

DREAM

<http://dream-journal.org>

ISSN 2410-9908

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1

Diagnostics, Resource and Mechanics
of materials and structures

<http://dream-journal.org>

1,2022
January-February

Editor-in-Chief: **Sergey V. Smirnov**
Deputy Editors-in-Chief: **Sergey V. Gladkovsky**
Deputy Editors-in-Chief: **Evgenii Yu. Prosviryakov**

Editorial Council

Anatoly A. Burenin (Russia)
Irina G. Goryacheva (Russia)
Janez Grum (Slovenia)
Mikhail P. Lebedev (Russia)
Leopold I. Leontiev (Russia)
Evgeny V. Lomakin (Russia)
Valery P. Matveenko (Russia)
Nikolay A. Makhutov (Russia)
Nikita F. Morozov (Russia)
Vladimir V. Moskvichev (Russia)
Sergey V. Panin (Russia)
Vasily M. Fomin (Russia)
Shao Wen-zhu (China)

Editorial Board

Boris V. Artemyev (Moscow)
Vladimir A. Bataev (Novosibirsk)
Aleksandr K. Belyaev (St.-Peterburg)
Vera V. Berezovskaya (Ekaterinburg)
Sergey V. Burov (Ekaterinburg)
Vladimir O. Vaskovsky (Ekaterinburg)
Dmitry I. Vichuzhanin (Ekaterinburg)
Vladimir G. Degtyar (Miass)
Igor G. Emelyanov (Ekaterinburg)
Sergey M. Zadvorkin (Ekaterinburg)
Alexander G. Zalazinsky (Ekaterinburg)
Anatoly V. Konovalov (Ekaterinburg)
Vladimir N. Kostin (Ekaterinburg)
Aleksey V. Makarov (Ekaterinburg)
Vladimir A. Mironov (Ekaterinburg)
Radik R. Mulyukov (Ufa)
Vitaly V. Muravyov (Izhevsk)
Aleksandr P. Nichipuruk (Ekaterinburg)
Oleg A. Plekhov (Perm)
Anna M. Povolotskaya (Ekaterinburg)
Nataliya B. Pugacheva (Ekaterinburg)
Igor Yu. Pyshmintsev (Chelyabinsk)
Anatoly B. Rinkevich (Ekaterinburg)
Roman A. Savray (Ekaterinburg)
Alexander S. Smirnov (Ekaterinburg)
Alexander I. Ulyanov (Izhevsk)
Yulia V. Khudorozhkova (Ekaterinburg)

Eelena E. Verstakova, editor of the English translation
Irina M. Tsiklina, editor of Russian texts
Anna V. Garieva, maker-up
Galina V. Torlopova, associate editor
Raul N. Shakirov, site admin

Postal address: Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya st., 620049,
Ekaterinburg, Russian Federation
phone: +7 (343) 375-35-83,
fax: +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
<http://dream-journal.org>

Главный редактор: Смирнов Сергей Витальевич, д.т.н.
Заместитель главного редактора: **Сергей Викторович Гладковский, д.т.н.**
Заместитель главного редактора: **Евгений Юрьевич Просвиряков, д.ф.-м.н.**

Редакционный совет:

Буренин Анатолий Александрович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Горячева Ирина Георгиевна, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Грум Янез, Ph.D, (Республика Словения)
Лебедев Михаил Петрович, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Леонтьев Леопольд Игоревич, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Ломакин Евгений Викторович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Матвеев Валерий Павлович, академик РАН, д.т.н. (Россия)
Махутов Николай Андреевич, член-корр. РАН, д.т.н. (Россия)
Морозов Никита Федорович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Москвичев Владимир Викторович, д.т.н. (Россия)
Панин Сергей Викторович, д.т.н. (Россия)
Фомин Василий Михайлович, академик РАН, д.ф.-м.н. (Россия)
Шао Вэнь-чжу, профессор (Китай)

Редакционная коллегия:

Артемьев Борис Викторович, д.т.н., (Москва)
Батаев Владимир Андреевич, д.т.н. (Новосибирск)
Беляев Александр Константинович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н., (Санкт-Петербург)
Березовская Вера Владимировна, д.т.н., (Екатеринбург)
Буров Сергей Владимирович, к.т.н. (Екатеринбург)
Васьковский Владимир Олегович, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Вичужанин Дмитрий Иванович, к.т.н. (Екатеринбург)
Дегтярь Владимир Григорьевич, академик РАН, д.т.н. (Миасс)
Емельянов Игорь Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Задворкин Сергей Михайлович, к.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Залазницкий Александр Георгиевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Коновалов Анатолий Владимирович, д.т.н. (Екатеринбург)
Костин Владимир Николаевич, д.т.н. (Екатеринбург)
Макаров Алексей Викторович, член-корр. РАН, д.т.н. (Екатеринбург)
Миронов Владимир Александрович, д.м.н. (Екатеринбург)
Мулюков Радик Рафикович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Уфа)
Муравьев Виталий Васильевич, д.т.н. (Ижевск)
Ничипурук Александр Петрович, д.т.н. (Екатеринбург)
Плехов Олег Анатольевич, д.ф.-м.н. (Пермь)
Поволоцкая Анна Моисеевна, к.т.н. (Екатеринбург)
Пугачева Наталия Борисовна, д.т.н. (Екатеринбург)
Пышминцев Игорь Юрьевич, д.т.н. (Челябинск)
Ринкевич Анатолий Брониславович, член-корр. РАН, д.ф.-м.н. (Екатеринбург)
Саврай Роман Анатольевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Смирнов Александр Сергеевич, к.т.н. (Екатеринбург)
Ульянов Александр Иванович, д.т.н. (Ижевск)
Худорожкова Юлия Викторовна, к.т.н. (Екатеринбург)

Верстакова Елена Евгеньевна – редактор перевода текста на английский язык
Циклина Ирина Михайловна – редактор текста
Гариева Анна Валерьевна – верстальщик текста
Торлопова Галина Викторовна – помощник редактора
Шакиров Рауль Нурович, к.т.н. – администратор сайта журнала

Адрес редакции:

Россия, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, д. 34., ИМАШ УрО РАН
телефон: +7 (343) 375 35 83, факс +7 (343) 374-53-30
e-mail: dream-journal@mail.ru
http://dream-journal.org

CONTENTS

Klimova O. V. An optimization approach to the development of parallel algorithms for digital signal processing operations	6
Struzhanov V. V. On one model of deformation in laminated composites	16
Gladkovsky S. V., Kamantsev I. S., Veselova V. E. and Khudorozhkova Yu. V. Martensitic transformations in plastic and fracture zones of the 05G20S2 metastable steel during cyclic tests	25
Nazarov V. V. A review of experimental studies of creep and creep rupture strength (2004–2021)	38
Gorshkov A. V. and Prosviryakov E. Yu. Stagnation points of an inhomogeneous solution describing convective ekman flow in the oceanic equatorial zone	52

СОДЕРЖАНИЕ

Климова О. В. Оптимизационный подход к разработке параллельных алгоритмов для операций цифровой обработки сигналов	6
Стружанов В. В. Об одной модели расслоения в слоистых композитах	16
Гладковский С. В., Каманцев И. С., Веселова В. Е., Худорожкова Ю. В. Мартенситные превращения в зонах пластической деформации и разрушения при испытаниях метастабильной стали 05Г20С2 на циклическую трещиностойкость	25
Назаров В. В. Обзор экспериментальных исследований ползучести и длительной прочности (2004–2021 гг.)	38
Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Застойные точки неоднородного решения, описывающего конвективное течение экмана в экваториальной зоне океана	52

Received: 15.12.2021**Revised:** 14.02.2022**Accepted:** 25.02.2022**DOI:** 10.17804/2410-9908.2022.1.006-015

AN OPTIMIZATION APPROACH TO THE DEVELOPMENT OF PARALLEL ALGORITHMS FOR DIGITAL SIGNAL PROCESSING OPERATIONS

O. V. Klimova

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34, Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation* <https://orcid.org/0000-0003-4289-0526>  klimova@imach.uran.ruCorresponding author. E-mail: klimova@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 362 30 35; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper studies the optimization possibilities of an approach which made it possible to develop a formal tool, i.e. a model of computation organization for digital signal processing (DSP) operations and operations structurally similar to them. The resulting formal tool describes the internal parameterized structure of operations and generates adaptive algorithms that can adjust to different conditions of parallel computation. The developed approach to the construction of such algorithms endows them with extended functionality, which ensures the implementation of the following capabilities: changes in the parameters of algorithm structures; synthesis of their variety; optimization of variants of computation organization. Due to the variety of this functionality, several directions are identified for implementing this optimization. A general description of the optimization approach to the reasonable choice of the best variant of computation organization under the given conditions of their implementation is given. We consider a scheme of actions aimed at computation optimization and enabling you to develop various classes of parameterized parallel algorithms within the framework of the approach proposed.

Keywords: optimization approach, decomposition, internal structure of algorithms, composition form, model description.

Acknowledgment

The work was performed according to the state assignment on theme No. 122011100398-2

References

1. Marchuk G.I., Kotov V.E. Problems of computers and fundamental research. *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika*, 1979, No. 2, pp. 3–14. (In Russian).
2. Voevodin V.V. *Computational Mathematics and Algorithm Structure*. Moscow, MGU Publ., 2006, 112 p. (In Russian).
3. Voevodin V.V., Voevodin V.I. *Parallel Computing*. St. Petersburg., BHV-Peterburg Publ., 2002, 608 p. (In Russian).
4. Kung S.Y. *VLSI Array Processors*, Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall, 1988.
5. Lee G.G., Chen Y.K., Mattavelli M., and Jang E.S. Algorithm/Architecture Co-Exploration of Visual Computing on Emergent Platforms: Overview and Future Prospects. In: *IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology*, 2009, vol. 19 (11), pp. 1576–1587. DOI: 10.1109/TCSVT.2009.2031376.

6. Lee Gwo Giun, Lin He-Yuan, Chen Chun-Fu, and Huang Tsung-Yuan. Quantifying Intrinsic Parallelism Using Linear Algebra for Algorithm/Architecture Coexploration. In: *IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems*, 2012, vol. 23, iss. 5, pp. 944–957. DOI: 10.1109/TPDS.2011.230.
7. Malyshkin V., Perepelkin V. Trace-Based Optimization of Fragmented Programs Execution in LuNA System. In: *PaCT 2021: Parallel Computing Technologies: Proceedings of 16th International Conference, PaCT 2021, Kaliningrad, Russia, September 13–18, 2021, Book Ser. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2021, vol. 12942. DOI: 10.1007/978-3-030-86359-3_1.
8. Lookin N.A. Digital image processing systems based on functional-oriented processors with a homogeneous structure. *Journal of Physics: Conference Series*, 2020, vol. 1680, pp. 012034. DOI: 10.1088/1742-6596/1680/1/012034.
9. Malyshkin V. Parallel computing technologies 2020. *The Journal of Supercomputing*, 2021. DOI: 10.1007/s11227-021-04014-w.
10. Akhmed-Zaki D., Lebedev D., Malyshkin V., Perepelkin V. Automated construction of high performance distributed programs in LuNA system. In: Malyshkin, V., ed. *International Conference on Parallel Computing Technologies, PaCT 2019: Parallel Computing Technologies, 2019, book ser. Lecture Notes in Computer Science (LNCS)*, Springer, 2019, vol. 11657, pp. 3–9, DOI: 10.1007/978-3-030-25636-4_1.
11. Gergel V., Grishagin V., Israfilov R. Parallel Dimensionality Reduction for Multiextremal Optimization Problems. In: Malyshkin V., ed. *Parallel Computing Technologies: PaCT 2019, ser. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2019, vol 11657. DOI: 10.1007/978-3-030-25636-4_13.
12. Klimova O.V. A Methodology for Parallel Implementation of the Basic Operations of Digital Signal Processing. In: *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2176, 030023. DOI: 10.1063/1.5135131.
13. Edward A. Lee. The Problem with Threads. *Computer*, 2006, vol. 39. iss. 5. pp. 33–42. DOI: 10.1109/MC.2006.180.
14. Klimova O.V. Parallel computations and construction law of model description for digital signal processing algorithms. *Informatsionnye Tekhnologii i Vychislitel'nye Sistemy*, 2016, No. 2, pp. 11–22. (In Russian).
15. Nussbaumer H.J. *Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms*, Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1982.
16. McClellan J.H., Rader C.M. *Primenenie teorii chisel v tsifrovoy obrabotke signalov* [Application of number theory in digital signal processing]. Moscow, Radio i Svyaz Publ., 1983, 264 p.
17. Klimova O.V. Pseudo-two-Dimensional Decomposition Methods and Parallel Algorithms of Convolution. In: *International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing*, Tampere, Finland, TICSP Series, 2001.
18. Klimova O.V. Fast parallel algorithms and recursive pseudo-two-dimensional convolution decomposition. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta*, 2002, No. 1 (II), pp. 227–232.

Подана в журнал: 15.12.2021

УДК 004.272.2

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.006-015

ОПТИМИЗАЦИОННЫЙ ПОДХОД К РАЗРАБОТКЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ОПЕРАЦИЙ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

О. В. Климова

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
34, ул. Комсомольская, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0003-4289-0526>  klimova@imach.uran.ru

Ответственный автор. Эл. почта: klimova@imach.uran.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 362–30–35; факс: +7 (343) 374–53–30

Рассмотрены оптимизационные возможности подхода, позволившего разработать формальный инструмент – модель организации вычислений для операций цифровой обработки сигналов (ЦОС) и операций структурно им подобных. Созданный формальный инструмент описывает внутреннюю параметризованную структуру операций и порождает адаптивные алгоритмы, способные настраиваться на различные режимы параллельных вычислений. Разработанный подход к построению таких алгоритмов наделяет их расширенной функциональностью, обеспечивающей реализацию следующих возможностей: изменения по параметрам структур алгоритмов; синтеза их разнообразия; оптимизации вариантов организации вычислений. Благодаря разнообразию функциональности определяются несколько направлений для реализации такой оптимизации. Приведено общее описание оптимизационного подхода к обоснованному выбору наилучшего в заданных условиях реализации варианта организации вычислений, а также рассмотрена схема действий, направленных на оптимизацию вычислений и позволяющих разработать различные классы параметризованных параллельных алгоритмов в рамках предложенного подхода.

Ключевые слова: оптимизационный подход, декомпозиция, внутренняя структура алгоритмов, композиционная форма, модельное описание.

1. Введение

Современная параллельная обработка данных требует от формальных инструментов, предназначенных для описания организации вычислений, особых характеристик, которыми традиционные алгоритмы не обладают [1–11]. Такие формальные инструменты должны быть адаптивными и в них должна быть заложена возможность оптимизации вычислений. Поэтому для обеспечения эффективности параллельной обработки необходимо разрабатывать гибкие формальные описания организации вычислений, обладающие расширенной функциональностью, такие как адаптивные алгоритмы или модельные описания вычислений, т. е. инструменты для выполнения обоснованного выбора варианта организации вычислений в заданных условиях их реализации. Такие инструменты способны порождать разнообразие вариантов организации вычислений, а также оптимизировать их, управляя по параметрам изменениями их структур и выбирая наилучшие варианты на основе анализа оценок сложности их реализации. При помощи этих инструментов можно на формальной основе выполнять этап совместных исследований алгоритмов и архитектур [5, 6, 12], являющийся неотъемлемой частью процесса проектирования современных вычислительных устройств. Однако для

разработки таких инструментов необходимо искать подходы к раскрытию и изучению внутренних структур вычислений для различных операций. Из вышесказанного следует, что параллельная обработка изменила взгляд на организацию вычислений и сделала ее объектом исследований, нацеленных на выявление внутренней структуры вычислений и представление ее с помощью композиционных форм [2, 3, 13, 14]. Сложность этой задачи на разных этапах ее рассмотрения была отмечена многими исследователями [1–6, 13], на сегодняшний день получены лишь локальные ее решения для операций определенного класса [5, 6, 12, 14]. Однако нахождение и использование требуемых решений не только позволит повысить эффективность параллельной обработки, но и приведет к расширению аналитических способностей формального инструмента, используемого для описания организации вычислений. Это означает, что разработка инструментов, изначально предназначенных для описания организации параллельных вычислений, позволит с их помощью выполнять более тонкий и гибкий анализ обрабатываемых данных, основанный на понимании внутренней структуры вычислений. Таким образом, задача разработки указанных формальных инструментов является важной и актуальной. Можно выделить два варианта разработки требуемых формальных инструментов, которые различаются формами представления алгоритмов (графовыми и аналитическими), изначально положенными в основу процессов указанной разработки. Результаты [5, 6], связанные с использованием исходных графовых форм (графов потоков данных), характеризуются достаточно высокой сложностью реализации и не обладают требуемой гибкостью.

В работе рассмотрен декомпозиционный подход [14] и его оптимизационные свойства. В основе подхода – найденные правила выполнения эквивалентных преобразований над аналитическими выражениями, используемыми изначально для представления рассматриваемого класса операций. Подход позволил разработать требуемые формальные инструменты – модель организации вычислений и адаптивные алгоритмы для операций цифровой обработки сигналов (ЦОС) и операций структурно им подобных, а также предоставил разнообразные возможности оптимизации вычислений. Поэтому одной из основных особенностей подхода является его оптимизационный характер. Именно эта особенность разработанного подхода представлена в данной статье. Приводится общее описание подхода и рассматривается схема действий, направленных на оптимизацию вычислений и позволяющих разработать на его основе различные классы параметризованных параллельных алгоритмов.

2. Общее описание оптимизационного подхода к разработке параллельных алгоритмов

На основе предложенного подхода [14] были получены параметризованные композиционные формы для представления операций вышеуказанного класса. Прежде чем рассматривать оптимизационные характеристики подхода, выделим его существенные особенности, обеспечившие переход к композиционным формам для различных операций и их различных размерностей. Итак, предложенный подход к формированию композиционных форм носит декомпозиционный характер, проявляющийся в способности выделения инвариантных компонентов рассматриваемой операции и установления правил их композиции в исходную операцию. Такие способности были установлены на основе использования аппарата теории групп, поэтому подход был назван теоретико-групповым. Основой подхода является декомпозиция данных, обеспечивающая построение композиционных форм для различных операций. Важной чертой предложенного теоретико-группового декомпозиционного подхода является его эволюционный характер, с одной стороны, обеспечивающий преемственность форм (алгоритма и параметризованной композиционной формы) описания организации вычислений для последовательного и параллельного способов обработки данных, а с другой стороны, способствующий его развитию путем расширения на большие размерности, а также на иные классы операций. Характеристики подхода позволили разработать на его основе

единую для различных операций рассматриваемого класса методику синтеза их композиционных форм, содержащую следующие действия:

- формирование композиционных форм (КФ) данных;
- использование этих форм в исходных аналитических выражениях, описывающих рассматриваемые операции, и образование их исходных КФ;
- выполнение необходимых эквивалентных преобразований над этими формами;
- формирование и анализ композиционных форм для представления изучаемых операций.

