DOI: 10.1134/S0021894414020151.

11. Ovsyannikov L.V. Singular vortex. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1995, vol. 36, pp. 360–366. DOI: 10.1007/BF02369772.

12. Chuev N.P. On the existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for a system of integral equations describing the motion of a rarefied mass of a self-gravitating gas, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, No. 4, pp. 663–672. DOI: 10.1134/S0965542520040077.

13. Legkostupov M.S. On a model of the generation of star planet systems of the Sun type. *Matematicheskoye modelirovanie*, 2020, vol. 32, No. 3, pp. 81–101. DOI: 10.20948/mm-2020-03-05. (In Russian).

14. Chuev N.P. Analytical method for studying three-dimensional problems in self-gravitating gas dynamics. *Vychislitel'nye technologii*, 1998, vol. 3, No. 1, pp. 79–89. (In Russian).

15. Chuev N.P. The Cauchy problem for system of Volterra integral equations describing the motion of a finite mass of a self-gravitating gas. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 33, pp. 35–50. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.33.35. (In Russian).

16. Chuev N.P. Volterra integral equation method in the study of dynamics of self-gravitating gas bounded by free surface. *Herald of the Ural State University of Railway Transport. Scientific journal*, 2022, No. 2 (54), pp. 4–23. DOI: 10.20291/2079-0392-2022-2-4-23. (In Russian).

17. Stanyukovich K.P. *Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoy sredy* [Unsteady Motion of a Continuous Medium]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 875 p. (In Russian).

18. Gyunter N.M. *Teoriya potentsiala i ee primenenie k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki* [Potential theory and its application to the basic problems of mathematical physics]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1953, 415 pp. (In Russian).



19. Sretenskii L.N. *Theory of the Newton Potential*. Moscow–Leningrad, OGIZ–Gostekhizdat Publ., 1946, 318 p. (In Russian).

20. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki* [Lectures on Basic Gas Dynamics]. Institute of Computer Studies, Moscow, Izhevsk, 2003. (In Russian).

21. Ovsyannikov L.V. A gas pendulum. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, pp. 865–869. DOI: 10.1007/BF02468732.

22. Vasil'eva A.B., Tikhonov N.A. *Integralnye uravneniya* [Integral equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 160 p.



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

Подана в журнал: 17.06.2022 УДК 517.958:533.17 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.061-080

http://dream-journal.org

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ИЗОЛИРОВАННОЙ МАССЫ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

А. Л. Казаков^{1, 2, а)}, Л. Ф. Спевак^{1, б)*}, Н. П. Чуев^{3, в)}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, 620049, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация ²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, 664033, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, Российская Федерация ³Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Уральский государственный университет путей сообщения, 620034, ул. Колмогорова, 66, Екатеринбург, Российская Федерация

^{a)} tttps://orcid.org/0000-0002-3047-1650 & kazakov@icc.ru;

⁶⁾ ttps://orcid.org/0000-0003-2957-6962 🖾 lfs@imach.uran.ru;

^{B)} chuev44@mail.ru

*Ответственный автор. Электр. почта: lfs@imach.uran.ru Адрес для переписки: 620049, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7 (343) 362–30–22; факс: +7 (343) 374–53–30

В работе рассматривается эволюция свободной поверхности, которая ограничивает движущуйся в вакууме конечный объем самогравитирующего идеального газа. Неустановившиеся течения описаны феноменологической математической моделью газовой динамики, которая имееет вид системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, записанной в эйлеровых координатах. Движение среды осуществляется в силовом поле, создаваемом ньютоновским потенциалом в общем виде. Краевые условия заданы на свободной границе газвакуум, которая заранее неизвестна и определяется одновременно с построением течения газа. Переход к лагранжевым координатам позволяет свести задачу к эквивалентной, состоящей из интегральных уравнений типа Вольтерра и уравнения неразрывности в форме Лагранжа, для которых заданы условия Коши, т. е. применение лагранжевых координат дает возможность, в частности, избавиться от неизвестной границы. Для данной задачи доказана теорема существования и единственности решения в пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Свободная граница определяется как образ поверхности, ограничивающей заполненую газом область, при обратном переходе. При этом метод исследования динамики свободной поверхности аналогичен подходу, использованному авторами для исследования динамики разреженной массы самогравитирующего газа. Выполнены численные расчеты течения газа, включая построение свободной границы газ-вакуум. Исследовано влияние гравитации и начальной скорости частиц газа на формирование конфигурации газового облака в вакууме и его эволюцию. Полученные результаты представляют интерес для решения актуальных астрофизических и космогонических задач.

Ключевые слова: газовая динамика, самогравитирующий газ, лагранжевы координаты, система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, задача Коши, теорема существования и единственности, метод последовательных приближений, вычислительный эксперимент.



ISSN 2410-9908

1. Введение

В работе исследуется задача о движении в вакууме изолированной массы самогравитирующего идеального газа с переменной областью течения, граница которой является свободной поверхностью. Система уравнений газовой динамики, описывающая движение среды во внутреннем (собственном) поле тяжести, является системой нелинейных интегродифференциальных уравнений, которая посредством невырожденных преобразований сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений типа Вольтерра, что, в частности, позволяет избавиться от неизвестной границы. Полученные результаты решения этой системы используются при рассмотрении адиабатических движений идеального газа, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат.

Неустановившимся движениям сплошной среды вышеуказанного вида посвящено большое количество научных трудов, первыми из которых были классические работы Дирихле, Дедекинда и Римана по теории фигур равновесия идеальной несжимаемой гравитирующей жидкости [1, 2]. Адиабатические неустановившиеся движения газа, когда скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии, были изучены Л. И. Седовым [3, 4]. В монографии О. И. Богоявленского [5] исследована динамика адиабатических движений гравитирующего идеального газа. Движения идеального газа с однородной деформацией в двумерных и трехмерных случаях глубоко изучены в работах Л. В. Овсянникова [6, 7], что способствовало дальнейшим исследованиям в этом направлении. В статье О. М. Лаврентьевой [8] представлены достаточно общие результаты по динамике нестационарных эллипсоидов со свободной границей, рассмотрено движение идеальной жидкости, при котором скорости являются линейными функциями координат.

Интерес к проблематике, связанной с изучением движения самогравитирующего газа, со временим не ослабевает. Приведем некоторые публикации последних лет. Так, в работе [9] рассмотрены вопросы численного моделирования эволюции газового диска, которое описывается нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрических координатах и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. В статье [10] построено и исследовано точное решение уравнений установившегося движения самогравитирующего газа, которое является аналогом классического вихря Овсянникова [11] в рассмотренном случае. В статье [12] доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, описывающей движение конечной массы самогравитирующего газа, ограниченной свободной границей. Представленные результаты интересны как с математической точки зрения, так и для моделирования процесса образования планетных систем и других астрофизических и космогонических явлений [13].

Остановимся более подробно на предшествующих работах одного из авторов. Основные результаты Н. П. Чуева по применению метода интегральных уравнений Вольтерра в исследовании динамики конечной массы самогравитирующего газа были представлены в статьях [14, 15]. В [16] приведено наиболее полное и развернутое доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Так, опираясь на свойства компактных пространств, серию найденных оригинальных и конкретных оценок для функций, описывающих течения самогравитирующего газа, удалось доказать сходимость последовательности приближенных решений в предположении о гладкости начальных данных.

В настоящей статье указанные результаты распространены на исследование математической модели политропного изоэнтропического движения идеального газа, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат. Найден и проанализирован новый класс точных решений. Впервые в рамках настоящего цикла исследований выполнены иллюстрирующие численные расчеты.