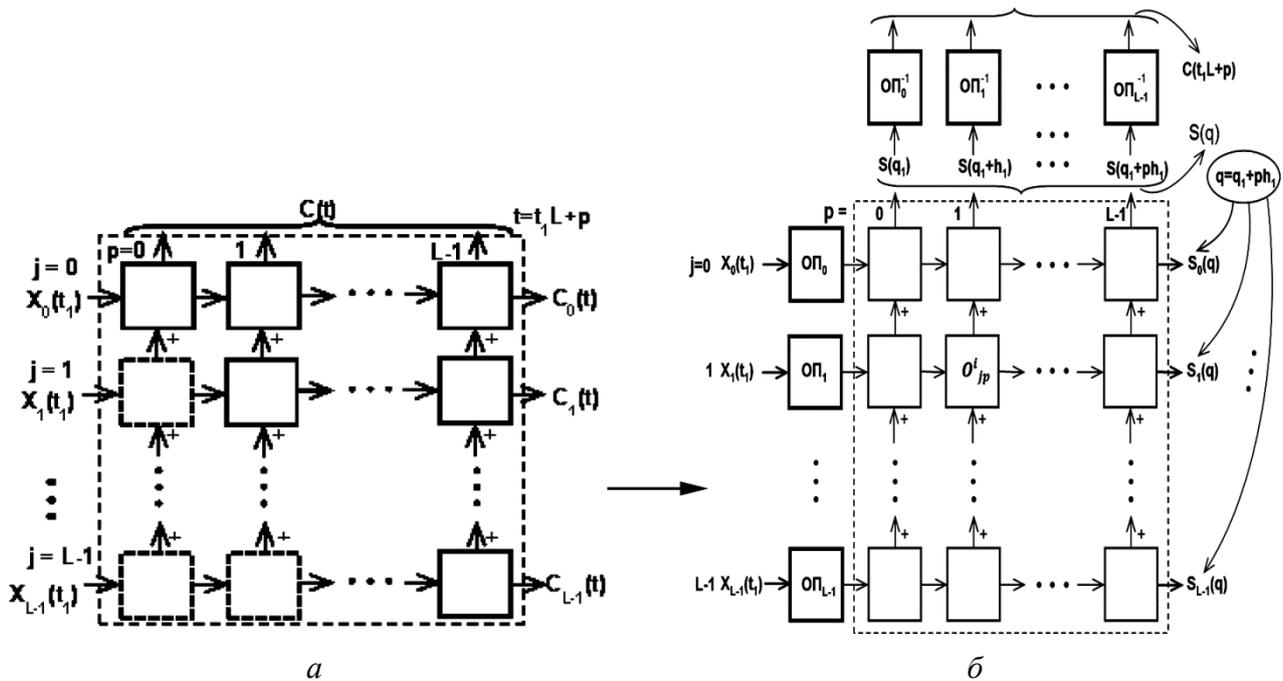


Рис. 1. Параметризованное представление внутренних композиционных структур вычислений операции свертки во временной (а) и частотной (б) областях

Реализация методики меняет структуру вычислений, из временной области они переносятся в пространственно-временную область. При этом мы работаем не с отдельными отсчетами входных данных $x(t)$ длины N , а с L модулями данных $x_j(t_1)$ длины h_1 , используя параметры $N = h_1L$; $t = j + t_1L$; $t = 0, \dots, N - 1$; $t_1 = 0, \dots, h_1 - 1$; $j = 0, \dots, L - 1$. Такое изменение структуры данных приводит к изменению общей структуры вычислений, она также становится модульной и представляется с помощью единого модельного описания $КФО(A_i^{jp}(t_1), KBC_i(j, p))$, определяющего различные композиционные формы операций (КФО), конкретный вид которых определяется индексом i . Компонентами модельного описания являются параметризованные координационно-вычислительные среды (КВС) – $KBC_i(j, p)$ и алгоритмы $A_i^{jp}(t_1)$, полученные в результате декомпозиции, погружения в пространственную среду и сжатия во времени последовательных алгоритмов $A_i(t)$. Поскольку описанные структурные изменения являются общими для разных операций, то для их иллюстрации можно без потери общности использовать пространственно-временные вычислительные структуры любой операции из рассматриваемого класса. На рис. 1 представлены результаты структурных преобразований, выполненных для операции циклической свертки $C(t)$. Исходные структуры операций рассматриваемого класса во временной области можно представить с помощью операции умножения матрицы размера $N \times N$ на вектор $x(t)$ длины N , а структуры, полученные на основе модельного описания $КФО(A_i^{jp}(t_1), KBC_i(j, p))$,

можно представить с помощью симбиоза его параметризованных компонентов, определяющего внутреннюю структуру вычислений (рис. 1). С учетом возможности рассматриваемого подхода к образованию композиционных форм, покажем наличие у него и оптимизационных свойств. Действительно, разработанный формальный инструмент – модель для описания организации параллельных вычислений различных операций O_m рассматриваемого класса – не только позволяет синтезировать адаптивные алгоритмы, но и характеризуется возможностью оптимизации вычислений. Представим этот формальный инструмент: *Модель* ($O_m, N, L, h_1, A_{mi}^{jp}(t_1), KBC_{mi}(j, p), MBC(k_1, k_2)$). Компонентой предложенной модели помимо КФО и параметров O_m, N, L, h_1 является матричная вычислительная среда $MBC(k_1, k_2)$, определяемая параметрами k_1 и $k_2, k_1, k_2 = 1, \dots, L$, структурно подобная $KBC_{mi}(j, p)$ и позволяющая расширить оптимизационные возможности модели. Введение этой компоненты в состав модели позволяет ограничивать пространственные размеры однородных сред, порождаемых КФО, и использовать режим параллельно-конвейерной обработки (рис. 1). Определив основные параметризованные компоненты разработанной модели, формирующие базу, как для синтеза параллельных алгоритмов, так и для реализации оптимизации их вычислений, представим общее описание подхода (рис. 2).



Рис. 2. Общее описание оптимизационного подхода к разработке параметризованных параллельных алгоритмов

Из описания рис. 2 следует, что синтез и оптимизация базируются на модели организации вычислений, в структуре которой заложены способы их реализации (за счет разнообразных изменений структур вычислений), и формальные правила для обратной связи (рис. 2), обеспечивающие выполнение целенаправленного поиска требуемого варианта вычислений для заданных условий их реализации. На рис. 2 представлены три вида преобразований структурных компонент модели, характеризующихся либо изменениями алгоритмической компоненты $A_i^{jp}(t_1)$, либо изменениями значений параметров компоненты $KBC_i(j, p)$, либо изменениями правил координации результатов вычислений в $KBC_i(j, p)$. Каждый из указанных видов преобразований меняет КФО, порождая их разнообразие, и открывает путь для оптимизации. В следующем разделе кратко рассмотрим оптимизационные возможности подхода, базирующиеся на использовании целого разнообразия композиционных форм операций.

3. Разнообразие композиционных форм и оптимизация вычислений

Описываемый подход к разработке параллельных алгоритмов характеризуется не только способностью перехода от исходных аналитических выражений операций рассматриваемого класса к представляющим их композиционным формам, но и возможностями изменения этих форм. Симбиоз изменений значений параметров j, p исходных композиционных форм и изменений самих этих форм позволяет формировать их разнообразие для выбранной операции и открывает пути для оптимизации ее вычислений. Представим оптимизационные возможности рассматриваемого подхода. Выбор операции свертки для иллюстрации композиционных вычислительных структур, формируемых в рамках подхода, позволяет в полной мере показать его возможности (рис. 1). Действительно, операция свертки может быть вычислена как во временной, так и в частотной областях [15], а это позволяет получить для ее представления несколько композиционных форм, характеризующихся различными оценками сложности их реализации.

Внутреннюю структуру операции свертки, реализуемой во временной области, можно представить с помощью коротких сверток $C_{jp}(t_1)$ длины h_1 и двумерной координационно-вычислительной среды (рис. 1 а). В каждой ячейке среды, характеризуемой параметрами j, p и обозначенной на рис. 1 а штриховыми линиями, вычисляются короткие свертки $C_{jp}(t_1)$. Их суммирование по параметру j при фиксированном значении параметра p приводит к образованию $L h_1$ – точечных наборов данных $C(t_1 \cdot L + p)$, формирующих отсчеты искомой N – точечной свертки (рис. 1 а). Реализация же вычислений при фиксированном значении параметра j позволит получить L коротких сверток $C_{jp}(t_1)$ длины h_1 , формирующих N отсчетов сверток $C_j(t)$. Таким образом, представленная внутренняя структура операции свертки обеспечивает гибкий доступ, как к определенным участкам вычислительного процесса, так и к требуемым отсчетам искомой операции.

При переходе к вычислениям в частотной области в каждой ячейке координационно-вычислительной среды выполняется произведение соответствующих спектров длины h_1 . Суммирование результатов этого произведения по параметру j при фиксированном значении параметра p приводит к образованию $L h_1$ – точечных спектров $S(q_1 + ph_1)$ функций $C(t_1 \cdot L + p)$ (рис. 1 б). Вычисления свертки в частотной области выполняются с использованием прямых и обратных ортогональных преобразований (ОП, ОП⁻¹) длины h_1 (рис. 1 б). Это могут быть дискретное преобразование Фурье (ДПФ) либо теоретико-числовые преобразования (ТЧП) [16]. При реализации этих преобразований могут быть использованы как быстрые, так и стандартные алгоритмы [15]. Рассмотренная внутренняя структура вычислений свертки в частотной области позволяет использовать короткие ТЧП для вычисления длинных сверток и обеспечить гибкий выбор анализируемого частотного участка. Получение композиционных форм $K\Phi O^F$ для вычисления операции свертки в частотной области (в области комплексных чисел) дает решение задачи использования эффективных, но коротких ТЧП [15, 16] для вычисления сверток большой длины в модулярной области (рис. 3). Это решение позволяет получить модулярные композиционные формы $K\Phi O^M$, являющиеся основой для оптимизации вычислений.

Образование параметризованной композиционной формы, представленной на рис. 1 а, позволило разработать на ее основе методы псевдодвумерной декомпозиции, описанные в работах [17, 18] и устанавливающие ее структурную связь с двумерной сверткой. Эта форма свертки (рис. 1 а) отличается от двумерной свертки сдвигами на один разряд на группе Z_{h_1} одной из сворачиваемых последовательностей, заданных на группе Z_{h_1} и расположенных в точках $j > p$, при вычислении свертки по координате p . На рис. 1 а ячейки координационно-

вычислительной среды, принадлежащие этой области, выделены двойными штриховыми линиями. Разработка методов псевдодвумерной декомпозиции свертки позволила получить соответствующие им композиционные формы [17, 18], что в свою очередь расширило структурное разнообразие вариантов организации вычислений в рамках одного декомпозиционного подхода, расширив тем самым его оптимизационные возможности и повысив гибкость выбора вычислительной структуры. Следует отметить, что композиционные формы KFO^{PD} , порожденные методами псевдодвумерной декомпозиции, характеризуются изменениями правил координации между вычислительными модулями в двумерной координационно-вычислительной среде и возможностью реализации вычислений как во временной, так и в частотной и модулярной областях (рис. 3).



Рис. 3. Схема действий, направленных на оптимизацию вычислений в рамках декомпозиционного подхода

Представленные выше формальные инструменты для описания организации вычислений формируют разнообразие оптимизационных возможностей рассматриваемого подхода. Действительно, описанные композиционные формы – KFO^{PD} , KFO^F , KFO^M , разработанные в рамках подхода и характеризующиеся изменениями алгоритмической компоненты $A_i^{jp}(t_1)$ исходной композиционной формы – $KFO(A_i^{jp}(t_1), KBC_i(j, p))$, а также изменениями правил координации вычислений в $KBC_i(j, p)$, предоставляют основу для оптимизации вычислений (рис. 3).

Каждая из представленных выше композиционных форм характеризуется параметризованной координационно-вычислительной средой $KBC_i(j, p)$, управляя изменениями значений параметров которой можно синтезировать разнообразие вариантов организации вычислений и оптимизировать отношения между алгоритмическими и архитектурными параметрами. Способность к изменению по параметрам структуры вычислений, являющаяся имманентным свойством предложенного подхода, позволяет выполнять их оптимизацию. На рис. 1 представлены пути оптимизации вычислений, характеризующиеся изменениями размера $L \times L$ координационно-вычислительной среды $KBC_i(j, p)$ и сопутствующими им изменениями правил координации результатов вычислений в этой среде. Один из путей формируется на базе изменений параметра $L = 2, 4, \dots, N/2$, при $N = 2^n$, порождающих разнообразие вариантов организации вычислений в виде разнообразия параллельных алгоритмов, отличающихся значениями параметров L и h_j . Формирование такого разнообразия дает инструмент для оптимизации вычислений, реализуемой с помощью направленного выбора наилучшего в заданных условиях выполнения вычислений варианта их организации. Другой путь оптимизации вычислений формируется на основе введения ограничений на размеры координацион-

но-вычислительной среды $KBC_i(j, p)$ и характеризуется использованием для этого вышепредставленной матричной вычислительной среды $MBC(k_1, k_2)$, определяемой параметрами k_1 и k_2 , $k_1, k_2 = 1, \dots, L$. Следствие введения таких ограничений – возможность использования режима параллельно-конвейерной обработки данных, также позволяющего синтезировать разнообразие вариантов организации вычислений для реализации параллельных алгоритмов, характеризующихся разными значениями параметров L и h_1 . Использование такого режима организации вычислений позволяет значительно расширить разнообразие их синтезируемых вариантов, повышает гибкость системы их формирования и выбора, а также предоставляет инструмент для направленного поиска наилучших вариантов, нацеленный на реализацию оптимизации вычислений. Таким образом, изменения размера двумерной однородной вычислительной среды, используемой для реализации параметризованных алгоритмов, предоставляют широкие возможности для выполнения оптимизации вычислений в рамках представленного декомпозиционного подхода.

4. Заключение

Рассмотрены оптимизационные возможности подхода, предложенного для разработки параллельных алгоритмов. Показано, что способность к оптимизации вычислений является неотъемлемой характеристикой представленного декомпозиционного подхода. Это обусловлено имманентными свойствами подхода: способностью порождать разнообразие параллельных алгоритмов для выбранной операции из класса операций ЦОС и операций структурно им подобных, способностью изменять разнообразными способами вычислительные структуры алгоритмов, а также способностью управлять по параметрам вышеупомянутыми изменениями. В работе представлены способы изменения структур алгоритмов, порожденные рассматриваемым подходом, выполнена их классификация, а также установлена их связь с реализацией оптимизации вычислений.

Благодарность

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием по теме № 122011100398-2.

Литература

1. Марчук Г. И., Котов В. Е. Проблемы вычислительной техники и фундаментальные исследования // Автоматика и вычислительная техника. – 1979. – № 2. – С. 3–14.
2. Воеводин В. В. Вычислительная математика и структура алгоритмов. – М. : Изд-во МГУ, 2006. – 112 с.
3. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Параллельные вычисления. – СПб. : БХВ–Петербург, 2002. – 608 с.
4. Kung S. Y. VLSI Array Processors. – Englewood Cliffs, NJ : Prentice Hall, 1988.
5. Algorithm/Architecture Co-Exploration of Visual Computing on Emergent Platforms: Overview and Future Prospects / G. G. Lee, Y. K. Chen, M. Mattavelli, and E. S. Jang // IEEE Trans. Circuits and Systems for Video Technology : proceedings. – 2009. – Vol. 19 (11). – P. 1576–1587. – DOI: 10.1109/TCSVT.2009.2031376.
6. Quantifying Intrinsic Parallelism Using Linear Algebra for Algorithm/Architecture Coexploration / Gwo Giun Lee, He-Yuan Lin, Chun-Fu Chen, and Tsung-Yuan Huang. // IEEE Trans. on Parallel and Distributed Systems. – 2012. – Vol. 23, No. 5. – P. 944–957. – DOI: 10.1109/TPDS.2011.230.
7. Malyshkin V., Perepelkin V. Trace-Based Optimization of Fragmented Programs Execution in LuNA System // Parallel Computing Technologies PaCT 2021 : proceedings / ed. by

- V. Malyskin. – Springer, 2021. – Series Lecture Notes in Computer Science. – Vol 12942. – DOI: 10.1007/978-3-030-86359-3_1.
8. Lookin N. A. Digital image processing systems based on functional-oriented processors with a homogeneous structure // Journal of Physics: Conference Series. – 2020. – Vol. 1680. – 012034. – DOI: 10.1088/1742-6596/1680/1/012034.
9. Malyskin V. Parallel computing technologies 2020 // J Supercomput. – 2021. – DOI: 10.1007/s11227-021-04014-w.
10. Automated construction of high performance distributed programs in LuNA system / Zaki D. Akhmed, D. Lebedev, V. Malyskin, V. Perepelkin // International Conference on Parallel Computing Technologies, PaCT 2019: Parallel Computing Technologies, 2019 : Proceedings / ed. by V. Malyskin. – Springer, 2019. – Series Lecture Notes in Computer Science (LNCS). – Vol. 11657. – P. 3–9. – DOI: 10.1007/978-3-030-25636-4_1.
11. Gergel V., Grishagin V., Israfilov R. Parallel Dimensionality Reduction for Multiextremal Optimization Problems // Parallel Computing Technologies. PaCT 2019 / ed. by V. Malyskin. – Springer, 2019. – Series Lecture Notes in Computer Science. – Vol 11657. – DOI: 10.1007/978-3-030-25636-4_13.
12. Klimova O. V. A Methodology for Parallel Implementation of the Basic Operations of Digital Signal Processing // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2176. – 030023. – DOI: 10.1063/1.5135131.
13. Edward A. Lee. The Problem with Threads // Computer. – 2006. – Vol. 39, No. 5. – P. 33–42. – DOI: 10.1109/MC.2006.180.
14. Климова О. В. Параллельные вычисления и закон построения модельного описания для алгоритмов цифровой обработки сигналов // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2016. – № 2. – С. 11–22.
15. Nussbaumer H. J. Fast Fourier Transform and Convolution Algorithms. – Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1982.
16. Макклеллан Дж. Г., Рейдер Ч. М. Применение теории чисел в цифровой обработке сигналов. – М. : Радио и связь, 1983. – 264 с.
17. Klimova O. V. Pseudo-two-Dimensional Decomposition Methods and Parallel Algorithms of Convolution // International Workshop on Spectral Methods and Multirate Signal Processing. – Tampere, Finland : TICSP Series, 2001.
18. Климова О. В. Быстрые параллельные алгоритмы и рекурсивная псевдодвумерная декомпозиция свертки // Вестник Томского государственного университета. – №1 (II). – Томск : Изд. ТГУ, 2002. – С. 227–232.

Received: 20.10.2021

Revised: 02.02.2022

Accepted: 25.02.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.016-024

ON ONE MODEL OF DEFORMATION IN LAMINATED COMPOSITES

V. V. Struzhanov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru

Corresponding author: E-mail: stru@imach.uran.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7(343)362 30 19

A technique is proposed that makes it possible to predict delamination in laminated composites. The technique is based on taking into consideration binder softening both under uniaxial transverse tension and in a plane stress state formed during longitudinal and transverse tension. The stratification moment is determined by the methods of the mathematical catastrophe theory.

Keywords: unidirectional laminated composite, full binder deformation diagram, delamination, catastrophe.

Acknowledgment

The work was performed according to the state assignment, theme No. AAAA-A18-118020790145-0.

References

1. Bataev A.A., Bataev V.A. *Kompozitsionnye materialy: stroenie, poluchenie, primeneniye* [Composite materials: structure, production, application]. Novosibirsk, Izd-vo NGTU, 2002, 384 p.
2. Mikhailin Yu.A. *Konstruksionnye polimernye kompozitsionnye materialy* [Structural polymer composite materials]. Moscow, Izd-vo Nauchnye osnovy i tekhnologii, 2008, 822 p.
3. Matthews F., Rawlings R. *Kompozitsionnye materialy i konstruksii: Mekhanika i tekhnologii* [Composite materials and structures. Mechanics and technologies]. Moscow, Tekhnosfera, 2004, 407 p.
4. Warden K. *Novye intelektualnye materialy i konstruksii* [New intellectual materials and structures, Rus. transl.]. Moscow, Tekhnosfera, 2006, 223 p.
5. Vorontsov A.N., Murzakhanov G.Kh. & Shchugorev V.N. Delamination failure of composite structures. *Mechanics of Composite Materials*, 1990, vol. 25, pp. 723–737. DOI: 10.1007/BF00613361.
6. Chernyakov S.A., Skvortsov Yu.V. Analysis of delamination propagation in composite structures. *Bulletin of SamGAU*, 2014, No. 4 (56), pp. 249–255.
7. Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bie-material media. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, vol. 28, No. 1, pp. 13–20. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90115-9.
8. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modelling the formation of new material surfaces during adhesive delamination of a composite. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, No. 1, pp. 100–109. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.09. (In Russian).
9. Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. Separation model multimodulus bimaterial with crack. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 49–57. (In Russian).

10. Smirnov S.V., Veretennikova I.A., Vichuzhanin D.I. Modeling of delamination in multilayer metals produced by explosive welding under plastic deformation. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 398–411. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.38. (In Russian).
11. Brewer J.C., Lagacé P. Quadratic stress for initiation of delamination. *Journal of Composite Materials*, 1988, vol. 22, pp. 1141–1155. DOI: 10.1177/002199838802201205.
12. Zhang Y.W., Zeng K.Y., Thampurun R. Interface delamination generated by indentation in thin film systems – a computational mechanics study. *Materials Science and Engineering: A*, 2001, vols. 319–321, pp. 893–897. DOI: 10.1016/S0921-5093(01)01026-7.
13. Poston T., Stewart I. *Teoriya katastrof i ee primeneniya* [Catastrophe theory and its applications]. Moscow, Mir Publ., 1980, 608 p.
14. Gilmore R. *Prikladnaya teoriya katastrof* [Applied Theory of Catastrophe, book 1]. Moscow, Mir Publ., 1984, 350 p.
15. Struzhanov V.V., Mironov V.I. *Deformatsionnoe razuprochnenie materiala v elementakh konstruktsiy* [Deformational softening of material in structural elements]. Yekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 1995, 190 p. (In Russian).
16. Wildemann V.E., Tretyakov M.P. Material testing by plotting total deformation curves. Testing of materials with the construction of complete deformation diagrams. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, pp. 166–170. DOI: 10.3103/S1052618813010159.
17. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics, vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 492 p.
18. Pers L. *Analiticheskaya dinamika* [Analytical Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 636 p.
19. Wildemann V.E., Tretyakov M.P. Material testing by plotting total deformation curves. Testing of materials with the construction of complete deformation diagrams. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, pp. 166–170. DOI: 10.3103/S1052618813010159.

Подана в журнал: 20.10.2021

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.016-024

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАССЛОЕНИЯ В СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

В. В. Стружанов

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
д. 34, ул. Комсомольская, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru

Ответственный автор. Электронная почта: stru@imach.uran.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7(343)362–30–19

Предложена методика, позволяющая прогнозировать расслоение в слоистых композициях. Методика основана на включении в рассмотрение процесса разупрочнения связующего как при одноосном поперечном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии, образующемся при продольном и поперечном растяжении. Момент расслоения определяется методами математической теории катастроф.

Ключевые слова: однонаправленный слоистый композит, полная диаграмма деформирования связующего, расслоение, катастрофа.

1. Введение

Композиционные материалы широко используются в машиностроении благодаря их уникальным свойствам [1–4]. Одним из характерных дефектов, появляющихся при деформировании однонаправленных композиционных материалов, является расслоение. В местах соединения арматуры и связующего могут образоваться несплошности [5–7]. Очевидно, что расслоение существенно влияет на работоспособность конструкций. Поэтому разработке методов расчета на разрушение композиций по типу расслоений всегда уделяется большое внимание, например [8, 9].

В работе предложена новая модель расслоения в слоистых композициях, которая по крайней мере на качественном уровне иллюстрирует механизм данного процесса. Модель основана на включении в рассмотрение стадии разупрочнения связующего, предшествующего его разрушению как при одноосном поперечном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии, вызванном продольным и поперечным растяжениями. Предложены соответствующие модели материала. Для определения момента расслоения применяется аппарат математической теории катастроф [10, 11].

2. Качественная теория расслоения слоистого композита

Рассмотрим композиционный материал, состоящий из множества тонких пластин с начальной толщиной $2h_0$, соединенных в единую систему посредством некоторого связующего материала малой толщины. Полученную композицию будем растягивать вдоль пластин, задавая продольную деформацию ε . При этом считаем, что пластины работают только в области упругости и свойства их материала определяют продольный модуль упругости E и коэффициент поперечной деформации ν .

Мысленно освободим слой от связей. Так как поперечная деформация слоев в свободном состоянии равна $(-\nu\varepsilon)$, то расстояние между свободными слоями равняется $2\Delta = 2h_0\nu\varepsilon$, при этом толщина слоя имеет величину $2h = 2h_0(1 - \nu\varepsilon)$ (рис. 1).

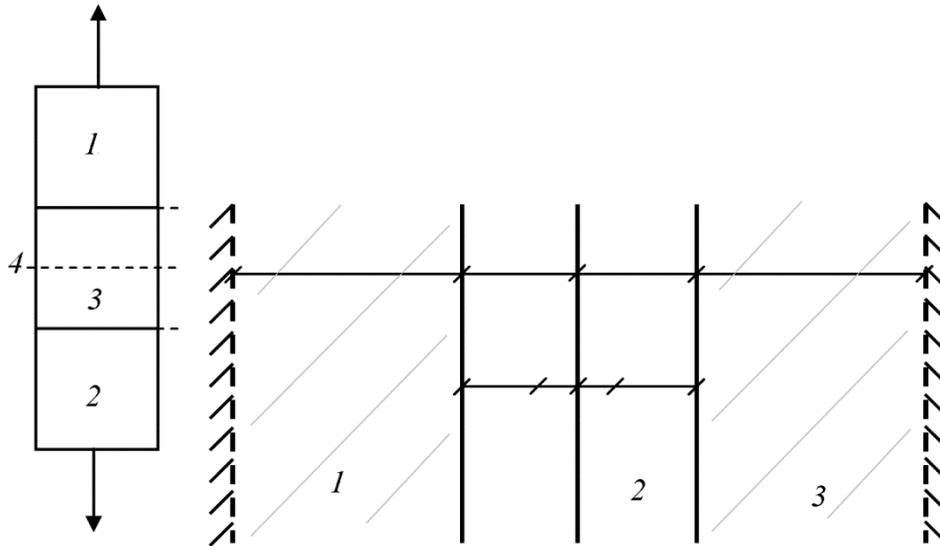


Рис. 1. Фрагменты композита после растяжения (продольный разрез):
1, 3 – половины упругого слоя после растяжения в свободном состоянии; 2 – связующие;
пунктирная линия – не перемещающаяся в поперечном направлении середина слоя

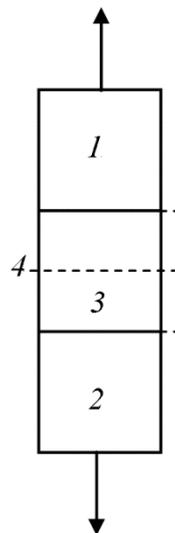


Рис. 2. Растяжение связующего 3, расположенного между жесткими стержнями 1 и 2
(4 – средняя линия объема связующего)

Объединим слои в единую систему. Тогда слои должны растянуться в поперечном направлении на некоторую величину z , а связующие – на величину $2x$ (рис. 1). В результате в композите возникают поперечные напряжения, приводящие к разрушению связующего.

Сопrotивление связующего отрыву задано функцией $q(x)$ (без учета продольного растяжения), которую можно получить в ходе эксперимента по равновесному растяжению системы, состоящей из двух достаточно жестких стержней, соединенных данным связующим (рис. 2). В результате имеем зависимость $P(x)$ (P – растягивающая сила) и отсюда зависимость $q(x) = P(x)/F$ (F – площадь поперечного сечения жестких стержней). Отметим, что диаграмма $q(x)$ обладает падающей до нуля ветвью, т. е. она аналогична полной диаграмме деформирования обычного материала [12, 13].

При квазистатическом возрастании продольной деформации ε величина h уменьшается, а величина Δ возрастает (рис. 1). Следовательно, растяжение связующего увеличивается.

Вся система переходит из одного положения равновесия в другое. В конце концов происходит разрушение связующего. Так как разрушение есть невозможность равновесия [14], то необходимо найти момент перехода системы в неустойчивое состояние.

Для решения этой задачи воспользуемся методикой, применяемой в теории катастроф при определении устойчивых и неустойчивых положений равновесия консервативных механических систем [10, 11]. Выпишем лагранжиан системы, учитывая, что кинетическая энергия практически равна нулю. Имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} E \left(\frac{z}{h}\right)^2 \cdot hls \cdot 2 + 2ls \int_0^x q(x) dx.$$

Здесь первое слагаемое – энергия деформаций упругих слоев ($\frac{z}{h}$ – деформация поперечного растяжения упругого слоя; l – длина слоя; s – его ширина; $z = \Delta - x$), а второе – энергия связующего. Отметим, что система имеет один обобщенный параметр x (параметр состояния), а Δ – параметр управления (в терминах теории катастроф).

Используя лагранжиан Π , получаем уравнение равновесия (уравнение Лангранжа II рода) [15]:

$$\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{E}{h}(\Delta - x) + q(x) = 0, \quad (1)$$

или

$$\Delta = x + \frac{h}{E} q(x). \quad (2)$$

С формальной точки зрения уравнение (1) можно рассматривать как уравнение равновесия некоторой гипотетической системы при постепенном возрастании управляющего параметра Δ , т. е. мысленно отодвигаем связующее от слоя.

Теперь необходимо при заданном значении h найти величину Δ_h , при достижении которой связующее разрушается.

Уравнение (1) определяет критические точки функции $\Pi(x)$. Известно, что смена типа равновесия (переход системы из состояния устойчивого равновесия в неустойчивое) реализуется в вырожденной критической точке, которая определяется из совместного решения уравнения (1) и уравнения [10, 11]:

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{E}{h} + \frac{dq(x)}{dx} = \frac{E}{h} + \lambda^p(x) = 0, \quad (3)$$

где $\lambda^p(x)$ – касательная к кривой $q(x)$ в точке x . В вырожденной критической точке и происходит разрушение связующего (катастрофа системы).

Если решение уравнения (3) существует, т. е. на диаграмме $q(x)$ найдется такая точка, где касательная равняется $\left(-\frac{E}{h}\right)$, то, подставляя данное значение x в равенство (2), получаем значение $\Delta = \Delta_h$, при достижении которого возникает катастрофа. Когда решение уравнения (3) не существует, то система плавно переходит из одного устойчивого состояния в другое устойчивое состояние вплоть до разделения на части (разрушение связующего). В этом случае разрушение связующего реализуется при

$$\Delta_h = \Delta_h^r = x_r + \frac{h}{E} q(x_r) = x_r.$$

Здесь x_r – предельное поперечное удлинение связующего, где $q(x_r) = 0$.

Далее зададим композиту продольную деформацию ε . Вычисляем $h(\varepsilon)$ и $\Delta(\varepsilon)$. Подставляем $h = h(\varepsilon)$ в равенство (2) и уравнение (3). По изложенной выше методике определяем Δ_h . При $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h$ расслоение не происходит. Расслоение также не произойдет, если решение уравнения (3) не существует и $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h^r$.

Увеличивая деформацию ε , можно найти момент расслоения в композите, когда либо $\Delta(\varepsilon) = \Delta_h$, либо $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h^r$.

3. Свойства связующего при двухосном растяжении

Вообще говоря, связующее находится в условиях двухосного растяжения (плоско-напряженное состояние). Оно имеет продольную деформацию ε и поперечную деформацию x . Возьмем плоский квадратный элемент связующего с единичными размерами. Если материал находится в состоянии упругости, то энергия деформаций равна:

$$W^e = \frac{H}{2(1-\mu^2)}(\varepsilon^2 + 2\mu x\varepsilon + x^2), \quad (4)$$

где H – модуль упругости; μ – коэффициент Пуассона связующего.

Выражение (4) определяет центральные эллипсы (линии уровня потенциала W^e), главные оси которых наклонены к декартовым осям $0x$, 0ε под углом $\frac{\pi}{4}$. Произвольная точка (x, ε) плоскости $0x\varepsilon$ расположена на линии уровня с большой полуосью:

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x + \varepsilon)^2 \frac{(1 + \mu)}{(1 - \mu)} + (x - \varepsilon)^2} = \sqrt{\frac{W^e}{G}}$$

Здесь $G = \frac{H}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига в упругости.

Воспользуемся гипотезой, предполагающей, что деформирование происходит в потенциальном поле с теми же линиями уровня, только каждой линии уровня отвечает уже некоторая энергия W [16].

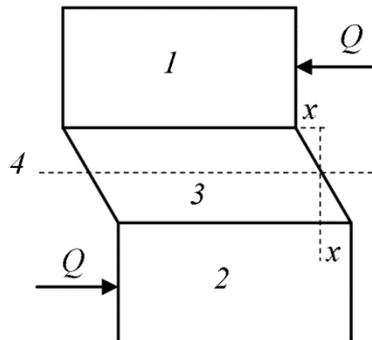


Рис. 3. Сдвиг связующего 3, расположенного между жесткими стержнями 1 и 2 (4 – средняя линия связующего)

Для построения функции W будем производить деформирование вдоль большой полуоси, реализуя чистый сдвиг. Воспользуемся диаграммой чистого сдвига $\tau(\gamma)$. Такую диаграмму можно получить, осуществляя следующий эксперимент. Пусть связующее соединяет два достаточно жестких стержня прямоугольного поперечного сечения, к которым приложены сдвигающие усилия Q (рис. 3).

Опыт ведем равномерно вплоть до разрушения связующего. В результате получаем зависимость $Q(\gamma)$ и отсюда зависимость $\tau(\gamma) = \frac{Q}{S}$.

Здесь S площадь поверхности стержней, соприкасающихся со связующим. Тогда энергия, затраченная на сдвиг связующего, равна $V = \int_0^{\gamma} \tau(\gamma) d\gamma$. Отметим, что в общем случае функция $\tau(\gamma)$ представляется полной диаграммой с падающей до нуля ветвью, которая пересекает ось $O\gamma$ в точке $\gamma = \gamma_r$, где $\tau(\gamma_r) = 0$ (γ_r – сдвиг, отвечающий разрушению при равновесном деформировании).

Теперь, осуществляя деформирование вдоль большой полуоси, имеем $\gamma = \sqrt{2}g$. В точках пересечения большой полуоси с линиями уровня энергия равна $V(g) = \int_0^{\sqrt{2}g} \tau(r) dr$. Таким образом, линиям уровня отвечает энергия $W = V(g)$. Теперь, чтобы получить выражение для энергии на любом пути деформирования, следует заменить g на $\sqrt{\frac{W^e}{G}}$. Так как напряжения определяются вектором-градиентом к линиям уровня, то $\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial x}$, $\sigma_\varepsilon = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$. Производя необходимые вычисления, находим определяющие соотношения для связующего при плоском напряженном состоянии. Они определяются выражением

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\varepsilon \end{pmatrix} = \psi(x, \varepsilon) \frac{H}{1 - \mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\psi = \tau(\gamma) \frac{1}{\sqrt{2W^e G}} \quad (5)$$

где $\gamma = \sqrt{\frac{2W^e}{\sigma}}$. Величина ψ в упругости равна единице, затем убывает до нуля в момент разрушения.

4. Общая теория

Выпишем лагранжиан системы, учитывая, что слои и связующее находятся в условиях двухосного растяжения. Деформация слоя равна ε и $\frac{z}{h(\varepsilon)}$, а связующего – ε и x . Используя определяющие соотношения плоско-напряженного состояния для упругого слоя, получаем энергию деформаций $L_1 = \frac{1}{2} \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\varepsilon^2 + 2\nu\varepsilon \frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) 2hls$.

Энергия связующего равна $L_2 = W 2ls$. Здесь $2hls$ – объем упругого слоя ($2h$ – толщина; l – длина; s – площадь поперечного сечения); $2ls$ – объем связующего единичной толщины. Итак лагранжиан равен $L = L_1 + L_2$. Параметр управления системой есть ε , а параметр состояния – x . Уравнение равновесия определяет выражение

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\nu\varepsilon + \frac{\Delta - x}{h(\varepsilon)} \right) + \frac{H}{1 - \mu^2} (x + \mu\varepsilon) \psi(x, \varepsilon) = 0. \quad (6)$$

Отсюда

$$\Delta = x - \nu\varepsilon h(\varepsilon) + \frac{H}{1 - \mu^2} \frac{h(\varepsilon)(1 - \nu^2)}{E} (x + \mu\varepsilon) \cdot \psi(x, \varepsilon). \quad (7)$$

Здесь $\varepsilon, h(\varepsilon)$ – фиксированные величины, функции $\psi(x, \varepsilon)$ при заданном ε определяются выражением (5).

С формальной точки зрения уравнения (6) и (7) опять можно рассматривать как уравнения равновесия гипотетической системы при постоянном возрастании параметра Δ , т. е.

мысленно отодвигаем связующее от слоя. Увеличивая параметр Δ из уравнения (7), находим функцию $\Delta(x)$. Отметим, что это возможно сделать, подставляя в правую часть уравнения (7) постепенно возрастающие значения x . Теперь следует при заданном значении $h(\varepsilon)$ найти величину Δ_h , при достижении которой связующее разрушается.

Уравнение (6) определяет критические точки функции L . Потеря устойчивости системы происходит в вырожденных критических точках [11]. Они определяются из уравнения

$$\frac{d^2L}{dx^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{n(\varepsilon)} + \frac{H}{1-\mu^2} \psi(x, \varepsilon) + \frac{H}{1-\mu^2} (x + \mu\varepsilon) \frac{\partial \psi(x, \varepsilon)}{\partial x} = 0$$

(ε – фиксированная величина). Или из уравнения

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = 1 + \frac{H}{1-\mu^2} \cdot \frac{h(\varepsilon)(1-\nu^2)}{E} \psi(x, \varepsilon) + \frac{H}{1-\mu^2} \cdot \frac{h(\varepsilon)(1-\nu^2)}{E} (x + \mu\varepsilon) \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Здесь $\frac{\partial \Delta}{\partial x} = 0$ – это экстремум (максимум) функции $\Delta(x)$.

Если после подстановки функции $\psi(x, \varepsilon)$ в выражении (8) не получаем тождество, то значит при данном ε функция $\Delta(x)$ не имеет экстремума и катастрофы не произойдет. Когда $\psi(x, \varepsilon)$ удовлетворяет уравнению (8), то после ее подстановки в выражение (7) получим значение Δ_h , т. е. величину Δ , при которой произойдет катастрофа (расслоение). Катастрофы также не произойдет при $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h$ ($\Delta(\varepsilon)$ – реальное значение Δ при данном ε).

Увеличивая продольную деформацию ε по изложенной выше методике можно определить, когда произойдет расслоение в композитах.

5. Заключение

Разработана методика определения расслоения в однонаправленном композите при его растяжении вдоль слоев. Методика основана на использовании свойства разупрочнения связующего как при одноосном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии. Методика основана на применении методов теории катастроф.

Благодарность

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием по теме № АААА-А18-118020790145-0.