ISSN 2410-9908

2. Постановка задачи

В работе рассматривается залача по изучению закономерностей движения газа во внутреннем поле тяжести. Пусть в момент t = 0 в пространстве R^3 задана область Ω_0 , заполненная идеальным политропным и изоэнтропическим газом, частицы которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона. Задача о движении газа в силовом поле сводится к определению области Ω_t , занимаемой газом в момент времени t, а также закона движения свободной поверхности, вектора скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, давления $p(\mathbf{x}, t)$ и плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих в области $\mathbf{x} \in \Omega_t$, $t \in (0, T)$ системе уравнений газовой динамики в форме Эйлера [17]

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{dt} + \frac{1}{\rho(\mathbf{x},t)} \nabla p(\mathbf{x},t) = \nabla \Phi(\mathbf{x},t);$$

$$\frac{d\rho(\mathbf{x},t)}{dt} + \rho(\mathbf{x},t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0,$$
(1)

при условиях, что при t = 0 в каждой точке $\mathbf{x}(x, y, z)$ области Ω_0 известны распределения: $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ – вектора скорости частиц газа; $p_0(\mathbf{x})$ – давления; $\rho_0(\mathbf{x})$ – плотности газа. Функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\rho_0(\mathbf{x})$ и замкнутая граница Γ_0 области Ω_0 задаются в пространстве бесконечно дифференцируемых функций в области Ω_0 . Отметим, что здесь и далее в тексте жирным шрифтом выделены векторные величины.

На границе Γ_t области Ω_t , $t \ge 0$, выполняется условие

$$\rho(\mathbf{x},t)\Big|_{\mathbf{x}\in\Gamma} = 0.$$
⁽²⁾

Сила ньютоновского притяжения в правой части векторного уравнения системы (1) равна $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \nabla \Phi(\mathbf{x},t)$ где $\nabla \Phi$ – градиент ньютоновского потенциала, который задается тройным интегралом

$$\Phi(\mathbf{x},t) = G \iiint_{\Omega_t} \frac{\rho(\mathbf{x}',t)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} d\mathbf{x}' .$$
(3)

Здесь *G* – гравитационная постоянная; $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ –расстояние между точками области. Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона [18, 19]

div
$$\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \Delta \Phi(\mathbf{x},t) = -4\pi G \rho(\mathbf{x},t).$$

Рассматривая модель изоэнтропического движения политропного газа, уравнение состояния политропного газа берем в виде [20]

$$p(\mathbf{x},t) = \frac{1}{\gamma} \rho^{\gamma}(\mathbf{x},t), \qquad (4)$$



ISSN 2410-9908

где $\gamma > 1$ – показатель политропы (адиабаты) газа. При произвольном γ и условии (2) в системе (1) в окрестности свободной границы Γ_t $t \ge 0$, возникает сингулярность. Поэтому будем изучать движение газа при $\gamma = 1 + \frac{l}{m}$, где $l, m \in N$, $l \ge 2$.

Введем новую неизвестную функцию

$$\rho(\mathbf{x},t) = \sigma^m(\mathbf{x},t),\tag{5}$$

после подстановки которой в систему (1) получим систему уравнений газовой динамики с градиентным членом, не имеющим сингулярности

$$\frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x},t)}{dt} + m\sigma^{l-1}(\mathbf{x},t)\nabla\sigma(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}(\mathbf{x},t),$$

$$\frac{d\sigma(\mathbf{x},t)}{dt} + \frac{1}{m}\sigma(\mathbf{x},t)\operatorname{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = 0.$$
(6)

На границе Γ_t области Ω_t , $t \ge 0$, сохраняется условие (2):

$$\sigma(\mathbf{x},t)\big|_{\mathbf{x}\in\Gamma_t} = 0, \tag{7}$$

а вместо функции $\rho_0(\mathbf{x})$ возникает функция $\sigma_0(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, 0) \in C^{\infty}(\overline{\Omega}_0)$.

В соответствии с целью статьи и постановкой задачи, мы исследуем движение в вакууме изолированной массы самогравитирующего идеального газа с переменной областью течения. При определении закона движения границы этой области как свободной поверхности будем учитывать, что градиентное слагаемое уравнения Эйлера системы (6), с учетом (7), для точек $\mathbf{x} \in \Gamma_t$ равно нулю, т.е. $m\sigma^{l-1}(\mathbf{x}, t)\nabla\sigma(\mathbf{x}, t) = 0$. Далее будем использовать для описания плотности как функцию $\rho(\mathbf{x}, t)$, так и функцию $\sigma(\mathbf{x}, t)$.

Движение газа рассматриваем при условии, что свободная граница во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, т.е. исключается возможность переноса массы через свободную поверхность. Это обстоятельство делает удобным переход от эйлеровых координат (\mathbf{x}, t) к лагранжевым координатам (ξ, t) , для которых область определения решения задачи о движении конечной массы газа будет заранее фиксированной. При переходе к этим координатам область становится заданной и является цилиндрической: $Q_T = \Omega_0 \times [0, T]$.

Для удобства дальнейшего исследования преобразуем систему газовой динамики в переменных Эйлера (\mathbf{x},t) (6) к лагранжевым координатам (ξ,t) [2, 6]. Пусть система газовой динамики системы (1), (6) имеет решение $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, $\rho(\mathbf{x},t)$. При известном векторе скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ движение частиц газа определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tag{8}$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}\big|_{t=0} = \mathbf{\xi} \,. \tag{9}$$



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

Решение задачи Коши (8) и (9) будет иметь вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t). \tag{10}$$

Непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ является невырожденным и достаточно гладким при условии, что его якобиан

$$J(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right)$$
(11)

отличен от нуля. Для якобиана (11) имеем следующие начальное условие и неравенство:

$$J(\xi,0) = 1, \ J(\xi,t) > 0.$$
 (12)

Введем лагранжевы переменные $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ как значения координат частиц газа в начальный момент в области Ω_0 . Если рассматривать $\mathbf{x}(x, y, z)$ как функцию независимых переменных ξ, η, ζ, t , то в момент *t* скорость частицы будет

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\xi},t).$$
(13)

Используем при переходе от эйлеровых к лагранжевым переменным для функций $f(\mathbf{x},t) = f(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) = g(\boldsymbol{\xi},t)$ следующее дифференциальное равенство:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t}.$$
(14)

Тогда ускорение можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}.$$
(15)

Уравнение неразрывности и переменных Лагранжа имеет вид [20]:

$$\rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)J(\boldsymbol{\xi},t) = \rho_0(\boldsymbol{\xi}). \tag{16}$$

Здесь $\rho_0(\xi)$ означает первоначальную плотность газа в точках области Ω_0 . Запишем уравнение неразрывности с учетом замены (5):

$$\sigma^{m}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)J(\boldsymbol{\xi},t) = \sigma_{0}^{m}(\boldsymbol{\xi}).$$
(17)

Перейдем в векторном уравнении системы (6) к лагранжевым координатам, предварительно продифференцировав потенциал $\Phi(\xi, t)$. Тогда для силовой функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$ после вычисления градиента и подстановки $\mathbf{x}(\xi, t)$ получим формулу



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) = G \iiint_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}',t) \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)}{|\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t) - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'.$$

Применяя теорему о замене переменной в кратном интеграле и заменяя $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\mathbf{\eta}, t)$ в предыдущем равенстве, получим:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) = G \iiint_{\Omega_t} \rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t),t) \frac{\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)}{|\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t)|^3} J(\boldsymbol{\eta},t) d\boldsymbol{\eta},$$
(18)

где $J(\boldsymbol{\xi},t) = \frac{\partial(x',y',z')}{\partial(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\zeta}')}$ – якобиан преобразования (11) для точки $\boldsymbol{\eta}(\boldsymbol{\xi}',\boldsymbol{\eta}',\boldsymbol{\zeta}') \in \Omega_0$.

С учетом (16) равенство (18) в форме Лагранжа примет вид:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) = G \iiint_{\Omega_t} \rho_0(\boldsymbol{\eta}) \frac{\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)}{\left|\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta},t)\right|^3} J(\boldsymbol{\eta},t) d\boldsymbol{\eta} \,.$$
(19)

Введем вектор-функцию

$$\mathbf{P}(\mathbf{x},t) = (p(\mathbf{x},t),q(\mathbf{x},t),r(\mathbf{x},t)) = m\sigma^{l-1}(\mathbf{x},t)\nabla\sigma(\mathbf{x},t).$$
(20)

Тогда система (6) с учетом (19) и (20) в лагранжевых координатах примет при замене $\sigma(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \sigma(\xi, t)$ следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t^2} = -\mathbf{P}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t);$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}, t) J^{\frac{1}{m}}(\boldsymbol{\xi}, t) = \boldsymbol{\sigma}_0(\boldsymbol{\xi}).$$
(21)

Предыдущие рассуждения приводят к следующему утверждению.