Литература

1. Батаев А. А., Батаев В. А. Композиционные материалы: строение, получение, применение. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – 384 с.
2. Михайлин Ю. А. Конструкционные полимерные композитные материалы. – М. : Изд-во Научные основы и технологии, 2008. – 822 с.
3. Мэттьюс Ф., Ролингс Р. Композиционные материалы и конструкции. Механика и технологии. – М. : Техносфера, 2004. – 407 с.
4. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. – М. : Техносфера, 2006. – 223 с.
5. Vorontsov A. N., Murzakhanov G. Kh. & Shchugorev V. N. Delamination failure of composite structures // Mechanics of Composite Materials. – 1990. – Vol. 25. – P. 723–737. – DOI: 10.1007/BF00613361.
6. Черняков С. А., Скворцов Ю. В. Анализ роста расслоений в композитных конструкциях // Вестник СамГАУ. – 2014. – № 4 (56). – С. 249–255.

7. Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1987. – Vol. 28 (1). – P. 13–20. – DOI: 10.1016/0013-7944(87)90115-9.
8. Глаголев В. В., Маркин А. А., Фурсаев А. А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах адгезионного расслоения композита // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2018. – № 1. – С. 100–109. – DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.09.
9. Астапов Н. С., Корнев В. М., Кургузов В. Д. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной // *Физическая мезомеханика*. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 49–57.
10. Smirnov S. V., Veretennikova I. A., Vichuzhanin D. I. Modeling of delamination in multi-layer metals produced by explosive welding under plastic deformation // *Computational Continuum Mechanics*. – 2014. – Vol. 7, No. 4. – P. 398–411. – DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.38. (In Russian).
11. Brewer J. C., Lagacé P. Quadratic stress for initiation of delamination // *Journal of Composite Materials*. – 1988. – Vol. 22. – P. 1141–1155. – DOI:10.1177/002199838802201205.
12. Zhang Y. W., Zeng K. Y., Thampuran R. Interface delamination generated by indentation in thin film systems – a computational mechanics study // *Materials Science and Engineering: A*. – 2001. – Vols. 319–321. – P. 893–897. – DOI: 10.1016/S0921-5093(01)01026-7.
13. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
14. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1 – М. : Мир, 1984. – 350 с.
15. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. – Екатеринбург : УрО РАН, 1995. – 190 с.
16. Wildemann V. E., Tretyakov M. P. Material testing by plotting total deformation curves // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2013. – Vol. 42. – P. 166–170. – DOI: 10.3103/S1052618813010159.
17. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М. : Наука, 1970. – 492 с.
18. Перс Л. Аналитическая динамика. – М. : Наука, 1971. – 636 с.
19. Стружанов В. В., Коркин А. В., Чайкин А. Е. Об одном подходе к определению предельной несущей способности механических систем с разупрочняющимися элементами // *Вестн. Сам. Гос. тех. ун-та сер. Физ.-мат науки*. – 2018. – Т. 22, № 4. – С. 762–773.

Received: 02.01.2022

Revised: 15.02.2022

Accepted: 25.02.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.025-037

MARTENSITIC TRANSFORMATIONS IN PLASTIC AND FRACTURE ZONES OF THE 05G20S2 METASTABLE STEEL DURING CYCLIC TESTS

S. V. Gladkovsky^{a)}, I. S. Kamantsev^{b)}, V. E. Veselova^{c)}, * and Yu. V. Khudorozhkova^{d)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-3542-6242>  gsv@imach.uran.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0003-0775-4043>  ks@imach.uran.ru;

^{c)}  <https://orcid.org/0000-0002-4955-6435>  veselova@imach.uran.ru;

^{d)}  <https://orcid.org/0000-0003-3832-1419>  khjv@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: veselova@imach.uran.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., 620049, Ekaterinburg, Russian Federation

Tel.: +7(343)374 18 53; fax: (343) 347 53 30

X-ray diffraction analysis, EBSD technique, and transmission electron microscopy are used to reveal the features of phase and microstructural transformations developing in plastic strain and fracture zones of the 05G20S2 metastable steel (Fe-20Mn-2Si). The dependence of the phase composition of the steel on the fatigue fracture surface on the value range of the stress intensity coefficient at the fatigue crack tip is determined.

Keywords: microstructure, austenite, phase composition, strain-induced martensite, fatigue crack, plastic zone, cyclic fracture toughness, fracture microstructure.

Acknowledgment

The work was performed according to the state assignment for the IES UB RAS, theme No. AAAA-A18-118020790148-1.

We express our gratitude to M. S. Khadyev, Ph.D., A. S. Patselov, and S. N. Sergeev for their assistance in conducting microstructural studies and X-ray diffraction analysis.

Our thanks are also due to Prof. Yu. N. Simonov head of the Department of MHT PNRPU, for the opportunity to use the licensed SIAMS-700 program for quantitative metallographic analysis.

References

1. Filippov M.A., Litvinov V.S., Nemirovskiy Yu.R. *Stali s metastabilnym austenitom* [Steels with metastable austenite]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1988. (In Russian).
2. Klevtsova N.A., Frolova O.A., Klevtsov G.V. *Razrushenie austenitnykh staley i martensitnye prevrashcheniya v plasticheskikh zonakh* [Fracture of Austenitic Steels and Martensitic Transformations in Plastic Zones]. Moscow, Izd-vo Akademii Estestvoznaniya Publ., 2005. (In Russian).
3. Ju Y.-B., Koyama M., Sawaguchi T., Tsuzaki K., Noguchi H. In situ microscopic observations of low-cycle fatigue-crack propagation in high-Mn austenitic alloys with deformation-induced ϵ -martensitic transformation. *Acta Materialia*, 2016, No. 112, pp. 326–336. DOI: 10.1016/j.actamat.2016.04.042.
4. Hornbogen E. Martensitic transformation at a propagating crack. *Acta Metallurgica*, 1978, No. 26 (1), pp. 147–152. DOI: 10.1016/0001-6160(78)90211-0.
5. Bogachev I.N., Egolaev V.F. *Struktura i svoystva zhelezomargantsevykh splavov* [Structure and properties of Fe-Mn alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1973. (In Russian).

6. Vintaykin E.Z. Martensite transformats. *Itogi Nauki i Tekhniki: Metallovedenie i termicheskaya obrabotka*. T. 17 [Results of Science and Technology, Ser. Metal Science and Heat Treatment. Vol. 17]. Moscow, VINITI AN SSSR Publ., 1983, pp. 3–63. (In Russian).
7. Schumann H. *Zeitschrift für Metallkunde*, 1965, Bd. 56, Num. 3, s. 322–340.
8. Lysak L.I., Nikolin B.I. *Fizicheskie osnovy termicheskoy obrabotki stali* [Physical Basics of Steel Heat Treatment]. Kiev, Tekhnika Publ., 1975, 304 p. (In Russian).
9. Sokolov O.G., Katsov K.B. *Zhelezomargantsevye splavy* [Ferromanganese alloys]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1982, 216 p. (In Russian).
10. Volynova T.F. *Vysokomargantsevye stali i splavy* [High Manganese Steels and Alloys]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1988, 343 p. (In Russian).
11. Georgieva I.Y., Gulyaev A.A., Kondrateva E.Y. Deformation twinning and mechanical properties of austenitic manganese steels. *Metal Science and Heat Treatment*, 1976, vol. 18 (7–8), pp. 723–726. DOI: 10.1007/BF00705115.
12. Zolotarevskij V.S. *Mekhanicheskie svoystva metallov* [Mechanical properties of metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1983, 352 p. (In Russian).
13. Panin V.E., Likhachev V.A., Grinyaev Yu.V. *Strukturnye urovni deformatsii tverdykh tel* [Structural levels of deformation of solids]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1985, 229 p. (In Russian).
14. Malinov L.S., Harlanova E.Ya. Influence of alloying and preliminary deformation on the phase composition and mechanical properties of Fe-Mn alloys. *Izv. AN SSSR. Metally*. 1981, No. 6, pp. 141–147. (In Russian).
15. Ivanova B.C., Bot vina L.F., Saprykin Yu.V., Kozlov P.M. Structural-changes under fracture surface of Kh18N9T steel specimens. *Fizika Metallov i Metallovedenie*, 1975, vol. 39 (6), pp. 1251–1256. (In Russian).
16. Goritskiy V.M., Terent'ev V.F. *Struktura i ustalostnoe razrushenie metallov* [Structure and Disastrous Fatigue Failure of Metals]. Moscow, Metallurgiya Publ., 1980, 208 p. (In Russian).
17. Botvina L.R. *Kinetika razrusheniya konstruktsionnykh materialov* [Fracture Kinetics of Construction Materials]. Moscow, Nauka Publ., 1989, 230 p. (In Russian).
18. Martin S., Wolf S., Martin U., Krüger L. Influence of temperature on phase transformation and deformation mechanisms of cast CrMnNi-TRIP/TWIP steel. *Solid State Phenomena*, 2011, vols 172–174, pp. 172–177. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.172-174.172. Available at: <https://www.scientific.net/SSP.172-174.172>
19. Martin S., Ullrich C., Rafaja D. Deformation of austenitic CrMnNi TRIP/TWIP steels: Nature and role of the ϵ -martensite. *Materials Today: Proceedings*, 2015, vol. 2, suppl. 3, pp. S643–S646. DOI: 10.1016/j.matpr.2015.07.366.
20. Weidner A., Martin S., Klemm V., Martin U., Biermann H. Stacking faults in high-alloyed metastable austenitic cast steel observed by electron channelling contrast imaging. *Scripta Materialia*, 2011, pp. 513–516. DOI: 10.1016/j.scriptamat.2010.11.028.
21. Weidner A., Biermann H. Microstructure evolution and phase transformation in a novel highalloyed TRIP steel observed during in-situ tensile and cyclic Deformation. *Key Engineering Materials*, 2011, No. 465, pp. 350–353. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.465.350.
22. Vinogradova A., Lazareva A., Linderova M., Weidnerb A., Biermannb H. Kinetics of deformation processes in high-alloyed cast transformation-induced plasticity/twinning-induced plasticity steels determined by acoustic emission and scanning electron microscopy: Influence of austenite stability on deformation mechanisms. *Acta Materialia*, 2013, No. 61 (7), pp. 2434–2449. DOI: 10.1016/j.actamat.2013.01.016.
23. Special Features of the Granular Structure of the Surface Zone in Pipe Steel 12kh18n12t. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2015, iss. 6, pp. 63–67. DOI: 10.17804/2410-9908.2015.6.063-067. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_6_2015_Volkova_E.G._et_al._063_067.pdf
24. Pestrikov V.M. and Morozov E.M. *Mekhanika razrusheniya. Kurs lektsii* [Fracture Mechanics. Course of Lectures]. St. Petersburg, Izd-vo Professiya Publ., 2012, 552 p.

Подана в журнал: 02.01.2022
УДК 620.186.4, 620.178.3
DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.025-037

МАРТЕНСИТНЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ В ЗОНАХ ПЛАСТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ ПРИ ИСПЫТАНИЯХ МЕТАСТАБИЛЬНОЙ СТАЛИ 05Г20С2 НА ЦИКЛИЧЕСКУЮ ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ

С. В. Гладковский^{а)}, И. С. Каманцев^{б)}, В. Е. Веселова^{в)}*, Ю. В. Худорожкова^{г)}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
д. 34, ул. Комсомольская, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

- ^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-3542-6242>  gsv@imach.uran.ru;
^{б)}  <https://orcid.org/0000-0003-0775-4043>  ks@imach.uran.ru;
^{в)}  <https://orcid.org/0000-0002-4955-6435>  veselova@imach.uran.ru;
^{г)}  <https://orcid.org/0000-0003-3832-1419>  khjv@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: veselova@imach.uran.ru
Адрес для переписки: Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Российская Федерация
Тел.: (343) 374–18–53; факс: (343) 347–53–30

Методами рентгеноструктурного и EBSD – анализа, а также просвечивающей электронной микроскопии выявлены особенности фазовых и структурных превращений, развивающихся в зонах пластической деформации и разрушения при циклическом нагружении в метастабильной стали 05Г20С2. Определена зависимость фазового состава стали на поверхности усталостного излома от размаха коэффициента интенсивности напряжений в вершине усталостной трещины.

Ключевые слова: структура, фазовый состав, аустенит, мартенсит деформации, рост усталостной трещины, пластическая зона, циклическая трещиностойкость, строение изломов.

1. Введение

Известно [1–3], что развитие деформационных мартенситных превращений в Fe-Mn, Fe-Mn-Cr и Fe-Mn-Ni-Cr сталях с метастабильным по отношению к пластической деформации аустенитом может оказывать существенное влияние на сопротивление этих материалов росту трещин в условиях циклического нагружения. При определенных температурах циклических испытаний относительно температуры точек образования мартенсита охлаждения (M_s) и мартенсита деформации (M_d) скорость роста усталостной трещины модельных Fe-Ni сталей при одинаковых значениях размаха коэффициента интенсивности напряжения (ΔK) в метастабильном состоянии ниже, чем в сплавах со структурой стабильного аустенита [4]. Соответственно циклическая трещиностойкость метастабильных аустенитных сталей (МАС) выше по сравнению со стабильными. Основным механизмом повышения трещиностойкости МАС считается формирование остаточных сжимающих напряжений в результате объемного эффекта образования α' -мартенсита деформации, способствующего перераспределению пиковых растягивающих напряжений в вершине усталостной трещины. Для МАС системы Fe-30Mn-(2-6)Al-(4-6)Si с низкой интенсивностью образования α' -мартенсита деформации повышение циклической трещиностойкости может обеспечиваться развитием деформационного $\gamma \rightarrow \epsilon$ превращения. Так, для сталей данной группы наибольшее сопротивление малоцикло-вой усталости достигается в стали с содержанием 4 % Si и 2 % Al [3], что связывается с образованием в процессе испытаний ϵ -мартенсита, способствующего уменьшению локализации

пластической деформации, отклонению трещины от магистрального направления и перераспределению напряжений в ее вершине.

Микроструктурные особенности деформационных мартенситных превращений и условия образования α' - и ε -мартенсита деформации в сталях и сплавах типа Г20 с низкой энергией дефектов упаковки (ЭДУ) проанализированы в работах [1, 5–10]. Основные кристаллографические соотношения при образовании мартенситных фаз охлаждения сохраняются и при образовании мартенсита деформации. Морфологически мартенсит деформации является более дисперсным по сравнению с мартенситом охлаждения. Пластическая деформация сталей и сплавов системы Fe-Mn со структурой аустенита различной стабильности вызывает также развитие процессов деформационного двойникования [11], которые активизируются

с понижением температуры и ростом скорости деформации [12]. Авторы [13] считают, что деформационное двойникование может проходить параллельно с образованием мартенситных фаз деформации, а в случае повышенной стабильности аустенита – развиваться самостоятельно. Согласно данным [1, 5, 10, 14] в Fe-Mn и Fe-Cr-Mn метастабильных сталях в зависимости от температуры и условий механического воздействия деформационные двойники образуются как в аустените, так и в ГПУ ε -фазе. Эволюция микроструктуры метастабильных сталей при деформации происходит в следующей последовательности: формирование ячеистой дислокационной структуры в аустените → появление в аустените пакетов ДУ → образование внутри пакетов ДУ тонких пластин двойников и ε -фазы → образование кристаллов α' -мартенсита. Образование α' -мартенсита усиливается с повышением степени деформации и активнее развивается в сталях с двухфазной ($\gamma+\varepsilon$)-структурой по сравнению с аустенитными сталями.

По данным работы [15], количество мартенсита деформации в вершине развивающейся трещины при циклическом нагружении образцов стали 12X18H9T зависит от таких факторов как амплитуда деформации, температура испытаний и скорость распространения трещин. При этом количество α' -фазы на стадии стабильного роста трещины на 10–20 % ниже, чем на стадии ее ускоренного роста. Более низкие значения скорости роста трещины (dl/dN) с ростом количества α' -мартенсита в ее вершине согласуются с тем, что значение dl/dN в мартенсите меньше, чем в аустените [16]. Для сталей системы Fe-Mn-Cr авторами [2, 17] методом рентгеноструктурного анализа установлена связь между изменением фазового состава на поверхности усталостной трещины и величиной действующего в вершине трещины размаха коэффициента интенсивности напряжений (ΔK). Так, для стали 03X13AG19 с ростом ΔK содержание α' -фазы на поверхности усталостного излома возрастает до 45 %, а количество ε -мартенсита в широком интервале значений ΔK сохраняется на постоянном уровне (около 20 %), а в стали с повышенной стабильностью аустенита 07X13H4AG20 α' -мартенсит деформации не образуется, а количество ε -фазы с ростом ΔK достигает 15–18 %. Новые возможности изучения фазовых и структурных превращений на сопротивление усталости МАС связаны с эффективным использованием в последние годы методов РЭМ с привлечением EBSD-анализа непосредственно в процессе статического и циклического нагружения (*in-situ*) [19–23].

Использование EBSD-анализа позволило оценить количество α' - и ε -мартенсита, образующегося на поверхности плоских образцов метастабильной стали Fe-16Cr-6Mn-6Ni при усталостных испытаниях с увеличением числа циклов нагружения до $N = 500$ [22]. Следует отметить, что особенности развития фазовых и структурных превращений в условиях роста усталостных трещин для широкой группы метастабильных сталей типа Г20 остаются малоизученными. Цель настоящей работы – изучение фазовых и структурных превращений в метастабильной стали 05Г20С2 в локальных зонах пластической деформации и разрушения при испытаниях на циклическую трещиностойкость.

2. Материал и методика

В качестве материала исследования в работе использовалась двухфазная ($\gamma+\epsilon$)-метастабильная сталь 05Г20С2 после закалки от температуры 1050 °С с охлаждением в воде. Химический состав стали, определенный на приборе СРЕКТРОМАХх, приведен в табл. 1.

Таблица 1

Химический состав стали 05Г20С2

Элемент	C	Mn	Si	Ni	Cu	Al	Fe
Содержание, мас. %	0,06	19,70	1,48	0,06	0,072	0,032	Осн.

Анализ фазового состава исходной стали и поверхности различных участков полученных изломов был проведен с использованием дифрактометра ДРОН-3 в кобальтовом $K\alpha$ -излучении.

Изучение микроструктуры стали в исходном состоянии проводили методом ориентационно-фазового контраста, используя на сканирующий электронный микроскоп TESCAN MIRA 3 LMH

Исследование тонкой структуры стали в зоне циклической пластической деформации методом просвечивающей электронной микроскопии (ПЭМ) осуществлялось на просвечивающем электронном микроскопе ЭВМ-100Л. Вырезка заготовок тонких фольг для ПЭМ из неразрушенного компактного образца с усталостной трещиной и образца после циклических испытаний и статического долома осуществлялась по схеме, представленной на рис. 1, а, в пределах зоны циклической пластической деформации непосредственно в вершине усталостной трещины (плоскость 1) и на удалении от нее 0,5 мм (плоскость 2), а также зоны под поверхностью излома (0,5 мм) на участке циклического и статического роста трещины (плоскость 3). Подготовка тонких фольг для исследований включала вырезку слоев металла на электроискровой установке FANUC, механическое утонение слоя с использованием абразивной бумаги и последующее ионное утонение на установке Fishione 1010 Ionmill.

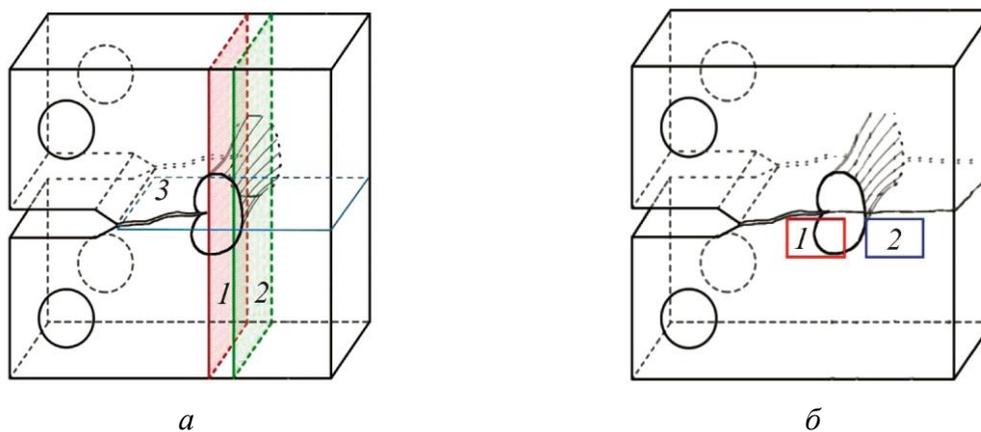


Рис. 1. Схема вырезки образцов: а – фольги для ПЭМ (плоскости 1, 2, 3); б – образцы для EBSD (1 и 2 – участки для вырезки образцов)

Изучение строения излома образцов стали 05Г20С2 и микрорентгеноспектральный анализ боковой поверхности проводились с использованием растрового электронного микроскопа TESCAN VEGA II XMU при величине ускоряющего напряжения 30 кВ. Для получения картин дифракции обратноотраженных электронов (EBSD) использовался программный комплекс Aztec с приставкой Oxford NKLNordlysF+. Схема вырезки образцов из компактно-

го образца после разрушения под поверхностью усталостного и статического излома для проведения EBSD-анализа представлена на рис. 1 б.

Определение механических свойств при одноосном растяжении осуществлялось с использованием испытательной системы INSTRON8801 на цилиндрических 5-кратных образцах (тип III по ГОСТ 1497-84 диаметром 5 мм). Испытания проводили при комнатной температуре и скорости перемещения активного захвата 1 мм/мин. Значения механических свойств усредняли по результатам испытаний не менее трех идентичных образцов. Испытания на циклическую трещиностойкость проводились по схеме внецентренного растяжения при $t = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ на компактных образцах толщиной 2,8 мм (тип 4 по ГОСТ 25.506-85) по методике согласно РД 50345-82 с использованием высокочастотной резонансной испытательной машины MIKROTRON (20 кН). По результатам испытаний в двойных логарифмических координатах строили кинетическую диаграмму усталостного разрушения (КДУР) в координатах «скорость роста усталостной трещины – размах коэффициента интенсивности напряжений» ($dl/dN - \Delta K$). Частота нагружения составляла 100 Гц, а коэффициент асимметрии цикла соответствовал величине $R = 0,1$.

При проведении исследований использовалось оборудование ЦКП «Пластометрия» ИМАШ УрО РАН.

3. Результаты и обсуждение

Зеренная структура закаленной стали 05Г20С2, выявленная методом ориентационно-фазового контраста представлена на рис. 2 а. Обработка полученного изображения микроструктуры стали в программе SIAMS-700 позволила оценить характер распределения диаметра аустенитного зерна, средний размер которого соответствовал значениям $d = 25\text{--}55\text{ мкм}$ (рис. 2 б).

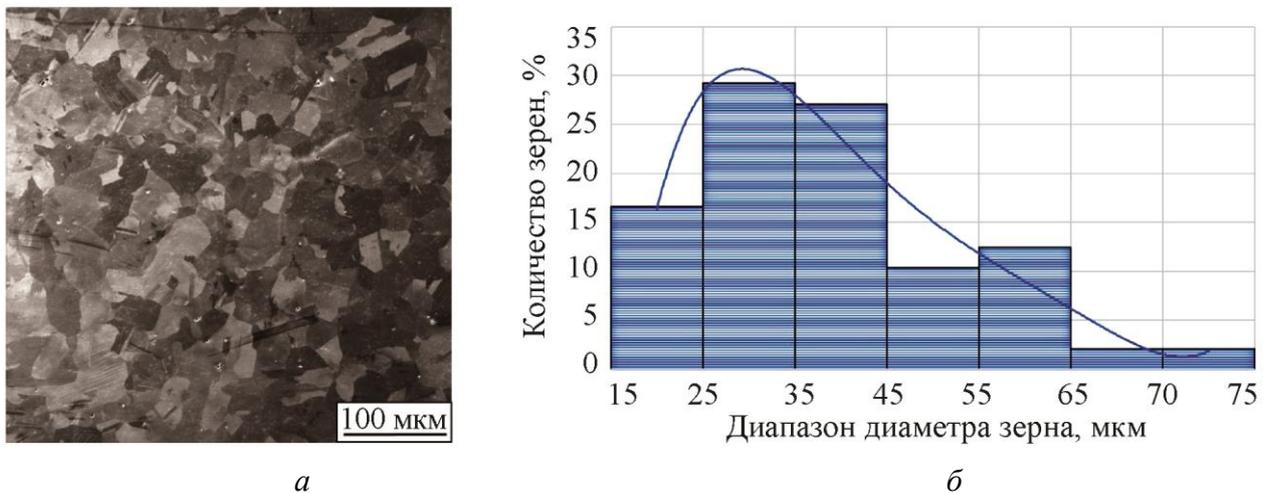


Рис. 2. Микроструктура стали 05Г20С2 в исходном закаленном состоянии:
а – изображение; б – средний размер зерна

Фазовый состав стали 05Г20С2 в исходном состоянии и на поверхности статического излома, а также механические свойства при испытаниях на растяжение представлены в табл. 2.

Установлено, что в структуре закаленной стали содержалось 55 % ϵ -мартенсита с ГПУ-решеткой и 45% γ -аустенита (табл. 2). На поверхности излома в зоне статического роста трещины образуется 37 % α' -мартенсита деформации, а содержание ϵ -мартенсита и аустенита снижается с 55 до 48 % и с 45 до 15 % соответственно. Наблюдаемое изменение фазового состава стали 05Г20С2 в статическом изломе указывает на последовательный характер мартенситных $\gamma \rightarrow \epsilon \rightarrow \alpha'$ -превращений при статическом нагружении образца с усталостной трещиной.

Таблица 2

Фазовый состав и механические свойства стали 05Г20С2

Фазовый состав*				Механические свойства			
Фаза	γ	ϵ	α'	$\sigma_{0,2}$, МПа	σ_B , МПа	δ , %	ψ , %
Количество, %	45/15	55/48	0/37	430	810	40	48

* В числителе указаны значения после закалки, а в знаменателе – на поверхности разрушения при статическом нагружении

По результатам циклических испытаний установлено, что пороговый коэффициент интенсивности напряжений изученной стали составляет $K_{th} = 18 \text{ МПа} \times \text{м}^{1/2}$ (рис. 3). При достижении второго участка Париса на КДУР в области $\Delta K > 20 \text{ МПа} \times \text{м}^{1/2}$ зависимость ($dl/dN - \Delta K$) приобретает линейный характер. Второй линейный участок КДУР аппроксимировался уравнением Париса [24]. Для этого участка экспериментально определенные эмпирические коэффициенты в уравнении Париса (1)

$$dl/dN = C (\Delta K)^m \tag{1}$$

соответствовали значениям $C = 6 \times 10^{-9}$; $m = 3,1$. При этом с повышением размаха коэффициента интенсивности напряжений до $\Delta K = 50 \text{ МПа} \times \text{м}^{1/2}$ скорость роста усталостной трещины увеличивается до значения $dl/dN = 1 \times 10^{-3} \text{ мм/цикл}$.

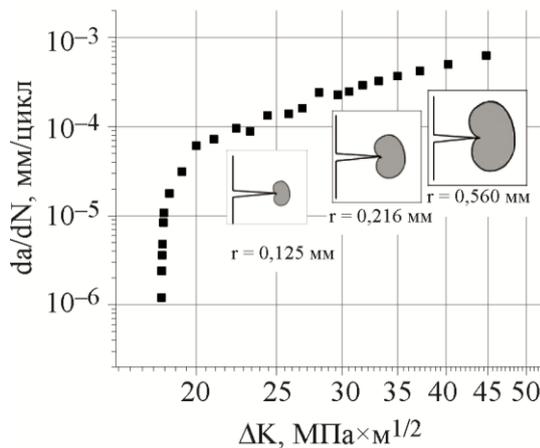


Рис. 3. Кинетическая диаграмма усталостного роста трещины в стали 05Г20С2

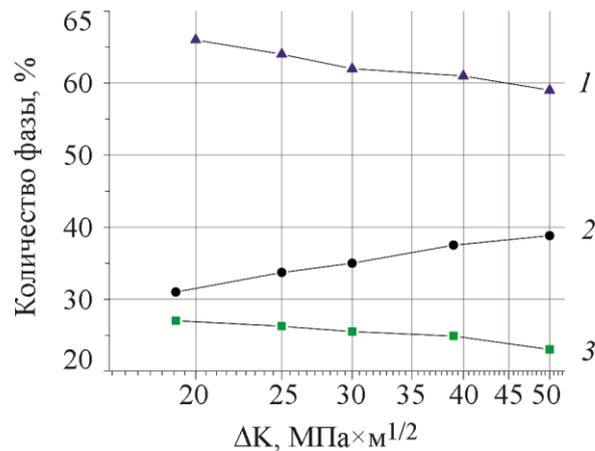


Рис. 4. Фазовый состав стали 05Г20С2 на поверхности усталостного излома:
1 – ϵ -мартенсит с ГПУ решеткой;
2 – α' -мартенсит деформации;
3 – γ -аустенит

Проведенные расчеты протяженности циклической пластической зоны перед растущей усталостной трещиной по формуле (2) [4]:

$$r = 1/8\pi (\Delta K/\sigma_{0,2})^2 \tag{2}$$

где ΔK – размах коэффициента интенсивности напряжений и $\sigma_{0,2}$ – условный предел текучести показали, что ее размер с ростом трещины увеличивается в пределах $r = 0,125-0,560 \text{ мм}$ (рис. 3). Таким образом, вырезанные для ПЭМ фольги находились в пределах циклической зоны пластической деформации. Согласно данным рентгенофазового анализа в

структуре закаленной стали 05Г20С2 на различных участках усталостного излома с ростом размаха ΔK в пределах 20–50 МПа \times м^{1/2} происходит монотонное увеличение количества α' -мартенсита, сопровождающееся снижением содержания аустенита и ϵ -мартенсита (рис. 4). При этом содержание α' -мартенсита деформации в изломе на конечном участке роста усталостной трещины в области $\Delta K = 45\text{--}50$ МПа \times м^{1/2} достигло 39 %, что сопоставимо с количеством данной фазы, зафиксированной на поверхности статического роста трещины (37 %).

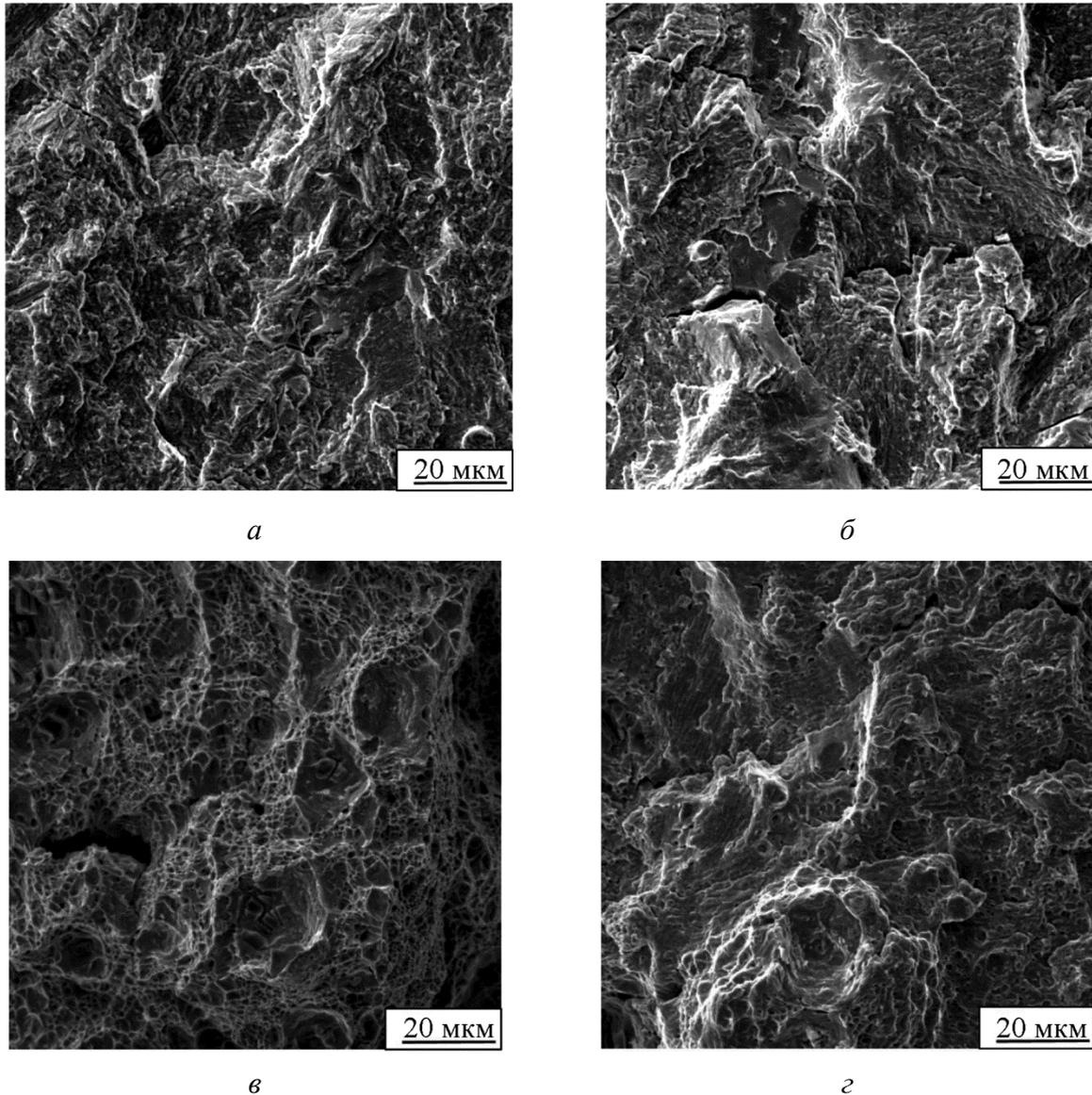


Рис. 5. Микростроение излома стали 05Г20С2: *а* – в зоне циклического разрушения ($\Delta K = 18,5$ МПа \times м^{1/2}); *б* – в зоне циклического разрушения ($\Delta K = 30$ МПа \times м^{1/2}); *в* – в зоне циклического разрушения ($\Delta K = 43$ МПа \times м^{1/2}); *г* – в зоне статического нагружения

Как видно из приведенных на рис. 5 *а* изображений микростроения изломов стали 05Г20С2 на участке роста усталостной трещины при средних значениях $\Delta K = 18,5$ МПа \times м^{1/2}, усталостные бороздки только начинают формироваться и не имеют регулярного строения. При средних значениях $\Delta K = 30$ МПа \times м^{1/2} в изломе с многочисленными ступеньками и вторичными трещинами появляются выраженные усталостные бороздки (рис. 5 *б*). На поверхности излома наблюдаются также гладкие фасетки квазисклольного разрушения и элементы

гребенчатого рельефа, описанного авторами [16]. На участке излома, полученного при повышенных средних значениях $\Delta K = 43 \text{ МПа} \times \text{м}^{1/2}$, наряду с развитыми усталостными бороздками наблюдаются типичные вязкие ямки, характерные для статического роста трещины в пластичных сталях (рис. 5 в).

Наличие вязких ямок на участке циклического роста трещины указывает на значительный вклад статической моды разрушения в формирование рельефа усталостного излома при повышенных значениях размаха ΔK [18]. Участок статического роста трещины (зона долома) имеет типичное вязкое ямочное строение (рис. 5 з). Причем на дне отдельных вязких ямок просматриваются частицы нерастворившихся при закалке первичных интерметаллидов типа $\text{Fe}_2(\text{Mn}, \text{Ti})$ [1, 9].

При этом кольцевая электронограмма подтверждает двухфазный ($\epsilon + \gamma$) состав исходной структуры стали 05Г20С2 (рис. 6 а). Согласно данным ПЭМ (рис. 6 а) исходная структура двухфазной ($\epsilon + \gamma$)-стали 05Г20С2 после закалки содержит пересекающиеся пластины ГПУ ϵ -фазы с габитусом, параллельным плоскостям $\{111\}$ γ -фазы. Широкие пластины ϵ -мартенсита состоят из более узких и имеют высокую плотность дефектов упаковки. Размер пластин колеблется в пределах 0,1–0,9 мкм. Пластины средних и малых размеров имеют дифракционный контраст равномерный по всей пластине, что свидетельствует об однородном строении гексагональной ϵ -фазы.

По аналогии со структурными изменениями при объемной пластической деформации сталей типа Г20 [1, 5, 8, 9] при комнатной температуре в циклической пластической зоне непосредственно в вершине трещины компактных образцов стали 05Г20С2 наблюдаются деформированные участки γ -фазы с повышенной плотностью дислокаций, нарушается исходная ориентировка и происходит дробление пластин ϵ -мартенсита и формируется трехмерная срелаксированная сетка двойников и дефектов упаковки (рис. 6 б, в). В пластинах ϵ -мартенсита, имеющих наиболее высокую плотность дислокаций, а также в местах пересечения одних пластин с другими располагаются кристаллы линзовидной формы, морфологически подобные деформационным двойникам ϵ -фазы, которые, согласно расшифровке картин микродифракции, являются частицами α' -мартенсита деформации.

На расстоянии 0,5 мм от вершины усталостной трещины в структуре наблюдается повышенная плотность ДУ и деформационных двойников, а также дислокации в плоскости (001) ϵ -пластин (рис. 6 з). При этом линзовидных кристаллов α' -мартенсита методом ПЭМ не зафиксировано.

Наблюдаемое различие в тонкой структуре стали у вершины трещины и на расстоянии 0,5 мм от нее связано с неоднородностью строения самой пластической зоны деформации и наличием в ее пределах участка более тяжело нагруженной циклической зоны, примыкающей к вершине трещины, и последующей монотонной пластической зоны [2].

В плоскости 3, под изломом в зоне циклического распространения трещины расшифровка электронограммы (рис. 6 д) подтвердила трехфазный ($\gamma + \epsilon + \alpha$)-состав стали. Линзовидные α' -кристаллы, располагающиеся в ϵ -пластинах, иногда вклиниваются в аустенитную матрицу. Таким образом, пластическая деформация в вершине трещины при циклическом нагружении образца сопровождается образованием α' -мартенсита деформации.

Как видно из полученных методом EBSD-анализа карт распределения фаз для выбранных участков боковой поверхности циклически нагружаемого образца закаленной стали 05Г20С2, на участке 1 (рис. 1 б) вблизи линии роста усталостной трещины происходит образование в пределах пластической зоны кристаллов α' -мартенсита деформации (рис. 7 а).