Утвержедение. Для того чтобы гладкое отображение (10) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ определяло с помощью равенства (8) и уравнения неразрывности решение системы (6), необходимо и достаточно, чтобы это решение удовлетворяло системе уравнений (21), а также начально-краевым условиям

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Omega}_{0} : \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \boldsymbol{\xi}, \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{u}_{0}(\boldsymbol{\xi}), J(\boldsymbol{\xi}, 0) = 1, \, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \boldsymbol{\sigma}_{0}(\boldsymbol{\xi});$$

$$\forall \boldsymbol{\xi} \in \boldsymbol{\Gamma}_{0}, \, \forall t \ge 0 : \, \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}, t) = 0.$$

$$(22)$$

Доказательство данного утверждения приведено в работе [16].

Задача Коши для интегро-дифференциальной системы уравнений (21) и (22) может быть сведена к интегро-дифференциальной системе с интегральным векторным уравнением типа Вольтерра для искомой векторной функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ с сохранением в прежнем виде уравнения неразрывности. Таким образом, система (21) эквивалентна следующей системе:



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{u}_{0}(\boldsymbol{\xi})t + \int_{0}^{t} (t-\tau)(\mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},\tau),\tau) - \mathbf{P}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},\tau),\tau))d\tau;$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi},t)J^{\frac{1}{m}}(\boldsymbol{\xi},t) = \boldsymbol{\sigma}_{0}(\boldsymbol{\xi}).$$
(23)

Для (23) сохраняются начально-краевые условия (22) и задаются дополнительные условия для $\xi \in \overline{\Omega}_t$:

$$\max \left\{ \sup |\xi|, \sup |\mathbf{u}_{0}(\xi)|, \sup |\sigma_{0}(\xi)|, \sup |\sigma_{0}(\xi)|, \sup |\sigma_{0}^{m}(\xi)| = \sup |\rho_{0}(\xi)|, \\ \sup \frac{m}{l} |\nabla_{\xi} \sigma^{l}(\xi)|, \sup \left| G \iiint_{\Omega_{0}} \rho_{0}(\eta) \frac{\eta - \xi}{|\xi - \eta|^{3}} d\eta \right| \right\} = A_{0} < \infty.$$

$$(24)$$

Эквивалентность уравнений (23) и (21) легко проверяется дифференцированием и 2-кратным интегрированием.

Заметим, что если найдено решение системы интегральных уравнений (23) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$, то

$$\rho(\mathbf{x}(\xi,t),t) = \rho_0(\xi) J^{-1}(\xi,t).$$
(25)

Таким образом, если найдено решение системы (23) и вычислено значение $J^{-1}(\xi, t)$, то по заданному начальному в начальный момент времени значению плотности можно определить плотность газа для $t \ge 0$, а также функцию $\mathfrak{S}(\xi, t)$. На основании (12) можно утверждать, что для $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ существует дифференцируемое обратное преобразование $\xi = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t)$. При этом из равенства (10) следует $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$.

Обратное преобразование позволяет определить решение системы (6) по формулам:

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x},t)} = \mathbf{u}(\mathbf{x},t);$$

$$\mathbf{\sigma}(\boldsymbol{\xi},t) = \mathbf{\sigma}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x},t)} = \mathbf{\sigma}(\mathbf{x},t).$$
(26)

Отсюда получим функцию плотности $\rho(\mathbf{x},t) = \sigma^m(\mathbf{x},t)$, используя формулу (5). Область Ω_t в момент $t \ge 0$ определится как образ Ω_0 при преобразовании (10).

Для интегро-дифференциальной системы (23) в работе [16] достаточно подробно доказана нижеследующая теорема существования и единственности решения задачи Коши в пространстве $C_2^{\infty}(Q_T)$ – множества непрерывных бесконечно дифференцируемых по переменным ξ и непрерывно дифференцируемых до второго порядка включительно по $t \in [0, T]$ функций $\mathbf{f}(\xi, t)$.

Теорема. Задача Коши для нелинейной интегро-дифференциальной системы уравнений (23) имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\xi}, t), \quad nринадлежащее пространству <math>C_2^{\infty}(Q_T)$ в области Q_T , определенное на конечном интервале времени $[0, t_0]$ для $t_0 \in [0, T]$ и удовлетворяющее начально-краевым условиям (22) и (24).



ISSN 2410-9908

Решение системы (22) построено с помощью метода последовательных приближений. Можно доказать, применяя метод математической индукции, принадлежность итераций функций $\mathbf{x}_n(\xi, t)$ и $\sigma(\mathbf{x}_n(\xi, t), t)$ пространству функций $C_2^{\infty}(Q_T)$.

Из непрерывности функций $\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\xi},t)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n,t)$ в замыкании области Q_T следует их ограниченность. В работе [16] доказано, что последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\xi},t)\}$ равномерно сходится к функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t)$ в области Ω_0 и, как легко убедится, последовательность непрерывно дифференцируемых функций *k*-го порядка, k = 0, 1, 2, ... также равномерно сходится к некоторой вектор-функции:

$$\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\xi},t) = \lim_{n \to \infty} \frac{\partial^k \mathbf{x}_n(\boldsymbol{\xi},t)}{\partial \boldsymbol{\xi}^{\alpha_1} \partial \boldsymbol{\eta}^{\alpha_2} \partial \boldsymbol{\zeta}^{\alpha_3}}, \, \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 = k \, .$$

Отсюда следуют существование и единственность решения в лагранжевой форме системы (21) и в эйлеровой форме системы (1). Таким образом, решением поставленной задачи является вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$, принадлежащая пространству $C_2^{\infty}(Q_T)$.

Свободная граница является также образом решения системы интегральных уравнений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ при отображении $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_0$ в точки $\mathbf{x} \in \Gamma_t$. Таким образом, задача по определению закона движения свободной границы является также задачей об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$.

3. Динамика свободной поверхности, ограничивающей конечную массу движущегося самогравитирующего газа с линейным полем скоростей

3.1. Качественная теория динамики свободной поверхности математической модели движущегося самогравитирующего газа с линейным полем скоростей

Рассмотрим применение полученных результатов для исследований движения политропного изоэнтропического самогравитирующего идеального газа, в частности для изучения эволюции свободной поверхности, которая ограничивает движущийся в вакууме изолированный объем, заполняющий область $\mathbf{x} \in \Omega_t$, $t \in (0,T)$. Будем искать закономерности динамики свободной поверхности при условии, что отображение (10), определяющее движение с однородной деформацией, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат $\xi \in \overline{\Omega}_0$, представлено равенством

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = M(t) \cdot \boldsymbol{\xi}, \qquad (27)$$

где $M(t) = (m_{ij}(t))$ – квадратная матрица третьего порядка. Элементы матрицы M(t) являются достаточно гладкими функциями времени. Умножение матрицы на вектор-столбец выполняется по правилу умножения матриц.

Для исследования динамики свободной поверхности преобразуем систему (21). На основании краевого условия (7) и уравнения неразрывности при всех $t \ge 0$, $\xi \in \Gamma_0$ тождественно выполнено равенство

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) = m\sigma^{l-1}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t)\nabla\sigma(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},t),t) = 0.$$



ISSN 2410-9908

С учетом этого (21) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = G \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\mathbf{\eta}) \frac{\mathbf{x}(\mathbf{\eta}, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)}{\left| \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{x}(\mathbf{\eta}, t) \right|^3} d\mathbf{\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t).$$
(28)

Отсюда, в частности, следует, что метод исследования динамики свободной поверхности в данном случае аналогичен подходу, использованному в работе [12], где исследована динамика разреженной массы самогравитирующего газа.

Кроме того, из (27) следует, что

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi},0) = \boldsymbol{\xi} = M(0) \cdot \boldsymbol{\xi} \Longrightarrow M(0) = E, \qquad (29)$$

где Е – единичная матрица.