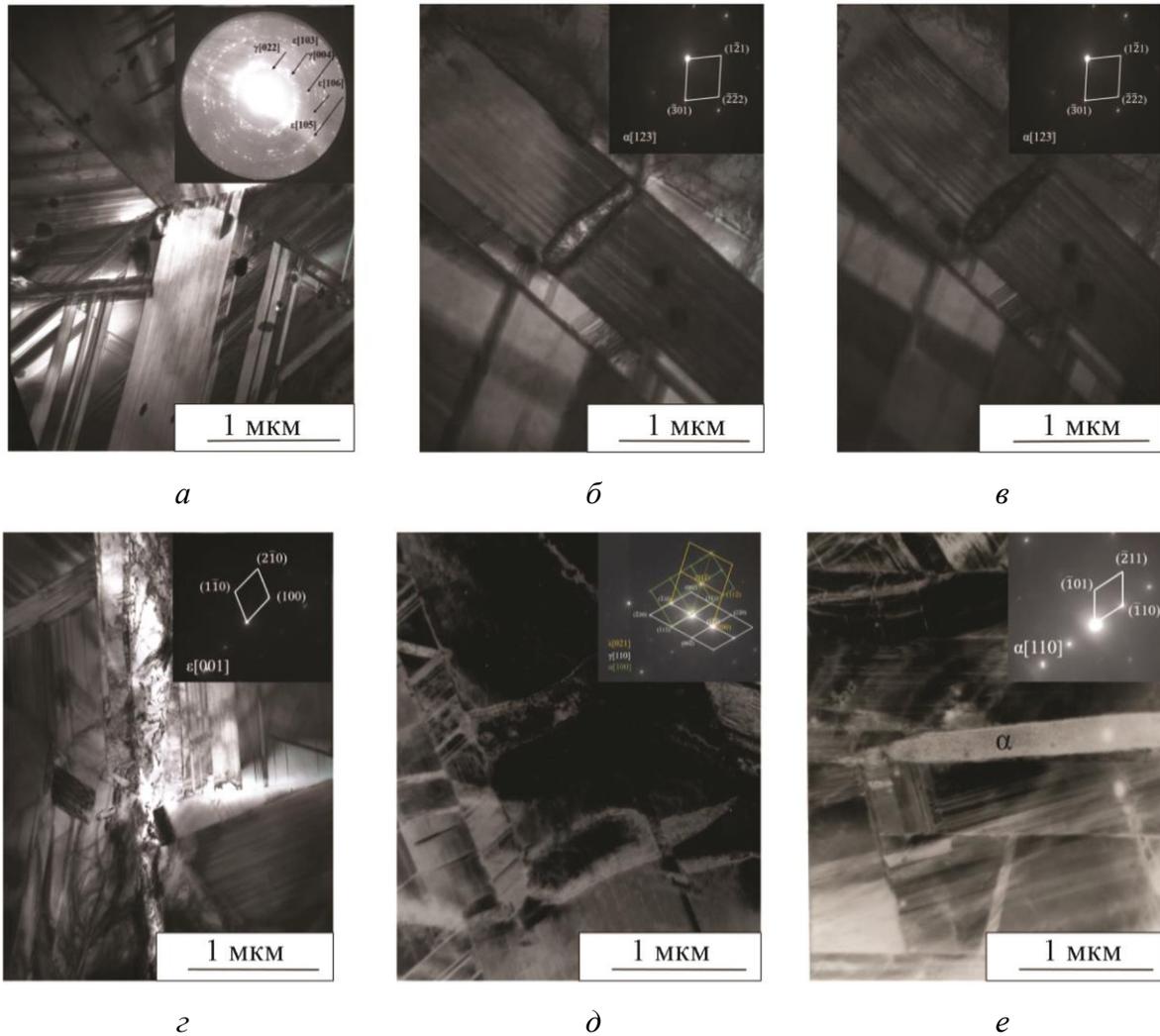


Рис. 6. ПЭМ-изображения стали 05Г20С2: *a* – исходное; *б* – зона плоскости 1 (рис. 1 *a*) (светлопольное изображение); *в* – зона плоскости 1 (темнопольное изображение); *г* – зона плоскости 2; *д* – зона плоскости 3 (участок циклического разрушения); *е* – зона плоскости 3 (участок статического разрушения)

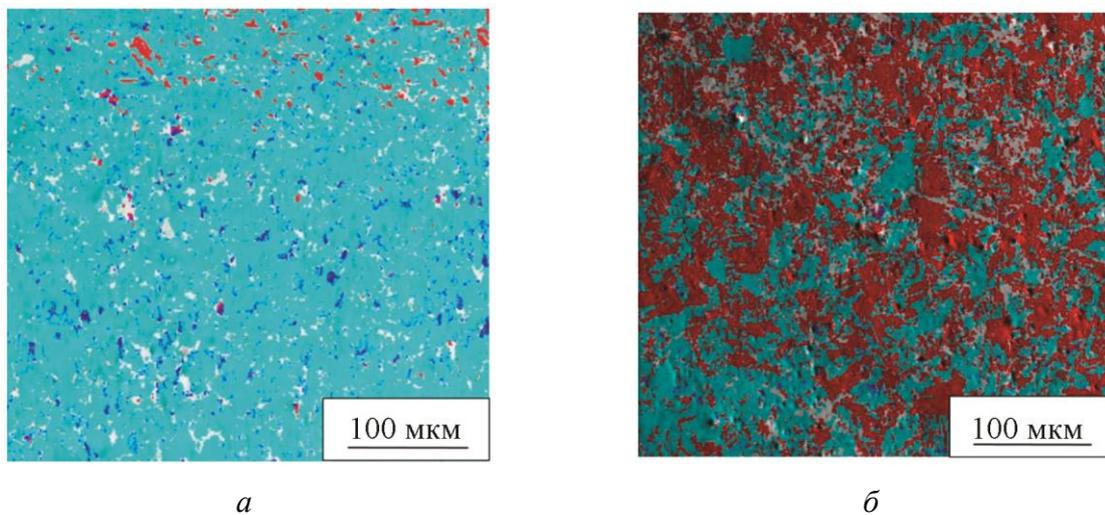


Рис. 7. Карты распределения фаз (■ – α' , ■ – γ , ■ – ϵ):
a – участок 1; *б* – участок 2 (рис. 1 *б*)

Размер зоны, в которой интенсивность образования новой фазы наиболее значительна, составляет порядка 150 мкм, что несколько меньше, чем расчетный размер ЛЗПД при данном уровне КИН ($\tau \approx 0,216$ мм). По мере удаления от плоскости усталостного излома количество участков α' -мартенсита деформации уменьшается. Сравнение карт распределения фаз показало, что содержание α' -мартенсита в зоне под статическим доломом значительно выше по сравнению с зоной под поверхностью участка циклического распространения трещины (рис. 7 а, б).

4. Выводы

1. На поверхности усталостного излома компактных образцов двухфазной ($\gamma+\epsilon$)-метастабильной стали 05Г20С2 зафиксировано наличие α' -мартенсита деформации, содержание которого с ростом значений $\Delta K = 20\text{--}50$ МПа \times м^{1/2} при испытаниях на циклическую трещиностойкость увеличивается от 21 до 39 %. При этом количество γ -и ϵ -фаз с ростом значений ΔK уменьшается с 45 до 15 % и с 55 до 48 % соответственно.
2. Предельное количество деформационной α' -фазы в усталостном изломе (39 %) метастабильной стали 05Г20С2 соизмеримо с его содержанием в статической зоне долома (37 %).
3. Определены фрактографические особенности и механизмы роста трещины на различных участках усталостного излома, проявляющиеся в образовании бороздчатого и гребенчатого рельефа, а также в реализации смешанной циклической и статической моды разрушения стали при высоком среднем значении размаха $\Delta K = 43$ МПа \times м^{1/2}.
4. Методом ПЭМ в зоне циклической пластической деформации непосредственно в вершине усталостной трещины выявлено существенное изменение тонкой структуры стали 05Г20С2 по сравнению с исходным состоянием, заключающиеся в увеличении плотности дислокаций в аустените и ДУ в пластинах ϵ -фазы, а также в образовании линзовидных кристаллов α' -мартенсита деформации.
5. Показано, что выявленные методом ПЭМ изменения структуры стали в зонах циклической пластической деформации и разрушения хорошо согласуются с результатами EBSD-анализа боковой поверхности компактного образца.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМАШ УрО РАН по теме № АААА-А18-118020790148-1.

Авторы выражают благодарность к.т.н. Хадыеву М. С., к.ф.-м.н. Пацелову А. С. и Сергееву С. Н. за помощь в проведении микроструктурных исследований и рентгеноструктурного анализа.

Авторы выражают благодарность зав. кафедрой МТО ПНИПУ проф., д.т.н. Симонову Ю.Н. за предоставленную возможность использования лицензированной программы SIAMS-700 для проведения количественного металлографического анализа.

Литература

1. Филиппов М. А., Литвинов В. С., Немировский Ю. Р. Стали с метастабильным аустенитом. – М. : Металлургия, 1988. – 256 с.
2. Клевцова Н. А., Фролова О. А., Клевцов Г. В. Разрушение аустенитных сталей и мартенситные превращения в пластических зонах. – М. : Изд-во Академии Естествознания, 2005. – 155 с.
3. In situ microscopic observations of low-cycle fatigue-crack propagation in high-Mn austenitic alloys with deformation-induced ϵ -martensitic transformation / Y.-B. Ju, M. Koyama, T. Sawaguchi, K. Tsuzaki, H. Noguchi // Acta Materialia. – 2016. – No. 112. – P. 326–336. – DOI: 10.1016/j.actamat.2016.04.042.

4. Hornbogen E. Martensitic transformation at a propagating crack // *Acta Metallurgica*. – 1978. – No. 26 (1). – P. 147–152. – DOI:10.1016/0001-6160(78)90211-0.
5. Богачев И. Н., Еголаев В. Ф. Структура и свойства железомарганцевых сплавов. – М. : Металлургия, 1973. – 295 с.
6. Винтайкин Е. З. Мартенситные превращения // *Итоги науки и техники : Серия «Металловедение и термическая обработка»* / Гос. ком. Совета Министров СССР по науке и технике. ВИНТИ, АН СССР. – Москва : 1972. – Т. 17. – 1983. – С. 3–63.
7. Schumann H. // *Zeitschrift für metallkunde*. – Bd. 56 (3). – 1965. – S. 322–340.
8. Лысак Л. И., Николин Б. И. Физические основы термической обработки стали. – Киев : Техніка, 1975. – 304 с.
9. Соколов О. Г., Кацов К. Б. Железомарганцевые сплавы. – Киев : Наук. думка, 1982. – 216 с.
10. Воынова Т. Ф. Высокомарганцевые стали и сплавы. – М. : Металлургия, 1988. – 343 с.
11. Georgieva I. Y., Gulyaev A. A., Kondrateva E. Y. Deformation twinning and mechanical properties of austenitic manganese steels // *Metal Science and Heat Treatment*. – 1976. – Vol. 18 (7–8). – P. 723–726. DOI: 10.1007/BF00705115.
12. Золоторевский В. С. Механические свойства металлов. – М. : Металлургия, 1983. – 352 с.
13. Панин В. Е., Лихачев В. А., Гриняев Ю. В. Структурные уровни деформации твердых тел. – Новосибирск : Наука, 1985. – 229 с.
14. Малинов Л. С., Харланова Е. Я. Влияние легирования и предварительной деформации на фазовый состав и механические свойства сплавов Fe-Mn // *Изв. –АН СССР. Металлы*. – 1981. – № 6. – С.141–147.
15. Структурные изменения под поверхностью разрушения образцов из стали X18H9T / В. С. Иванова, Л. Р. Ботвина, Ю. В. Сапрыкин, П. М. Козлов // *ФММ*. – 1975. – Т. 39, вып. 6. – С. 1251–1256.
16. Горицкий В. М., Терентьев В. Ф. Структура и усталостное разрушение металлов. – М. : Металлургия, 1980. – 208 с.
17. Ботвина Л. Р. Кинетика разрушения конструкционных материалов. – М. : Наука, 1989. – 230 с.
18. Influence of temperature on phase transformation and deformation mechanisms of cast CrMnNi-TRIP/TWIP steel / S. Martin, S. Wolf, U. Martin, L. Krüger // *Solid State Phenomena*. – 2011. – Vols. 172–174. – P. 172–177. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.172-174.172. – URL: <https://www.scientific.net/SSP.172-174.172>
19. Martin S., Ullrich C., Rafaja D. Deformation of austenitic CrMnNi TRIP/TWIP steels: Nature and role of the ϵ -martensite // *Materials Today : Proceedings*. – 2015. – P. 643–646. – DOI: 10.1016/j.matpr.2015.07.366.
20. Stacking faults in high-alloyed metastable austenitic cast steel observed by electron channeling contrast imaging / A. Weidner, S. Martin, V. Klemm, U. Martin, H. Biermann // *Scripta Materialia*. – 2011. – P. 513–516. DOI: –10.1016/j.scriptamat.2010.11.028
21. Weidner A., Biermann H. Microstructure evolution and phase transformation in a novel highalloyed TRIP steel observed during in-situ tensile and cyclic Deformation // *Key Engineering Materials*. – 2011. – No. 465. – P. 350–353. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.465.350.
22. Kinetics of deformation processes in high-alloyed cast transformation-induced plasticity/twinning-induced plasticity steels determined by acoustic emission and scanning electron microscopy: Influence of austenite stability on deformation mechanisms / A. Vinogradova, A. Lazareva, M. Linderova, A. Weidnerb, H. Biermannb // *Acta Materialia*. – 2013. – No. 61 (7). – P. 2434–2449. – DOI: 10.1016/j.actamat.2013.01.016.

23. Volkova E. G., Sagaradze V. V., Malygina I. Yu. Special Features of the Granular Structure of the Surface Zone in Pipe Steel 12kh18n12t // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2015. – Iss. 6. – P. 63–67. – DOI: 10.17804/2410-9908.2015.6.063-067. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_6_2015_Volkova_E.G._et_al._063_067.pdf
24. Пестриков В. М., Морозов Е. М. Механика разрушения : курс лекций. – СПб. : Изд-во Профессия, 2012. – 552 с.

Received: 21.10.2021

Revised: 27.01.2022

Accepted: 25.02.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.038-051

A REVIEW OF EXPERIMENTAL STUDIES OF CREEP AND CREEP RUPTURE STRENGTH (2004–2021)

V. V. Nazarov

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,
1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  inmec130@mail.ru

Corresponding author. E-mail: inmec130@mail.ru

Address for correspondence: 1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russian Federation

The paper reviews studies conducted between 2004 and 2021 for various metal materials (magnesium-lithium alloy, copper, aluminum alloy, titanium alloy, steel, nickel alloy) in the temperature range from 20 to 1100 °C. In those studies the test results were obtained for isothermal creep under uniaxial tension and complex stress. The number of such studies is limited. This review does not include studies dealing with the chemical interaction of the environment with a metal material. Among these studies there are little-known and unique results. In one of those studies, the creep of a magnesium-lithium alloy at normal temperature was considered for the first time. In another study, creep curves for heat-resistant steel were supplemented with experimental stress–strain diagrams in a wide range of high temperatures. Another distinctive study, for the characteristic times of the creep process, compares photographs of changes in the microstructure and the creep curve up to the rupture time. The review lists studies that found an ambiguity in the effect of biaxial tension on the rupture time in comparison with uniaxial tension. It enumerates complex equivalent stresses with the possibility of describing the relative difference in the rupture time under uniaxial tension, biaxial tension, and triaxial tension.

Keywords: creep, creep rupture, multiaxial tension, equivalent stress.

Acknowledgment

The work was partially financially supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant 20-08-00387.

References

1. Navier C.L.M.H. Experiences sur la resistance de divers substances a la rupture causee par une tension longitudinale. *Annales de chimie et de physique*, 1826, vol. 33, pp. 225–40.
2. Vicat L.J. Note sur l'Allongement Progressif du Fil de Fer Soumis à Divers Tensions. *Annales des Ponts et Chaussées, Mémoires*, first series, first semester, 1834, pp. 40–44.
3. Edward Neville Da Costa Andrade. On the Viscous Flow in Metals, and Allied Phenomena. *Proceedings of the Royal Society A* 1910, vol. 84, No. 567, pp. 1–12. DOI: 10.1098/rspa.1910.0050.
4. Norton F.H. *The Creep of steel at high temperatures*. New York, Mc. Graw-Hill Book Company, 1929.
5. Bailey R.W. Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant. *Transactions of the World Power Conference*. Tokyo, 1929, vol. 3.

6. Shesterikov S.A., Yumasheva M.A. Shesterikov S. A., Yumasheva M. A. More precise specification of the equation of state in creep theory. *Mechanics of Solids*, 1984. vol. 19, No. 1, pp. 81–85.
7. Nazarov V.V., Lepeshkin A.R. A method for calculating creep limits. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2017, iss. 1, pp. 36–42. DOI: 10.17804/2410-9908.2017.1.036-042. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_1_2017_Nazarov_V.V._et_al._036_042.pdf
8. Nazarov V.V. Analysis of two methods for calculating the ultimate stresses of creep and creep rupture processes. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, iss. 2, pp. 28–36. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.028-036. Available at: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2019_Nazarov_V.V._028_036.pdf
9. Koval'kov V.K., Nazarov V.V., Novotnyi S.V. Procedure of high-temperature within complex stressed state. *Zavod. Lab. Diagn. Mater.*, 2006, vol. 72, No. 4, pp. 42–44. (In Russian).
10. Manna G., Castello P., Harskamp F., Hurst R., Wilshire B. Testing of welded 2.25CrMo steel, in hot, high-pressure hydrogen under creep conditions. *Engineering Fracture Mechanics*, 2007, vol. 74, iss. 6, pp. 956–968. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2006.08.021.
11. Johnson A.E., Henderson J., Mathur V.D. Combined stress creep fracture of a commercial copper at 250° C. *Engineer*, 1956, vol. 202, No. 5248, pp. 261–265.
12. Johnson A.E., Henderson J., Mathur V.D. Complex Stress Creep Fracture of an Aluminium Alloy: An Investigation Conducted at an Elevated Temperature. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, 1960, vol. 32, No 6, pp. 161–170. DOI: 10.1108/eb033263.
13. Lokoshchenko A.M., Nazarov V.V. Choice of Long-Term Strength Criteria for Metals in Combined Stress State. *Aviatsionno-Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologiya*, 2004, no. 7 (15), pp. 124–128. (In Russian). Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2004_7_27
14. Nazarov V.V., Lepeshkin A.R. Analysis of various equivalent stress options for describing the creep rupture process under a complex stress state. *AIP Conference Proceedings*, 2020, vol. 2315, pp. 020029. DOI: 10.1063/5.0037057.
15. Lokoshchenko A.M., Nazarov V.V. Kinetic approach of investigation of creep-rupture for metals under biaxial tension. *Aviatsionno-Kosmicheskaya Tekhnika i Tekhnologiya*, 2005, No. 10 (26), pp. 73–79. (In Russian). Available at: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2005_10_15
16. Kobayashi H., Ohki R., Itoh T., Sakane M. Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel. *Engineering Fracture Mechanics*, 2017, vol. 174, pp. 30–43. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.01.001.
17. Sakane M., Kobayashi H., Ohki R., Itoh T. Creep void formation and rupture lifetime in multiaxial stress states. *Key Engineering Materials*, 2019, vol. 795, pp. 159–164. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.795.159.
18. Golubovskii E.R. and Demidov A.G. Estimation of Long-Term Strength of Alloy EI437BU-VD for Gas Turbine Disks in Combined Stress State. *Vestnik Dvigatelsestr.*, 2008, No. 3, pp. 106–110. (In Russian).
19. Ilyin S.I., Koryagin Yu.D., Lapina I.V. Creep of ultralight magnesium alloys at low temperatures. *Vestnik YuUGU. Seriya Metallurgiya*. 2012, No. 15. pp. 105–107. (In Russian).
20. Jiang Y., Lin Y., Phaniraj C., Xia Y., Zhou H. Creep and creep rupture behavior of 2124-T851 aluminum alloy. *High Temperature Materials and Processes*, 2013, vol. 32, iss. 6, pp. 533–540. DOI: 10.1515/htmp-2012-0172.
21. Nazarov V.V. Short-term creep of titanium alloys VT5 and VT6 at high temperature. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*. 2015, vol. 81, No. 6, pp. 57–60. (In Russian).
22. Zeng L.Y., Zhao Y.Q., Mao X.N., Hong Q., Qi Y.L. Creep features of Ti-600 alloy at the temperature of 650 C. *Materials Science Forum*, 2018, vol. 941, pp. 995–1003. DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.941.995.
23. Niu L. B., Kobayashi M., Takaku H., Azuma T. Aging effect on creep rupture properties of super-clean 9%CrMoV steel for steam turbine rotors of combined cycle power plants. *Key Engi-*