Якобиан (11) при движении с однородной деформацией примет вид:

$$J(\boldsymbol{\xi},t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta})} = \det\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}}\right) = \det M(t).$$

При t = 0 получим det M(0) = 1. В силу положительности плотности из уравнения непрерывности следует, что det $M(0) \ge 0$ для $t \ge 0$. Матрица $M(t) = (m_{ij}(t))$ состоит из девяти неизвестных функций, а векторное уравнение (28) формирует лишь три уранения, т. е. задача в общем виде становится неразрешимой.

Рассмотрим частный случай. Зададим матрицу M(t) в виде

$$M(t) = \begin{pmatrix} m(t) & 0 & 0\\ 0 & m(t) & 0\\ 0 & 0 & m(t) \end{pmatrix} = m(t)E, \qquad (30)$$

где элемент матрицы *m*(*t*), с учетом (29), удовлетворяет условию

$$m(0) = 1.$$
 (31)

Отображение (27), определяющее движение с однородной деформацией, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат, представлено равенством

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = M(t) \cdot \boldsymbol{\xi} = m(t) \cdot \boldsymbol{\xi}.$$
(32)

После подстановки (32) в систему (28) получим обыкновенное дифференциальное уравнение с параметрами ξ, описывающее динамику свободной границы Γ_t

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} \boldsymbol{\xi} = G \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{\eta}) \frac{m(t)(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})}{\left| m(t)(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}) \right|^3} d\boldsymbol{\eta} \,.$$
(33)


ISSN 2410-9908

Вычисляя определитель det M(t), получим, согласно условиям (12), что $J = \det M(t) = m^3(t) \ge 0$, откуда следует неравенство $m(t) \ge 0$ для $t \ge 0$. Тогда уравнение (33) можно записать для $\xi \in \Gamma_0$ в следующем виде:

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{m^2(t)} \mathbf{F}_0(\boldsymbol{\xi}), \tag{34}$$

где $\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\xi}) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t) = G \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{\eta}) \frac{(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})}{|(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|^3} d\boldsymbol{\eta}$ – известная силовая функция (19) при t = 0.

Умножив вектор ξ скалярно на векторы левой и правой частей равенства (34), получим:

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} \left| \boldsymbol{\xi} \right|^2 = \frac{\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\xi}) \cdot \boldsymbol{\xi}}{m^2(t)}.$$
(35)

Будем предполагать, что действующая по закону Ньютона сила в точке $\xi \in \Gamma_0$ как векторная величина направлена к центру тяжести тела, который совпадает с началом координат. Тогда уравнение (35) примет вид

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} = -\frac{|\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\xi})|}{m^2(t)|\boldsymbol{\xi}|}.$$
(36)

Задачу Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения будем решать при следующих начальных условиях:

$$m(0) = 1, \, \frac{dm(0)}{dt} = v_0, \tag{37}$$

где через v_0 обозначим начальную скорость изменения функции m(t). Первое интегрирование уравнения (36) с учетом (37) приводит к равенству:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \pm \sqrt{h(\xi) \left(\frac{1}{m(t)} - 1\right) + v_0^2} .$$
(38)

Здесь для краткости записи введена функция $h(\xi) = \frac{2|\mathbf{F}_0(\xi)|}{|\xi|} > 0$.

Для анализа динамики свободной поверхности рассмотрим три случая.

- 1. Начальная скорость v_0 имеет положительное значение ($v_0 > 0$).
- 2. Начальная скорость v_0 имеет отрицательное значение ($v_0 < 0$).

3. Значение начальной скорости v₀ равно нулю.

Рассмотрим первый случай. Проведем исследование уравнения (38) для $t \ge 0$ при $v_0 > 0$:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sqrt{h(\xi) \left(\frac{1}{m(t)} - 1\right) + v_0^2} .$$
(39)



ISSN 2410-9908

Функция m(t) будет возрастающей при $t \ge 0$. Из уравнения (39), а также неравенств $h(\xi) = \frac{2|\mathbf{F}_0(\xi)|}{|\xi|} > 0; m(t) > 0$ и $v_0^2 < h(\xi)$ следует существование такого момента $t = t_1$, когда скорость частиц газа, находящихся на движущейся свободной поверхности, равна нулю, $\frac{dm(t_1)}{dt} = 0$. При этом

$$m(t_1) = \frac{h(\xi)}{h(\xi) - v_0^2} > 1.$$
(40)

При $t = t_1$ ускорение будет равно

$$\frac{d^2 m(t_1)}{dt^2} = -\frac{|\mathbf{F}_0(\boldsymbol{\xi})|}{m^2(t_1)|\boldsymbol{\xi}|} = -\frac{[h(\boldsymbol{\xi}) - v_0^2]^2}{2h(\boldsymbol{\xi})} < 0.$$

Таким образом, скорость при $t > t_1$ становится отрицательной, и с этого момента движение точек поверхности будет подчиняться уравнению

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\sqrt{h(\xi)\left(\frac{1}{m(t)} - 1\right) + v_0^2},$$
(41)

и функция m(t) будет убывающей. При достижении значения $m(t_2) = 1$ получим $\frac{dm(t_2)}{dt} = -\sqrt{v_0^2} = -v_0$, так как $v_0 > 0$. Таким образом, с момента t_2 описание движения частиц газа поверхности подчиняется второму случаю.

Рассмотрим второй случай: пусть $v_0 < 0$. Тогда при $t \ge 0$ функция m(t) будет убывающей согласно (41), выпуклой вверх как удовлетворяющая уравнению (36). В этом случае подкоренное выражение в (41) будет строго положительно и при $m(t) \rightarrow 0$ будет стремиться к минус бесконечности. Таким образом, во втором случае наблюдается схлопывание изолированного объема самогравитирующего газа, т. е. вся масса газа сжимается (коллапсирует) в одну точку.

В третьем случае, при $v_0 = 0$ и $h(\xi) = 0$, газовое тело будет в состоянии покоя, в силу уравнений (36) и начальных условий (37) получаем, что m(t) = 1 при $t \ge 0$. Уравнение (39) определено при $0 < m(t) \le 1$ и $v_0 = 0$, и функция m(t) будет определяться из уравнения (41), которое имеет явное решение

$$\arcsin \sqrt{1-m(t)} + \sqrt{1-m(t)} \sqrt{m(t)} = \sqrt{h(\xi)} t.$$

Отсюда следует, что при $m(t) \to 0 \to \mathbf{0}$ время стремится к предельному значению, $t \to \frac{\pi}{2} h^{-\frac{1}{2}}(\xi)$ – времени схлопывания всей массы газа.

При коллапсе газа в рассмотренных случаях плотность газового тела, удовлетворяющая уравнению неразрывности (16) в лагранжевых координатах, и давление, определенное равенством (4), при $m(t) \rightarrow 0$ растут неограниченно. При этом гравитационная сила остается



ISSN 2410-9908

конечной, в итоге сжатие газа сменяется его расширением (взрывом). Движение будет управляться уравнениями, описанными выше. Данный процесс периодически повторяется. Таким образом, с момента t = 0 это движение, согласно определению Л. В. Овсянникова [21], можно назвать «газовым маятником» – по аналогии с обычными колебаниями физического маятника.

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

3.2. Вычислительные методы в исследовании динамики свободной поверхности математической модели движущегося самогравитирующего газа с линейным полем скоростей

Для исследования динамики свободной поверхности можно использовать два уравнения:

1) дифференциальное уравнение (36) с начальными условиями (37);

2) нелинейное интегральное уравнение

$$m(t) = 1 + v_0 t - \frac{h(\xi)}{2} \int_0^t \frac{t - \tau}{m^2(\tau)} d\tau .$$
(42)

Уравнение (42) может быть решено методом последовательных приближений:

$$m_{0}(t) = 1,$$

$$m_{1}(t) = 1 + v_{0}t - \frac{h(\xi)}{4}t^{2}, \dots,$$

$$m_{n+1}(t) = 1 + v_{0}t - \frac{h(\xi)}{2}\int_{0}^{t} \frac{t - \tau}{m_{n}^{2}(\tau)}d\tau, \dots.$$
(43)

Закон движения свободной границы в этом случае зависит от двух ограниченных параметров: $h(\xi)$, v_0 . Для уравнения (42) справедлива теорема существования и единственности решения [22] в пространстве бесконечно дифференцируемых функций в области $\overline{\Omega}_0 = [0,T] \times [1/N_1, N_2]$, где N_1 и N_2 – положительные константы, N_2 столь угодно велика, поскольку функция $f(m) = 1/m^2$ удовлетворяет условию Липшица в области $\overline{\Omega}_0$ при $\varepsilon = 1/N_1 \le m(t) \le N_2$.

4. Пример

Пусть Ω_0 – шар с радиусом R, $\rho = const$. Тогда для любой точки $\xi \in \Gamma_0$:

$$|F_0(\xi)| = \frac{4\pi R}{3} G\rho, \ h(\xi) = \frac{8\pi}{3} G\rho = u^2.$$
(44)

В этом случае уравнения (39) и (41) имеют аналитические решения. Рассмотрим сначала случай $v_0 > 0$. Общий интеграл уравнения

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sqrt{u^2 \left(\frac{1}{m(t)} - 1\right) + v_0^2}$$
(45)

имеет вид



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

http://dream-journal.org

ISSN 2410-9908

$$-\frac{\sqrt{\left[u^{2}-\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m\right]m}}{u^{2}-v_{0}^{2}}+\frac{u^{2}}{2\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)\sqrt{u^{2}-v_{0}^{2}}}\times$$

$$\times \operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m-u^{2}}{2\sqrt{u^{2}-v_{0}^{2}}\sqrt{\left[u^{2}-\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m\right]m}}\right)+C=t.$$
(46)

С учетом начального условия m(0) = 1, имеем частный интеграл:

$$-\frac{\sqrt{\left[u^{2}-\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m\right]m}-v_{0}}{u^{2}-v_{0}^{2}}+\frac{u^{2}}{2\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)\sqrt{u^{2}-v_{0}^{2}}}\times$$

$$\times\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m-u^{2}}{2\sqrt{u^{2}-v_{0}^{2}}\sqrt{\left[u^{2}-\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m\right]m}}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{u^{2}-2v_{0}^{2}}{2\sqrt{u^{2}-v_{0}^{2}}v_{0}}\right)\right]=t.$$
(47)

Значение m'(t) становится равным нулю в момент $t = t_1$, когда $m_1 = m(t_1) = \frac{u^2}{u^2 - v_0^2}$.

Отсюда

$$t_{1} = \frac{v_{0}}{u^{2} - v_{0}^{2}} + \frac{u^{2}}{2(u^{2} - v_{0}^{2})\sqrt{u^{2} - v_{0}^{2}}} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{u^{2} - 2v_{0}^{2}}{2\sqrt{u^{2} - v_{0}^{2}}v_{0}}\right)\right].$$
(48)

Для $t > t_1$ функция m(t) удовлетворяет уравнению

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\sqrt{u^2 \left(\frac{1}{m(t)} - 1\right) + v_0^2},$$
(49)

общий интеграл которого имеет вид

$$\frac{\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}}{u^2 - v_0^2} - \frac{u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}} \times x + \operatorname{arctg}\left(\frac{2(u^2 - v_0^2)m - u^2}{2\sqrt{u^2 - v_0^2}\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}}\right) + C = t.$$
(50)

Подставив начальное условие $m(t_1) = m_1$, получаем

$$\frac{\sqrt{\left[u^{2}-\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m\right]m}}{u^{2}-v_{0}^{2}}-\frac{u^{2}}{2\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)\sqrt{u^{2}-v_{0}^{2}}}\times \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{2\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m-u^{2}}{2\sqrt{u^{2}-v_{0}^{2}}\sqrt{\left[u^{2}-\left(u^{2}-v_{0}^{2}\right)m\right]m}}\right)-\frac{\pi}{2}\right]+t_{1}=t.$$
(51)



ISSN 2410-9908

Функция m(t) примет нулевое значение в момент

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}}.$$
(52)

Дальнейшая эволюция m(t) описывается уравнениями (45) и (46) с начальным условием

$$m(t_2) = 0 \tag{53}$$

вплоть до момента t_3 , когда производная m'(t) примет нулевое значении.

Аналитическое построение решения при $v_0 \le 0$ выполняется аналогично. На первом этапе строим убывающий участок решения вида (50), при достижении нулевого значения строим далее возрастающий участок вида (46), и т. д.

Рассматриваемая задача о движении в вакууме изолированной массы самогравитирующего идеального газа является математической моделью эволюции звезд. Поэтому для численных расчетов будем использовать параметры данных астрономических объектов.

Проиллюстрируем решения при $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{c}^2); \rho = 1400 \text{ кг/м}^3;$ $v_0 = \pm 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ м/c. B}$ этом случае $h(\mathbf{0}) = u^2 \approx 7,8 \cdot 10^{-7} 1/c^2$. При принятых значениях параметров график функции m(t) при $v_0 > 0$ имеет вид, изображенный на рис. 1. При этом $t_1 \approx 2356; t_2 \approx 5708.$



Рис. 1. Решение при $v_0 > 0$

На рис. 2 представлен график функции m(t) при $v_0 < 0$.

Построим теперь при тех же параметрах задачи решение интегрального уравнения (42), используя итерационную процедуру (43). Поскольку аналитическое вычисление интегралов на каждой итерации вряд ли возможно, они вычислялись численно, методом левых прямоугольников. Учитывая масштаб времени (рис. 1 и 2), был принят шаг по времени h = 1. На рис. 3. показана сходимость итерационного процесса.





Рис. 2. Решение при $v_0 < 0$



Рис. 3. Итерационное решение: 1 – интерация 1; 2 – интерация 5; 3 – интерация 10

Отметим, что итерационный процесс достаточно быстро сходится к аналитическому решению (первая петля на рис. 1). Необходимая точность легко достигается уменьшением шага по времени.

4. Заключение

В работе рассмотрена задача исследования эволюции движущегося в вакууме конечного объема самогравитирующего идеального газа со свободной границей. Математическая модель имеет вид системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений газовой динамики, записанной в форме Эйлера. Преобразование данной системы к лагранжевым координатам позволило свести ее к эквивалентной системе, состоящей из интегральных уравнений типа Вольтерра и уравнения неразрывности в лагранжевой форме. Решение системы интегральных уравнений определяет отображение области Ω_0 в область движущегося газа $\Omega_t \in R^4(\mathbf{x}, t)$ в момент времени t. Свободная граница является также образом точек решения системы интегральных уравнений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)$ при отображении $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma_0$ в точки $\mathbf{x} \in \Gamma_t$. Тем самым задача по определению закона движения свободной границы



становится также задачей об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$. Исследована динамика свободной границы при осуществлении движения идеального газа, при котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что предлагаемый алгоритм последовательного эквивалентного перехода от интегро-дифференциальной системы газовой динамики, описывающей движение самогравитирующего газа, к системе интегральных уравнений типа Вольтерра, позволяет найти решение этой системы методом последовательных приближений. Данный метод создает перспективы для дальнейшего изучения закономерностей движений конечных масс газа и исследования задач, возникающих в астрофизике и космогонии. Проведенные расчеты позволили сделать представление полученных результатов более понятным и наглядным.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-07-00407.

Литература

1. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия / пер. с англ.; под ред. В. В. Румянцева. – М. : Мир, 1973. – 288 с.

2. Ламб Г. Гидродинамика / пер. с англ.; под ред. Н. А. Слезкина. – М.; Л. : ОГИЗ, 1947. – 929 с.

3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М. : Наука, 1987. – 432 с.

4. Седов Л.И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 90, № 5. – С. 735–739.

5. Bogoiavlenskii O. I. Dynamics of a gravitating gaseous ellipsoid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1976. – Vol. 40, iss. 2. – P. 246–256. – DOI: 10.1016/0021-8928(76)90061-7.

6. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. – Новосибирск : Наука, 1967. – С. 5–75.

7. Овсянников Л. В. Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости // Труды V сессии Ученого совета по народно-хозяйственному использованию взрыва. – Фрунзе : Илим, 1965. – С. 34–42.

8. Лаврентьева О. М. О движении жидкого эллипсоида // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 253, № 4. – С. 828–831.

9. Страховская Л. Г. Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2012. – № 80. – С. 1–24.

10. Parshin D. V., Cherevko A. A. & Chupakhin A. P. Steady vortex flows of a self-gravitating gas // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2014. – Vol. 55. – P. 327–334. – DOI: 10.1134/S0021894414020151.