- neering Materials*, 2004, vol. 274–276, pp. 931–936. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.274-276.931.
24. Niu L.B., Matsushima I., Akiu T. Influence of aging on creep rupture properties of heat resistant steels for steam turbine rotors of thermal power plants. *Advanced Materials Research*, 2011, vol. 291–294, pp. 1122–1125. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.274-276.931.
 25. Thomas A., Seliger P. Creep properties and damage behaviour of component-like tubes of Vm12-materials. *Materials at High Temperatures*, 2011, vol. 28, No 2, pp. 114–119. DOI: 10.3184/096034011X13059086139272.
 26. Goyal S., Laha K., Selvi S.P., Mathew M.D. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels. *Materials at High Temperatures*, 2014, vol. 31, iss. 3, pp. 211–220. DOI: 10.1179/1878641314Y.0000000016.
 27. Wang Y., Zhang W., Wang Y., Lim Y. C., Yu X., Feng Z. Experimental evaluation of localized creep deformation in grade 91 steel weldments. *Materials Science and Engineering: A*, 2021, vol. 799, pp. 140356. DOI: 10.1016/j.msea.2020.140356.
 28. Nguyen T.T., Jeong T.M., Erten D.T., Yoon K.B. Creep deformation and rupture behaviour of service-exposed super 304H steel boiler tubes. *Materials at High Temperatures*, 2021, vol. 38, iss. 1, pp. 61–72. DOI:10.1080/09603409.2020.1830609.
 29. Xie Z.G., He Y.M., Yang J.G., Gao Z.L. Microstructural evolution of nuclear power steel A508-III in the creep process at 800°C. *Applied Mechanics and Materials*, 2017, vol. 853, pp. 153–157. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.853.153.
 30. Mohta K., Gupta S. K., Cathirvolu S., Jaganathan S., Chattopadhyaya J. High temperature deformation behavior of Indian PHWR Calandria material SS 304L. *Nuclear Engineering and Design*, 2020, vol. 368, pp. 110801. DOI: 10.1016/j.nucengdes.2020.110801.
 31. Kim S.J., Kong Y.S., Roh Y.J., Jung W.T. On statistical properties of high temperature creep rupture data in STS304 stainless steels. *Key Engineering Materials*, 2006, vol. 326–328, pp. 553–556. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.326-328.553.
 32. Nai Q.Z., Hong X., Xue P.M., Gang W. Study on high temperature creep behaviors of P92 steel. *Key Engineering Materials*, 2011, vol. 452–453, pp. 521–524. DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.452-453.521.
 33. Facai R., Xiaoying T. Mechanical properties of Grade 91 steel at high temperatures. *Journal of Physics: Conference Series*, 2019, vol. 1168, iss. 2, pp. 022013. DOI: 10.1088/1742-6596/1168/2/022013.
 34. Dao V.H., Yoon K.B., Yang G., Oh J.S. Determination of creep constitutive model for 28–48WCo alloy based on experimental creep tests at 817–982°C. *Journal of Mechanical Science and Technology*, 2018, vol. 32, pp. 4201–4208. DOI: 10.1007/s12206-018-0818-0.
 35. Chu Z., Yu J., Sun X., Guan H., Hu Z. High-temperature creep deformation and fracture behavior of a directionally solidified Ni-base superalloy DZ951. *Metallurgical and Materials Transactions: A*, 2009, vol. 40, pp. 2927. DOI: 10.1007/s11661-009-0001-4.
 36. Nomura K., Kubushiro K., Nakagawa H., Murata Y. Creep rupture strength for weld joint of 23Cr–45Ni–7W alloy. *Materials Transactions*, 2016, vol. 57, iss. 12, pp. 2097–2103. DOI: 10.2320/matertrans.M2016242.
 37. Naprienko S.A., Orlov M.R. Destruction of single-crystal turbine blades of ground-based GTU. *Proceedings of VIAM*, 2016, No. 2 (38), pp. 20–31. DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-2-3-3. (In Russian).
 38. Nazarov V.V. Determination of creep properties under tension and torsion of copper tubular specimens. *Inorganic Materials*, 2014, vol. 50, pp. 1514–1515. DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-2-3-3.
 39. Nazarov V.V. Mechanical properties of a VT1-0 titanium alloy creep under tension and torsion of tubular specimens. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika materialov*, 2017, vol. 83, No. 2, pp. 66–68. (In Russian).

40. Golubovsky E.R., Demidov A.G. Creep-rupture strength and equivalence criterion of stress states of EI698VD alloy for GTD disks. *Vestnik Dvigatelistroyeniya*, 2012, No. 2, pp. 264–268. (In Russian).
41. Himeno T., Chuman Y., Tokiyoshi T., Fukahori T., Igari T. Creep rupture behaviour of circumferentially welded mod. 9Cr–1Mo steel pipe subject to internal pressure and axial load. *Materials at High Temperatures*, 2016, vol. 33, iss. 6, pp. 636–643. DOI: 10.1080/09603409.2016.1226703.
42. Itoh R., Hikida T., Ogawa F., Itoh T., Sakane M., Zhang S. Biaxial tensile creep damage of Mod.9Cr–1Mo steel using cruciform specimen. *Proceedings of 9th China–Japan Bilateral Symposium on High Temperature Strength of Materials*, 2016, pp. 60–66.
43. Lokoshchenko A.M. Estimation of equivalent stresses in the analysis of long-term strength of metals under combined stress state. *Mechanics of Solids*, 2010, vol. 45, pp. 633–647. DOI: 10.3103/S0025654410040126.

Подана в журнал: 21.10.2021
УДК 539.376
DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.038-051

ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ (2004–2021 гг.)

В. В. Назаров

*Научно-исследовательский институт механики
Федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего образования Московский государственный университет
Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  inmec130@mail.ru

Ответственный автор. Электронная почта: inmec130@mail.ru
Адрес для переписки: Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Российская Федерация

Рассмотрены работы 2004–2021 гг. для различных металлических материалов (магниево-литиевый сплав, медь, алюминиевый сплав, титановый сплав, сталь, никелевый сплав) в температурном диапазоне 20–1100 °С. В этих работах получены результаты испытаний для изотермической ползучести при одноосном растяжении и сложном напряженном состоянии. Количество таких работ ограничено. В данный обзор не вошли работы, в которых рассмотрено химическое взаимодействие окружающей среды с металлическим материалом. В представленных работах присутствуют малоизвестные и уникальные результаты, впервые рассмотрена ползучесть магниево-литиевого сплава при комнатной температуре, впервые кривые ползучести для жаропрочной стали дополнены экспериментальными диаграммами напряжение – деформация в широком диапазоне значений высокой температуры. Для характерных моментов времени процесса ползучести сделано сопоставление фотоснимков изменения микроструктуры и кривой ползучести до момента времени разрушения. Перечислены работы, в которых из эксперимента по сравнению с одноосным растяжением обнаружена неоднозначность во влиянии двухосного растяжения на время в момент разрушения. В обзоре перечислены сложные эквивалентные напряжения с возможностью описания относительного различия значений времени в момент разрушения при одноосном растяжении, двухосном растяжении и трехосном растяжении.

Ключевые слова: ползучесть, длительная прочность, многоосное растяжение, эквивалентное напряжение.

1. Введение

Впервые свойство ползучести обнаружено на основе анализа результатов механических испытаний на растяжение медных и свинцовых пластин под действием стационарной осевой силы, а также надутых полых медных шариков под действием внутреннего давления, при этом точные измерения не проводились [1]. Кривые ползучести (зависимость удлинения от времени) впервые получены при растяжении отрезков железной проволоки с различными стационарными осевыми силами, при этом за 2 года максимальное относительное удлинение оказалось равным 30 % [2]. Эти результаты механических испытаний были получены при нормальной температуре. При нагревании до высокой температуры результаты таких механических испытаний впервые получены в первой половине XX в. при растяжении отрезков проволоки при 165 °С либо при постоянной осевой силе, либо при постоянном растягивающем напряжении [3]. На основе анализа экспериментальных данных было установлено, что кривая ползучести при постоянной осевой силе расположена выше и разрушение происходит раньше, чем при постоянном растягивающем напряжении. После завершения Второй миро-

вой войны (1941–1945 гг.) и появления первых реактивных авиационных двигателей потребовалось прикладное исследование свойств ползучести при высоких температурах. В послевоенный период разными учеными были получены механические характеристики для различных марок сталей и никелевых сплавов. На сегодняшний день экспериментальные исследования свойства ползучести не прекратились. За последние годы получены принципиально новые экспериментальные результаты в области влияния многоосного растяжения на время разрушения и процесс образования микропор.

В зависимости от условий проведения эксперимента кривая ползучести характеризуется тремя последовательными интервалами во времени: убывающая ползучесть (скорость деформации убывает со временем), установившаяся ползучесть (скорость деформации не меняется со временем) и возрастающая ползучесть (скорость деформации возрастает со временем). Из анализа экспериментальных кривых ползучести определяют зависимость (набор экспериментальных значений) скорости удлинения при установившейся ползучести от номинального напряжения (напряжение в начальный момент воздействия осевой стационарной силы), а также зависимость (набор экспериментальных значений) времени в момент разрушения от номинального напряжения. Для аппроксимации этих наборов экспериментальных значений используют степенную зависимость с двумя материальными параметрами [4, 5] либо дробно-степенную зависимость с четырьмя материальными параметрами [6], два из которых принимают определенный физический смысл предельных напряжений процесса ползучести. Под предельными напряжениями понимаются напряжение стартовой ползучести (максимальное возможное напряжение, при котором процесс ползучести отсутствует) и предел кратковременной прочности (минимальное возможное напряжение, при котором происходит мгновенное разрушение). В работе [7] на примере экспериментальных данных по длительной прочности, полученных для различных металлических материалов при разных значениях высокой температуры, показано, что минимальная суммарная погрешность дробно-степенной зависимости [6] с четырьмя материальными параметрами меньше минимальной суммарной погрешности степенной зависимости [4, 5] с двумя материальными параметрами. Напряжение стартовой ползучести и предел кратковременной прочности можно либо измерить из эксперимента, либо вычислить [8] вместе с остальными двумя материальными параметрами дробно-степенной зависимости [6].

Механические испытания на ползучесть и длительную прочность проводят на цилиндрических образцах (подвергаются одноосному растяжению), прямоугольных плоских образцах (подвергаются одноосному растяжению), квадратных пластинах (подвергаются двухосному растяжению), трубчатых образцах (подвергаются одновременно кручению и растяжению либо испытывают под воздействием внутреннего давления и осевой силы), а также на кубических образцах (подвергаются трехосному растяжению). Из анализа экспериментальных данных, полученных при одноосном растяжении, определяют материальные параметры, которые затем используются в расчетных моделях на ползучесть или длительную прочность. При потребности реализации реальных условий эксплуатации элемента конструкции проводят испытания на сложное напряженное состояние [9, 10], где такие результаты испытаний (трубчатые образцы подвергались одновременно кручению и растяжению) впервые получены для меди [11] при 250 °С и авиационного алюминиевого сплава RR59 [12] при 200 °С.

2. Эквивалентные напряжения

Для описания процесса длительной прочности при сложном напряженном состоянии используют два подхода, где в первом рассматривают различные эквивалентные напряжения σ_{eq} [13, 14], а во втором – кинетику накопления рассеянных повреждений под воздействием растягивающих главных напряжений (под воздействием сжимающих главных напряжений повреждения не накапливаются) [15]. Для описания влияния многоосного растяжения на

время в момент разрушения предложено эквивалентное напряжение с двумя материальными параметрами [16, 17]:

$$\sigma_{\text{eq}}^1 = \sigma_1 \left\{ 1 + \beta_1 \left[\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1} \right]^{\beta_2} \right\}, \quad \beta_1 > 0, \quad \beta_2 > 0, \quad (1)$$

где главные напряжения $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, при этом утверждается, что по сравнению с одноосным растяжением трехосное растяжение, приводит к заметному уменьшению времени в момент разрушения. Другое эквивалентное напряжение, позволяющее описать влияние многоосного растяжения на время в момент разрушения, рассмотрено в работе [18]:

$$\sigma_{\text{eq}}^2 = [1 - \beta_3] \sigma_{\text{mises}} + 3\beta_3 \sigma_h, \quad 2/3 \leq \beta_3 \leq 2, \quad (2)$$

где σ_{mises} – напряжение Мизеса; $\sigma_h = [\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]/3$ – гидростатическое давление. Чтобы установить влияние каждого из двух максимальных напряжений σ_{max} и $2\tau_{\text{max}}$ на время в момент разрушения t_{rupt} , в статье [14] рассмотрено эквивалентное напряжение с одним материальным параметром:

$$\sigma_{\text{eq}}^3 = [1 - \beta_4] 2\tau_{\text{max}} + \beta_4 \sigma_{\text{max}}, \quad 0 \leq \beta_4 \leq 1, \quad (3)$$

где σ_{max} – максимальное нормальное напряжение; $2\tau_{\text{max}}$ – удвоенное максимальное касательное напряжение.

Ниже представлен обзор, в котором автор сделал попытку объединить и систематизировать работы, в которых приведены малоизвестные экспериментальные данные для ползучести и длительной прочности под действием стационарных сил для различных металлических материалов, полученные разными учеными за последние полтора десятка лет. Некоторые из них являются принципиально новыми и содержат уникальные результаты при одноосном, двухосном и трехосном растяжениях.

3. Одноосное растяжение

Отличительная особенность современных экспериментальных данных (табл. 1) в том, что опыты на ползучесть и длительную прочность, за исключением [19], проводили при высокой температуре.

Уникальность работы [19] состоит в том, что рассмотрена ползучесть самого легкого металлического материала при нормальной температуре (20 °С).

Сплавы на основе цветного металла (магния, алюминия, меди и титана) хорошо проявляют свойство ползучести при нагреве, что заметно ограничивает их использование на практике, и таких экспериментальных работ сравнительно мало [19–22; 38,39]. В статье [20] приведены кривые ползучести авиационного алюминиевого сплава 2124–Т851 (применяется в авиастроении) при трех разных значениях высокой температуры (200, 230 и 260 °С). В статьях [21, 22] приведены скорости деформации при установившейся ползучести и время в момент разрушения при разных номинальных напряжениях для двух разных титановых сплавов (применяются в авиастроении) при одной и той же высокой температуре (650 °С).

Таблица 1

Сводная таблица публикаций экспериментальных данных при одноосном растяжении

Ссылка на публикацию	Материал	Температура, °С
[19]	МА21 (магниево-литиевый сплав)	20
[20]	2124–Т851 (алюминиевый сплав)	200
		230
		260
[21]	BT5 (титановый сплав)	650
	BT6 (титановый сплав)	
[22]	Ti–600 (титановый сплав)	650
[23]	9%CrMoV (сталь)	566
[24]	1%CrMoV (сталь)	
[25]	VM12 (сталь)	625
[26]	2.25Cr1Mo (сталь)	600
	9Cr1Mo (сталь)	
	Mod.9Cr1Mo (улучшенная сталь)	
[27]	9Cr1MoVNb (сталь)	600
[28]	Super304H (сталь)	650
	после эксплуатации 54750 ч	
	после эксплуатации 68550 ч	
[29]	A508–III (сталь)	800
[30]	SS304L (сталь)	550
		700
		850
		975
		1100
[31]	STS304 (сталь)	600
		650
		700
[32]	P92 (сталь)	595
		610
		640
		670
[33]	9Cr1MoVNb (сталь)	565
		650
[34]	28–48WCo (сталь)	817
		871
		927
		982
[35]	DZ951 (никелевый сплав)	700
		800
		900
		1000
[36]	23Cr–43Ni–7W (никелевый сплав)	700
		750
		800
[37]	ЖС32–ВИ (никелевый сплав)	570

В статьях [23–34] приведены экспериментальные данные разных жаропрочных сталей (применяются на электростанциях). В работах [23, 24] приведены результаты исследования влияния старения на скорость деформации при установившейся ползучести двух жаропрочных сталей. В статье [27] при исследовании локализованной деформации ползучести в сварном шве установлено, что разрушение приходится на границу между областью высокотемпературного нагрева от газовой сварки и основным материалом. В статье [28] исследовано влияние времени эксплуатации на механические свойства стали Super304H. Рассмотрена первичная сталь, эта же сталь – после эксплуатации в течение 54 750 ч, а также после эксплуатации – 68 550 ч, в результате установлено, что после эксплуатации на протяжении 54 750 ч сталь Super304H не претерпевает критических прочностных изменений (за исключением заметного увеличения предела текучести), а после эксплуатации 68 550 ч происходит критическое снижение времени и деформации в момент разрушения.

В работе [29] представлена схема эволюции микроструктуры стали A508–III (применяется в сосудах высокого давления на атомных электростанциях) в процессе ползучести при температуре фазового перехода, равной 800 °С, таким образом установлено, что на стадии установившейся ползучести происходит рост зерен матрицы с растворением частиц вторичной фазы. После этого на стадии ускоряющейся ползучести происходит выделение карбидных частиц, возле которых протекает процесс образования микропор. Процесс разрушения начинается с образования микротрещин, которые соединяют близлежащие микропоры и затем сливаются в магистральную трещину.

Еще одна уникальная работа [30], в которой рассмотрена ползучесть жаропрочной стали SS304L (применяется в энергетике) в широком диапазоне значений высокой температуры (550, 700, 850, 975 и 1100 °С). Уникальность этой работы состоит в том, что кривые ползучести дополнены экспериментальными зависимостями напряжения от деформации в широком диапазоне значений высокой температуры (25, 170, 300, 425, 550, 700, 850, 970 и 1100 °С), а также результатами металлографического исследования, из которых установлено образование коррозионных микротрещин на поверхности образцов, испытанных на ползучесть при температуре выше 700 °С.

В статьях [35–37] представлены экспериментальные данные, полученные в результате испытаний разных жаропрочных сплавов на основе никеля. В работе [36] приведены результаты исследования прочности сварного шва из никелевого сплава 23Cr–43Ni–7W при трех разных значениях высокой температуры (700, 750 и 800 °С), и установлено, что разрушение приходится на область высокотемпературного нагрева от газовой сварки. В статье [37] приведены экспериментальные данные по исследованию механизма разрушения монокристаллического никелевого сплава ЖС32–ВИ (применяется в авиастроении) при контакте с водяным паром при 570 °С.