11. Ovsyannikov L. V. Singular vortex // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1995. – Vol. 36. – P. 360–366. – DOI: 10.1007/BF02369772.

12. Chuev N. P. On the existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for a system of integral equations describing the motion of a rarefied mass of a self-gravitating gas // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2020. - Vol. 60, No. 4. - P. 663–672. - DOI: 10.1134/S0965542520040077.

13. Легкоступов М. С. К вопросу о модели образования планетных систем звезд солнечного типа // Математическое моделирование. – 2020. – Т. 32, № 3. – С. 81–101.

14. Чуев Н. П. Аналитический метод исследования пространственных задач динамики самогравитирующего газа // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 79–89.



15. Чуев Н. П. Задача Коши для системы интегральных уравнений типа Вольтерра, описывающей движение конечной массы самогравитирующего газа // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. – 2020. – Т. 33. – С. 35–50. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.33.35.

16. Чуев Н. П. Метод интегральных уравнений Вольтерра в исследовании динамики самогравитирующего газа, ограниченного свободной поверхностью // Вестник УрГУПС. – 2022. – № 2 (54). – С. 4–23.

17. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М. : Наука, 1971. – 875 с.

18. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М. : Гостехиздат, 1953. – 415 с.

19. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. – М. ; Л. : ОГИЗ, 1946. –318 с.

20. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. – М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.

21. Ovsyannikov L. V. A gas pendulum // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2000. – Vol. 41. – P. 865–869. – DOI: 10.1007/BF02468732.

22. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. – 2-е изд., стереот. – М. : Физматлит, 2002. – 160 с.



Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

ISSN 2410-9908

Received: 27.06.2022 Revised: 25.07.2022 Accepted: 26.08.2022 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.081-089

STUDYING SUPERCRITICAL DEFORMATIONS OF FLAT ELLIPSOIDAL PANELS OF CONSTANT THICKNESS

V. V. Chupin^{a)} and D. E. Chernogubov^{b)}*

B. N. Yeltsin Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation

^{a)} **b** https://orcid.org/0000-0001-9745-1593 **v.v.chupin@urfu.ru**; ^{b)} **b** https://orcid.org/0000-0002-3783-7897 **v.v.chupin@urfu.ru**

*Corresponding author. E-mail: d.e.chernogubov@urfu.ru Address for correspondence: 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation Tel.: +7 (343) 375 45 33

An algorithm is developed for studying the stress-strain state of elastic thin-walled shell systems consisting of shells of revolution. Based on this algorithm, a computer program is written which allows one to determine the stress-strain parameters of shells in a wide range of geometric, physical, and force parameters. Supercritical deformations of flat ellipsoidal panels of constant thickness are studied.

Keywords: shell, deformation, deflection.

References

1. Valishvili N.V. *Metody rascheta obolochek vrashcheniya na ETSVM* [Methods for Calculating Shells of Revolution on a Computer]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1976, 278 p. (In Russian).

2. Volmir A.S. *Gibkie plastiny i obolochki* [Flexible plates and shells]. Moscow, GITL Publ., 1956, 420 p. (In Russian).

3. Vorovich I.V. and Minakova N.I. *Problema ustoychivosti I chislennye metody v teorii sfericheskikh obolochek* [Stability Problems and Numerical Methods in the Theory of Spherical Shells, Results of Science and Technology. Mechanics of Solid Deformable Bodies: vol. 7]. Moscow, VINITI Publ., 1974, pp. 5–86. (In Russian).

4. Gavryushin S.S. Numerical modeling and analysis of the processes of nonlinear deformation of flexible shells. *Izvestiya RAN, MTT*, 1994, no. 1, pp. 109–119. (In Russian).

5. Grigolyuk E.I. and Mamai V.I., *Mekhanika deformirovaniya sfericheskikh obolochek* [Deformation Mechanics for Spherical Shells]. Moscow, Izd-vo MGU Publ., 1983.

6. Grigolyuk E.I., Lopanitsyn E.A. Influence of Axisymmetric Initial Imperfections of a Spherical Shell on its Critical Load. *Izvestiya MGTU MAMI*, 2008, vol. 2, No. 1, pp. 233–246. DOI: 10.17816/2074-0530-69752. (In Russian).

7. Grigolyuk E.I., Lopanitsyn Ye.A. The axisymmetric postbuckling behaviour of shallow spherical domes. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 2002, vol. 66, iss. 4, pp. 605–616. DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00079-5.

8. Grigolyuk E.I., Lopanitsyn E.A. Asymmetric behavior of a sloping spherical shell under finite deflections. *Doklady Physics*, 2003, vol. 48, pp. 80–83. DOI: 10.1134/1.1560736.

9. Karmishin A.V., Lyaskovets V.A., Myachenkov V.I., Frolov A.N. *Statika i dinamika tonkostennykh obolochechnykh konstruktsiy* [Statics and dynamics of thin-walled shell structures]. Moscow, Mashinostroenie Publ., 1975, 376 p. (In Russian).



10. Kornishin M.S. Nelineynye zadachi teorii plastin i pologikh obolochek i metody ikh resheniya [Nonlinear problems of the theory of plates and shallow shells and methods for their solution]. Moscow, Nauka Publ., 1964, 192 p. (In Russian).

11. Bazhenov V.A., Solovei N.A., Krivenko O.P., Mishchenko O.A. Modeling of nonlinear deformation and buckling of elastic inhomogeneities shells. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*, 2014, No. 5, pp. 14–33. (In Russian).

12. Mushtari H.M., Galimov K.Z. Nelineynaya teoriya uprugikh obolochek [The nonlinear theory of elastic shells]. Kazan, Tatknigoizdat Publ., 1957, 431 p. (In Russian).

13. Novozhilov V.V. Osnovy nelineynoy teorii uprugosti [Fundamentals of nonlinear elasticity]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1948, 211 p. (In Russian).

14. Feodosev V.I. To the calculation of a flapping membrane. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1946, No. 10 (2), pp. 295–300. (In Russian).

15. Chupin V.V., Chernogubov D.E. Silnyy izgib i ustoichivost sostavnykh obolochek vrashcheniya pri osesimmetrichnom nagruzhenii s uchetom plasticheskikh deformatsiy [Tight Bending and Stability of Compound Shells of Revolution Under Axisymmetric Loading with Allowance Made for Plastic Strains]: monograph. VINITI RAN, 2018, No. 102-B2018, 285 p. (In Russian).

16. Chupin V.V., Chernogubov D.E. Stability of flexible spherical panels of variable thickness under various fixing conditions. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2015, iss. 5, pp. 45–57. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.045-057. Available at: https://dream-journal.org/issues/2015-5/2015-5_36.html

17. Von Kármán T., Tsien H.-S. The buckling of spherical shells by externals pressure. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 1939, vol. 7, No. 2. pp. 43–50. DOI: 10.2514/8.1019.

18. Mescall J. Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution. *AIAA Journal*, 1966, vol. 4, No. 11. pp. 2041–2043. DOI: 10.2514/3.3839.



Подана в журнал: 27.06.2022 УДК 539.3 DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.081-089

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАКРИТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛОГИХ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫХ ПАНЕЛЕЙ ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ

Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures Issue 4, 2022

В. В. Чупин^{а)}, Д. Е. Черногубов^{б)}*

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», д. 19, ул. Мира, г. Екатеринбург, Российская Федерация

> ^{a)} **b** https://orcid.org/0000-0001-9745-1593 **v.v.chupin@urfu.ru**; ⁶⁾ **b** https://orcid.org/0000-0002-3783-7897 **v.v.chupin@urfu.ru**;

*Ответственный автор. Электронная почта: d.e.chernogubov@urfu.ru Адрес для переписки: ул. Мира, 19, Екатеринбург, Российская Федерация Тел.: +7 (343) 375–45–33

Разработан алгоритм исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) упругих тонкостенных оболочечных систем, состоящих из оболочек вращения. На основе данного алгоритма написана программа для ЭВМ, позволяющая определять параметры НДС оболочек в широком диапазоне изменения геометрических, физических и силовых параметров. Исследованы закритические деформации пологих эллипсоидальных панелей постоянной толщины.

Ключевые слова: оболочка, деформация, прогиб.

1. Введение

Тонкостенные оболочечные конструкции применяются в различных областях современной техники и являются хорошо изученным разделом механики твердых деформируемых тел. В таких конструкциях под действием нагрузок могут возникать перемещения, не укладывающиеся в рамки линейной теории, что приводит к необходимости учета геометрической нелинейности [2, 12, 13]. Использование нелинейной теории позволяет лостаточной лля инженерной практики точностью определять с напряженно деформированное состояние различного вида оболочек как в случае малых, так и больших прогибов. Однако с помощью этих уравнений значения критических нагрузок оказываются значительно больше значений получаемых в результате экспериментов. Для хорошо изученных сферических оболочек теоретически полученные значения критических нагрузок почти в 4 раза больше экспериментальных [6, 8]. Причин такого несовпадения результатов несколько. Это наличие у оболочки начальных неправильностей, начальных напряжений, отличие условий нагружения и закрепления от учитываемых в математической модели, неоднородность свойств материала, несимметричность деформирования и т.п. [6]. Наибольшее количество исследований по сферическим оболочкам выполнено для жестко заделанного по контуру упругого пологого сферического купола, нагруженного равномерным поперечным давлением [1, 3, 5, 9, 10, 14, 17, 18]. Дальнейшие развитие численные расчеты гибких оболочек получили при использовании метода продолжения по параметру [4, 7, 18]. Современные тенденции развития строительной механики побуждают разрабатывать уточненные методы исследования нелинейного деформирования И устойчивости оболочек. Проектируются оболочки гладкие, ступенчато переменной толщины, с изломами, подкрепленные ребрами и накладками, ослабленные отверстиями, выемками и каналами, граненые, многослойные [11].



ISSN 2410-9908

Таким образом, развитие методов расчета оболочек и учет их начальных несовершенств является актуальным и имеет важное прикладное значение.

2. Задача исследования сильного изгиба упругой оболочки вращения

http://dream-journal.org

Будем рассматривать геометрически нелинейную задачу сильного изгиба тонких изотропных оболочек вращения, в которой не накладывается никаких ограничений на величины углов поворота нормали к исходной координатной поверхности, а относительная линейная деформация мала по сравнению с единицей. Нагрузка, действующая на оболочку, предполагается осесимметричной.

Для оболочки, испытывающей осесимметричную деформацию, уравнения равновесия в координатах деформированной поверхности имеют вид [15]:

$$\frac{d\left(\tilde{r}\tilde{N}_{s}\right)}{d\tilde{s}} - \tilde{N}_{\theta}\cos\tilde{\varphi} + \tilde{r}\frac{\tilde{Q}_{s}}{\tilde{R}_{s}} + \tilde{r}\tilde{q}_{s} = 0;$$

$$\frac{d\left(\tilde{r}\tilde{Q}_{s}\right)}{d\tilde{s}} - \tilde{r}\left(\frac{\tilde{N}_{s}}{\tilde{R}_{s}} + \frac{\tilde{N}_{\theta}}{\tilde{R}_{\theta}}\right) + \tilde{r}\tilde{q}_{\zeta} = 0;$$

$$\frac{d\left(\tilde{r}\tilde{M}_{s}\right)}{d\tilde{s}} - \tilde{M}_{\theta}\cos\tilde{\varphi} - \tilde{r}\tilde{Q}_{s} - \tilde{m}_{s} = 0.$$
(1)

Здесь N_s , Q_s , M_s – продольные, поперечные силы и изгибающие моменты в меридиональном направлении; N_{θ} , M_{θ} – усилия в окружном направлении; R_s , R_{θ} – радиусы главных кривизн в меридиональном и окружном направлениях; r – радиус параллельного круга;

s – длина дуги меридиана; q_s – касательная и q_{ζ} – нормальная составляющие распределенных нагрузок; m_s – внешний распределенный момент. Тильдами сверху отмечены величины, относящиеся к деформированному состоянию оболочечного элемента.

Геометрия оболочки вращения после деформации связана с недеформированным состоянием следующим образом:

 $\tilde{r} = r + \tilde{u}_r; \quad \tilde{z} = z + \tilde{u}_z; \quad \tilde{\varphi} = \varphi + \tilde{\theta}_s,$

где θ_s – угол поворота нормали деформированной поверхности.

Нормальное и касательное перемещения точки поверхности:

$$\tilde{u} = \tilde{u}_x \cos \tilde{\varphi} + \tilde{u}_z \sin \tilde{\varphi}; \quad \tilde{w} = \tilde{u}_x \sin \tilde{\varphi} - \tilde{u}_z \cos \tilde{\varphi}.$$

Геометрические соотношения для оболочки в предположении осесимметричной деформации:



ISSN 2410-9908

$$\frac{d\tilde{u}_{x}}{ds} = \tilde{\varepsilon}_{s}\cos\tilde{\varphi} + \cos\tilde{\varphi} - \cos\varphi;$$

$$\frac{d\tilde{u}_{z}}{ds} = \tilde{\varepsilon}_{s}\sin\tilde{\varphi} + \sin\tilde{\varphi} - \sin\varphi;$$

$$\frac{d\tilde{\theta}_{s}}{ds} = \frac{d\tilde{\varphi}}{ds} - \frac{d\varphi}{ds} = (1 + \tilde{\varepsilon}_{s})\tilde{\chi}_{s} + \frac{\tilde{\varepsilon}_{s}}{R_{s}};$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\theta} = \frac{\tilde{u}_{x}}{r}; \quad \tilde{\chi}_{\theta} = \frac{\sin\tilde{\varphi}}{\tilde{r}} - \frac{\sin\varphi}{r};$$

$$\tilde{\chi}_{s} = \frac{1}{\tilde{R}} - \frac{1}{R_{s}}; \quad \tilde{\varepsilon}_{s} = \frac{d\tilde{u}}{ds} + \frac{\tilde{w}}{R_{s}} + \frac{1}{2}(\tilde{\theta}_{s})^{2} + \dots .$$
(2)

Здесь ε_s, ε_θ, χ_s, χ_θ – относительные деформации удлинения и изменения кривизны срединной поверхности оболочки в меридиональном и окружном направлениях.

Соотношения упругости, связывающие усилия и моменты с компонентами полной деформации с учетом гипотезы недеформируемых нормалей имеют вид

$$\begin{split} \tilde{N}_{s} &= C_{11}\tilde{\varepsilon}_{s} + C_{12}\tilde{\varepsilon}_{\theta} + K_{11}\tilde{\chi}_{s} + K_{12}\tilde{\chi}_{\theta}; \\ \tilde{N}_{\theta} &= C_{21}\tilde{\varepsilon}_{s} + C_{22}\tilde{\varepsilon}_{\theta} + K_{21}\tilde{\chi}_{s} + K_{22}\tilde{\chi}_{\theta}; \\ \tilde{S} &= C_{66}\tilde{\varepsilon}_{s\theta} + 2K_{66}\tilde{\chi}_{s\theta}; \\ \tilde{M}_{s} &= K_{11}\tilde{\varepsilon}_{s} + K_{12}\tilde{\varepsilon}_{\theta} + D_{11}\tilde{\chi}_{s} + D_{12}\tilde{\chi}_{\theta}; \\ \tilde{M}_{\theta} &= K_{21}\tilde{\varepsilon}_{s} + K_{22}\tilde{\varepsilon}_{\theta} + D_{21}\tilde{\chi}_{s} + D_{22}\tilde{\chi}_{\theta}; \\ \tilde{H} &= K_{66}\tilde{\varepsilon}_{s\theta} + D_{66}\tilde{\chi}_{s\theta}. \end{split}$$
(3)

Здесь N_s , N_{θ} и S – мембранные усилия; M_s , M_{θ} и H – изгибающие и крутящий моменты; $\varepsilon_{s\theta}$ – относительная деформация сдвига; $\chi_{s\theta}$ – кручение координатной поверхности; C_{mp} , K_{mp} , D_{mp} (m, p = 1, 2) – коэффициенты упругости.

Для изотропных оболочек

$$C_{11} = C_{22} = \frac{Eh}{1 - v^2}; \quad C_{12} = vC_{11}; \quad C_{66} = \frac{Eh}{2(1 + v)};$$
$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1 - v^2)}; \quad D_{12} = vD_{11}; \quad D_{66} = \frac{Eh^3}{24(1 + v)};$$
$$K_{11} = K_{12} = K_{22} = K_{66} = 0,$$

где *Е* – модуль упругости; v – коэффициент Пуассона; *h* – толщина оболочки.

Для получения разрешающей системы уравнений уравнения (1), (2) и (3) необходимо дополнить граничными условиями.

Например, для жестко защемленного левого края и свободного правого:

$$\tilde{u}_x = \tilde{u}_z = \tilde{\theta}_s = 0$$
, при $s = s_0$;
 $\tilde{N}_x = \tilde{N}_z = \tilde{M}_s = 0$, при $s = s_N$.



Для решения задачи использовался метод Ньютона–Канторовича, сводящий нелинейную краевую задачу к итерационной последовательности линейных краевых задач. При решении линейных краевых задач применялся метод сведения их к ряду задач Коши, которые интегрировались численно, методом Рунге–Кутта. Для обеспечения устойчивости решения жестких задач Коши применен метод дискретной ортогонализации С. К. Годунова.

3. Исследование закритических деформаций пологих эллипсоидальных панелей постоянной толщины

Исследовано напряженно-деформированное состояние пологих эллипсоидальных панелей постоянной толщины с защемлением на внешнем контуре под действием равномерного внешнего давления (рис. 1).



Рис. 1. Расчетная схема оболочки

Оболочки (рис. 2) имеют характеристики: модуль упругости E = 200 ГПа; коэффициент Пуассона v = 0,3; толщина h = 1 мм; радиус опорного контура c = 100 мм. Образующие оболочек очерчены в плоскости z0x по эллипсам, радиусы кривизны которых в полюсе (точка B') равны радиусу кривизны сферической панели [16] $R_0 = 516,5$ мм с параметром

пологости [7] $b = \sqrt[4]{12(1-v^2)} \frac{c}{\sqrt{Rh}} = 8.$



Рис. 2. Схемы сферической и эллипсоидальных оболочек

Параметры оболочек представлены в табл. 1.

Таблица 1

№ п.п.	Оболочка	Радиусы кривизны, мм			Полуоси эллипса	
		т. <i>В</i> и <i>В'</i> (в полюсе)	т. <i>С</i> (на опоре)	Δ , mm	<i>a</i> , MM	<i>b</i> , мм
1	Сфера	516,5	516,5	0	516,5	516,5
2	Эллипсоид		383,6	0,5	214,48	89,07

Параметры оболочек



ISSN 2410-9908

3		285,16	1,0	165,64	53,12
4		211,97	1,5	143,56	39,90
5		157,43	2,0	130,79	33,12

На рис. 3 приведены кривые деформирования оболочек в координатах: внешняя нагрузка – прогиб полюса при изменении высоты H, где $\Delta = 0...2$ мм. Номера кривых соответствуют номерам табл. 1.

Кривые 1, 2 и 3 имеют петли, а на кривых 4 и 5 петли пропадают и остаются только четыре предельные точки для кривой 4: *a*, *б*, *в*, *г*.

Для определения момента исчезновения петли и перехода к кривой с четырьмя предельными точками получены две кривые, представленные на рис. 4. Здесь, на кривой 2, точка

б – предельная. Параметры оболочек, соответствующие этим кривым, приведены в табл. 2.



Рис. 3. Кривые деформирования оболочек: $1 - сфера, \Delta = 0; 2 - эллипсоид, \Delta = 0,5$ мм; $3 - эллипсоид, \Delta = 1$ мм; $4 - эллипсоид, \Delta = 1,5$ мм; $5 - эллипсоид, \Delta = 2$ мм;



ISSN 2410-9908



Рис. 4. Кривые деформирования оболочек: I – эллипсоид, Δ = 1,26 мм; 2 – эллипсоид, Δ = 1,27 мм; a, δ , e – предельные точки

Таблица 2

		Π	Іараметры оболо	чек		
№ п.п.	Оболочка	Радиусы кривизны, мм			Полуоси эллипса	
		т. В'	т. С	Δ, мм	а, мм	<i>b</i> , мм
		(в полюсе)	(на опоре)			
1	эллипсоид	516,5	244,42	1,26	152,46	45,00
2			242,97	1,27	152,04	44,75



Рис. 5. Кривые прогибов: 1 – точка а; 2 – точка б; 3 – точка в



ISSN 2410-9908

На рис. 5 представлены кривые прогибов оболочки с $\Delta = 1,27$ мм для точек *a*, *б*, *в* (рис. 4). При переходе от точки а к точке б происходит прощелкивание кольцевого пояса вблизи центра и около опорного контура.

Выполненные расчеты по разработанной авторами программе показали эффективность использованных алгоритмов.

Литература

Валишвили Н. В. Методы расчета оболочек вращения на ЭЦВМ. – М. : 1. Машиностроение, 1976. – 278 с.

2. Вольмир А. С. Гибкие пластины и оболочки. – М. : Гостехиздат, 1956. – 420 с.

3. Ворович И. И., Минакова Н. И. Проблема устойчивости и численные методы в теории сферических оболочек. - М. : ВИНИТИ, 1973. - С. 5-86.

Гаврюшин С. С. Численное моделирование и анализ процессов нелинейного дефор-4. мирования гибких оболочек // Известия РАН, МТТ. – 1994. – № 1. – С. 109–119.

Григолюк Э. И., Мамай В. И. Механика деформирования сферических оболочек. -5. М.: Изд-во МГУ, 1983. – 114 с.

6. Григолюк Э. И., Лопаницын Е. А. Влияние осесимметричных начальных неправильностей сферической оболочки на ее критическую нагрузку // Известия МГТУ МАМИ. -2008. – № 1 (5). – C. 233–246.

Grigolyuk E. I., Lopanitsyn Ye. A. The axisymmetric postbuckling behaviour of shallow 7. spherical domes // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. - 2002. - Vol. 66, iss. 4. -P. 605-616. - DOI: 10.1016/S0021-8928(02)00079-5.

8. Grigolyuk E. I., Lopanitsyn E. A. Asymmetric behavior of a sloping spherical shell under fi-nite deflections // Doklady Physics. - 2003. - Vol. 48. - P. 80-83. - DOI: 10.1134/1.1560736.

Статика и динамика тонкостенных оболочечных конструкций / А. В. Кармишин, 9. В. А. Ляскович, В. И. Мяченков, А. Н. Фролов. – М. : Машиностроение, 1975. – 376 с.

Корнишин М. С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их 10. решения. – М. : Наука, 1964. – 192 с.

11. Моделирование нелинейного деформирования и потери устойчивости упругих неоднородных оболочек / В. А. Баженов, Н. А. Соловей, О. П. Кривенко, О. А. Мищенко // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2014. – № 5. – С. 14–33.

12. Муштари Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. - Казань : Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.

Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. – М. : Гостехиздат, 1948. – 13. 211 c.

14. Феодосьев В. И. К расчету хлопающей мембраны // Прикладная математика и механика. - 1946. - Т. 10, № 2. - С. 295-300.

Чупин В. В., Черногубов Д. Е. Сильный изгиб и устойчивость составных оболочек 15. вращения при осе-симметричном нагружении с учетом пластических деформаций : монография / деп. в ВИНИТИ РАН 10.09.2018. - № 102-В2018. - 285 с.

Chupin V. V., Chernogubov D. E. Stability of flexible spherical panels of variable thickness 16. under various fixing conditions // Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures. -2015. - Iss. 5. - P. 45-57. - DOI: 10.17804/2410-9908.2015.5.045-057. URL: https://dreamjournal.org/issues/2015-5/2015-5 36.html

17. Kármán T., Tsien H. The buckling of spherical shells by externals pressure // Journal of the Aeronautical Sciences. - 1939. - Vol. 7, No. 2. - P. 43-50. - DOI: 10.2514/8.1019.

Mescall J. Numerical solutions of nonlinear equations for shells of revolution // AIAA 18. Journal. - 1966. - Vol. 4, No. 11. - P. 2041-2043. - DOI: 10.2514/3.3839.