4. Сложное напряженное состояние

Отличительная особенность экспериментальных данных (табл. 2) в том, что как минимум два из трех главных напряжений отличны от нуля. При реализации сложного напряженного состояния проводили разные опыты, в которых трубчатые образцы подвергались одновременному кручению и растяжению [18, 38–40] либо воздействию внутреннего давления и осевой силы [41]. Кроме обычных опытов [18, 38–41] экспериментальные данные были получены из уникальных опытов, в которых квадратные плоские образцы подвергались одновременному двухосному растяжению [16, 17; 42] либо кубические образцы – воздействию трех взаимно ортогональных сил [16, 17].

Таблица 2

**Сводная таблица публикаций экспериментальных данных
при сложном напряженном состоянии**

Ссылка на публикацию	Материал	Температура, °С	Главные напряжения
[38]	Медь (после отжига)	264	$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 = 0$ $\sigma_3 < 0$
[39]	BT1-0 (титановый сплав)	550	
[18]	ЭИ437БУ-ВД (никелевый сплав)	650	
[40]	ЭИ698ВД (никелевый сплав)	650 750	
[41]	9Cr1MoVNb (сталь)	650	$\sigma_1 > 0$ $\sigma_2 > 0$ $\sigma_3 \geq 0$
[16]	SUS304 (сталь)	650	
[17]		700	
[42]	Mod.9Cr1Mo (сталь)	650	

В статье [38] приведены экспериментальные данные по установившейся ползучести и длительной прочности медных трубчатых образцов с внешним граничным диаметром 16 мм и толщиной 1 мм при 264 °С, где опыты на одновременное кручение и растяжение проводились при условии $\sigma = 2\tau$. Перед испытаниями, чтобы убрать прочностную анизотропию в материале, трубчатые образцы подвергались термической операции отжига при 800 °С.

В работе [39] приведены зависимости компонент тензора скоростей деформаций при установившейся ползучести от компонент тензора напряжений, полученных в результате испытаний титановых трубчатых образцов с внешним граничным диаметром 16 мм и толщиной 1 мм при 550 °С, где опыты на одновременное кручение и растяжение проводились при условии $\tau_{\max} = 50$ МПа либо при $\sigma_{\max} = 100$ МПа. Уникальность экспериментальных данных [39] заключается в том, что впервые на практике получены большие углы поворота в диапазоне значений 80 ÷ 260 град.

В работах [18, 40] рассмотрена длительная прочность двух разных никелевых сплавов (применяются в авиастроении) при двух разных значениях (650, 750 °С) высокой температуры и приведены фотоснимки разрушенных трубчатых образцов. На этих фотоснимках показаны особенности разрушения в зависимости от вида воздействия внешних сил. В статье [41] приведены экспериментальные данные по длительной прочности при двухосном растяжении стального сварного кольцевого шва, где трубчатые образцы с внешним диаметром 36 мм и толщиной 5 мм подвергались одновременно воздействию внутреннего давления и осевой силы при разных значениях $k = \sigma_z / \sigma_\theta$, где σ_z – осевое напряжение; σ_θ – тангенциальное напряжение. Из-за того, что прочность основного материала оказалась выше, чем прочность сварного материала, разрушение трубчатых образцов при $k \geq 0,8$ происходило по сварному шву.

В статьях [16,17, 42] рассмотрена длительная прочность двух разных сталей при одноосном, двухосном и трехосном растяжениях при одном и том же значении высокой температуры (650 °С). В экспериментальных данных [16, 17, 42], полученных при одноосном и двухосном растяжениях, наблюдается относительное различие значений времени в момент разрушения при одноосном и двухосном растяжениях. По сравнению с одноосным растяжением ($\sigma_1 = \sigma > 0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$), двухосное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma > 0$, $\sigma_3 = 0$) приводит

либо к увеличению времени в момент разрушения $\frac{t_{rupt}^2}{t_{rupt}^1} = 1,8 \div 2,3$ (сталь SUS304 при 650 °C), либо к его уменьшению $\frac{t_{rupt}^1}{t_{rupt}^2} = 1,0 \div 1,9$ (сталь Mod.9Cr1Mo при 650 °C), при этом трехосное растяжение ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma > 0$) всегда приводит к уменьшению времени в момент разрушения [16, 17], где t_{rupt}^1 – время в момент разрушения при одноосном растяжении; t_{rupt}^2 – время в момент разрушения при двухосном растяжении. Измерения удлинений [16, 17] при растяжении стали SUS304 при 700 °C показали, что при одноосном растяжении деформация в момент разрушения оказалась равной 52 %, при двухосном растяжении деформации достигли значений 30 и 28 %, а при трехосном растяжении процесс длительной прочности протекает при отсутствии деформаций ползучести и всегда завершается хрупким разрушением, при котором микропоры и микротрещины образуются исключительно на границах зерен.

5. Заключение

В обзоре (сравнение проводится с экспериментальными данными, используемыми в анализе [43]) рассмотрена ползучесть магниево-литиевого сплава [19], а также различных титановых сплавов [21, 22, 39]. В некоторых современных работах [20, 30–36] приведены экспериментальные данные по ползучести при разных значениях высокой температуры, при этом результаты длительных испытаний [30] дополнены экспериментальными зависимостями напряжения от деформации. Рассмотрены работы [16, 17, 42], в которых представлены уникальные экспериментальные данные по длительной прочности при одноосном, двухосном и трехосном растяжениях. В экспериментальных данных [16, 17, 42] наблюдается относительное различие значений времени в момент разрушения, которое не представляется возможным описать обычными эквивалентными напряжениями [43]. Для описания влияния многоосного растяжения на время в момент разрушения следует использовать эквивалентные напряжения (1) и (2).

Благодарность

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант 20–08–00387).

Литература

1. Navier C. L. M. H. Experiences sur la resistance de divers substances a la rupture causee par une tension longitudinale // Annales de chimie et de physique. – 1826. – Vol. 33. – P. 225–240.
2. Vicat L. J. Note sur l'allongement progressif du fil de fer soumis a divers tensions // Annales des ponts et chaussées – 1834. – P. 40–44.
3. Edward Neville Da Costa Andrade. On the viscous flow in metals and allied phenomena // Proceedings of the Royal Society. – 1910. – Vol. 84, No. 567. – P. 1–12. – DOI: 10.1098/rspa.1910.0050.
4. Norton F. H. Creep of Steel at high temperatures // New York : Mc. Graw-Hill Book Company, 1929.
5. Bailey R. W. Creep of steel under simple and compound stresses and the use of high initial temperature in steam power plant // Transactions of the World Power Conference. – Tokyo, 1929. – Vol. 3.
6. More precise specification of the equation of state in creep theory / S. A. Shesterikov, M. A. Yumasheva, S. A. Shesterikov, M. A. Yumasheva // Mechanics of Solids. – 1984. – Vol. 19, No. 1. – P. 81–85.
7. Nazarov V. V., Lepeshkin A. R. A method for calculating creep limits // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2017. – Iss. 1. – P. 36–42. –

- DOI: 10.17804/2410-9908.2017.1.036-042 – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_1_2017_Nazarov_V.V._et_al._036_042.pdf
8. Nazarov V. V. Analysis of two methods for calculating the ultimate stresses of creep and creep rupture processes // *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2019. – Iss. 2. – P. 28–36. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.2.028-036. – URL: https://dream-journal.org/DREAM_Issue_2_2019_Nazarov_V.V._028_036.pdf
 9. Ковальков В. К., Назаров В. В., Новотный С. В. Методика проведения высокотемпературных испытаний при сложном напряженном состоянии // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2006. – Т. 72, № 4. – С. 42–44.
 10. Testing of welded 2.25CrMo steel, in hot, high-pressure hydrogen under creep conditions / G. Manna, P. Castello, F. Harskamp, R. Hurst, B. Wilshire // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2007. – Vol. 74. – Iss. 6. – P. 956–968. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2006.08.021.
 11. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Combined stress creep fracture of a commercial copper at 250°C // *Engineer*. – 1956. – Vol. 202, No. 5248. – P. 261–265.
 12. Johnson A. E., Henderson J., Mathur V. D. Complex stress creep fracture of an aluminium alloy: An Investigation Conducted at an Elevated Temperature // *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*. – 1960. – Vol. 32, No. 6. – P. 161–170. – DOI: 10.1108/eb033263.
 13. Локощенко А. М., Назаров В. В. Выбор критериев длительной прочности металлов при сложном напряженном состоянии // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2004. – № 7 (15). – С. 124–128. – URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2004_7_27
 14. Nazarov V. V., Lepeshkin A. R. Analysis of various equivalent stress options for describing the creep rupture process under a complex stress state // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2315. – 020029. – DOI: 10.1063/5.0037057.
 15. Локощенко А. М., Назаров В. В. Кинетический подход исследования длительной прочности металлов при двухосном растяжении // *Авиационно-космическая техника и технология*. – 2005. – № 10 (26). – С. 73–79. – URL: http://nbuv.gov.ua/UJRN/aktit_2005_10_15
 16. Multiaxial creep damage and lifetime evaluation under biaxial and triaxial stresses for type 304 stainless steel / H. Kobayashi, R. Ohki, T. Itoh, M. Sakane // *Engineering Fracture Mechanics*. – 2017. – Vol. 174. – P. 30–43. – DOI: 10.1016/j.engfracmech.2017.01.001.
 17. Creep void formation and rupture lifetime in multiaxial stress states / M. Sakane, H. Kobayashi, R. Ohki, T. Itoh // *Key Engineering Materials*. – 2019. – Vol. 795. – P. 159–164. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.795.159.
 18. Голубовский Е. Р., Демидов А. Г. Оценка длительной прочности при сложном напряженном состоянии сплава ЭИ437БУ-ВД для дисков ГТД // *Вестник двигателестроения*. – 2008. – № 3. – С. 106–110.
 19. Ильин С. И., Корягин Ю. Д., Лапина И. В. Ползучесть ультралегких магниевых сплавов при низких температурах // *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Metallurgy*. – 2012. – № 15. – С. 105–107. – URL: <https://vestnik.susu.ru/metallurgy/article/view/1371>
 20. Creep and creep rupture behavior of 2124-T851 aluminum alloy / Y. Jiang, Y. Lin, C. Phaniraj, Y. Xia, H. Zhou // *High Temperature Materials and Processes*. – 2013. – Vol. 32. – Iss. 6. – P. 533–540. – DOI: 10.1515/htmp-2012-0172.
 21. Назаров В. В. Кратковременная ползучесть титановых сплавов BT5 и BT6 при высокой температуре // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов*. – 2015. – Т. 81, № 6. – С. 57–60.
 22. Creep features of Ti-600 alloy at the temperature of 650°C / L. Y. Zeng, Y. Q. Zhao, X. N. Mao, Q. Hong, Y. L. Qi // *Materials Science Forum*. – 2018. – Vol. 941. – P. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/MSF.941.995.
 23. Niu L. B., Kobayashi M., Takaku H., Azuma T. Aging effect on creep rupture properties of superclean 9%CrMoV steel for steam turbine rotors of combined cycle power plants // *Key Engineering Materials*. – 2004. – Vol. 274–276. – P. 931–936. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.274-276.931.

24. Niu L. B., Matsushima I., Akiu T. Influence of aging on creep rupture properties of heat resistant steels for steam turbine rotors of thermal power plants // *Advanced Materials Research.* – 2011. – Vol. 291–294. – P. 1122–1125. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.291-294.1122.
25. Thomas A., Seliger P. Creep properties and damage behaviour of component-like tubes of Vm12-materials // *Materials at High Temperatures.* – 2011. – Vol. 28. – No 2. – P. 114–119. – DOI: 10.3184/096034011X13059086139272.
26. Mechanistic approach for prediction of creep deformation, damage and rupture life of different Cr–Mo ferritic steels / S. Goyal, K. Laha, S. P. Selvi, M. D. Mathew // *Materials at High Temperatures.* – 2014. – Vol. 31, iss. 3. – P. 211–220. – DOI: 10.1179/1878641314Y.0000000016.
27. Experimental evaluation of localized creep deformation in grade 91 steel weldments / Y. Wang, W. Zhang, Y. Wang, Y. C. Lim, X. Yu, Z. Feng // *Materials Science and Engineering: A.* – 2021. – Vol. 799. – P. 140356. – DOI:10.1016/j.msea.2020.140356.
28. Creep deformation and rupture behaviour of service-exposed super 304H steel boiler tubes / T. T. Nguyen, T. M. Jeong, D. T. Erten, K. B. Yoon // *Materials at High Temperatures.* – 2021. – Vol. 38, iss. 1. – P. 61–72. – DOI:10.1080/09603409.2020.1830609.
29. Microstructural evolution of nuclear power steel A508-III in the creep process at 800°C / Z. G. Xie, Y. M. He, J. G. Yang, Z. L. Gao // *Applied Mechanics and Materials.* – 2017. – Vol. 853. – P. 153–157. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.853.153.
30. High temperature deformation behavior of Indian PHWR Calandria material SS 304L / K. Mohta, S. K. Gupta, S. Cathirvolu, S. Jaganathan, J. Chattopadhyaya // *Nuclear Engineering and Design.* – 2020. – Vol. 368. – P. 110801. – DOI: 10.1016/j.nucengdes.2020.110801.
31. On statistical properties of high temperature creep rupture data in STS304 stainless steels / S. J. Kim, Y. S. Kong, Y. J. Roh, W. T. Jung // *Key Engineering Materials.* – 2006. – Vol. 326–328. – P. 553–556. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.326-328.553.
32. Nai Q. Z., Hong X., Xue P. M., Gang W. Study on high temperature creep behaviors of P92 steel // *Key Engineering Materials.* – 2011. – Vol. 452–453. – P. 521–524. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/KEM.452-453.521.
33. Facai R., Xiaoying T. Mechanical properties of Grade 91 steel at high temperatures // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2019. – Vol. 1168, iss. 2. – P. 022013. – DOI: 10.1088/1742-6596/1168/2/022013.
34. Determination of creep constitutive model for 28–48WCo alloy based on experimental creep tests at 817–982°C / V. H. Dao, K. B. Yoon, G. Yang, J. S. Oh // *Journal of Mechanical Science and Technology.* – 2018. – Vol. 32. – P. 4201–4208. – DOI: 10.1007/s12206-018-0818-0.
35. High-temperature creep deformation and fracture behavior of a directionally solidified Ni-base superalloy DZ951/ Z. Chu, J. Yu, X. Sun, H. Guan, Z. Hu // *Metallurgical and Materials Transactions: A.* – 2009. – Vol. 40. – P. 2927. – DOI: 10.1007/s11661-009-0001-4.
36. Creep rupture strength for weld joint of 23Cr–45Ni–7W alloy / K. Nomura, K. Kubushiro, H. Nakagawa, Y. Murata // *Materials Transactions.* – 2016. – Vol. 57, iss. 12. – P. 2097–2103. – DOI: 10.2320/matertrans.M2016242.
37. Наприенко С. А., Орлов М. Р. Разрушение монокристаллических лопаток турбины наземных ГТУ // *Труды ВИАМ.* – 2016. – № 2 (38). – С. 20–31. – DOI: 10.18577/2307-6046-2016-0-2-3-3.
38. Nazarov V. V. Determination of creep properties under tension and torsion of copper tubular specimens // *Inorganic Materials.* – 2014. – Vol. 50. – P. 1514–1515. – DOI:10.1134/S0020168514150138.
39. Назаров В. В. Механические характеристики ползучести титанового сплава ВТ1–0 при растяжении и кручении трубчатых образцов // *Заводская лаборатория. Диагностика материалов.* – 2017. – Т. 83, № 2. – С. 66–68.
40. Голубовский Е. Р., Демидов А. Г. Длительная прочность и критерий эквивалентности напряженных состояний сплава ЭИ698ВД для дисков ГТД // *Вестник двигателестроения.* – 2012. – № 2. – С. 264–268.

41. Creep rupture behaviour of circumferentially welded mod. 9Cr–1Mo steel pipe subject to internal pressure and axial load / T. Himeno, Y. Chuman, T. Tokiyoshi, T. Fukahori, T. Igari // *Materials at High Temperatures*. – 2016. – Vol. 33, iss. 6. – P. 636–643. – DOI: 10.1080/09603409.2016.1226703.
42. Biaxial tensile creep damage of Mod.9Cr–1Mo steel using cruciform specimen / R. Itoh, T. Hikida, F. Ogawa, T. Itoh, M. Sakane, S. Zhang // *Proceedings of 9th China–Japan Bilateral Symposium on High Temperature Strength of Materials*. – 2016. – P. 60–66.
43. Lokoshchenko A. M. Estimation of equivalent stresses in the analysis of long-term strength of metals under combined stress state // *Mechanics of Solids*. – 2010. – Vol. 45. – P. 633–647. – DOI: 10.3103/S0025654410040126.

Received: 30.12.2021

Revised: 17.02.2022

Accepted: 25.02.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.052-066

STAGNATION POINTS OF AN INHOMOGENEOUS SOLUTION DESCRIBING CONVECTIVE EKMAN FLOW IN THE OCEANIC EQUATORIAL ZONE

A. V. Gorshkov^{a),*} and E. Yu. Prosviryakov^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-5741-3979>  alex55gor@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: alex55gor@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
Tel.: +7 (343) 375 35 76; fax: 374 53 30

An inhomogeneous analytical solution describing a stratified large-scale isothermal Ekman–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in the equatorial zone is obtained. A set of stagnation points of this solution is studied. Temperature is set at the flow boundaries. Tangential stresses simulating the effect of wind are specified at the free boundary. The Navier slip conditions are specified on the solid surface. The solution is constructed in the form of functions, linear in horizontal coordinates, with the coefficients dependent on the vertical coordinate. The coefficients of the linear functions are obtained as polynomials. The condition of consistency of the overdetermined equation system describing the specified flow is obtained. The consistency condition imposes restrictions on the boundary conditions. It is shown that the set of stagnation points lies on a straight line.

Keywords: viscous fluid convection, Ekman flow, Coriolis force, equator, inhomogeneous solution.

References

1. Pedlosky J. *Geophysical fluid dynamics*, Berlin, New York, Springer, 1987.
2. Zyryunov V.N. *Teoriya ustanovivshikhsya okeanicheskikh techeniy* [Theory of steady-state oceanic currents]. L.: Gidrometeoizdat, 1985, 248 p. (In Russian).
3. Ekman V.W. On the Influence of the Earths Rotation on Ocean Currents. *Arkiv for matematik, astronomi och fysik*, Bd. 2, no. 11.
4. Korotaev G.K., Mikhaylova E.N., Shapiro N.B. *Teoriya ekvatorialnykh protivotecheniy v Mirovom okeane* [Theory of Equatorial Countercurrents in the World Ocean]. Kiev, Nauk. Dumka Publ., 1986, 208 p. (In Russian).
5. Felzenbaum A.I. *Teoreticheskie osnovy i metody rascheta ustanovivshikhsya morskikh techeniy* [Theoretical Foundations and Methods for Calculating Steady Sea Currents]. AN SSSR Publ., 1960, 127 p. (In Russian).
6. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Yu. Ekman Convective Layer Flow of a Viscous Incompressible Fluid. *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, No. 2, pp. 189–195. DOI: 10.1134/S0001433818020081.
7. Gorshkov A.V. Prosviryakov E.Yu. Convective flow in the solid rotation of a viscous incompressible fluid. *AIP Conference Proceedings*, 2017, 1915, 040020. DOI: 10.1063/1.5017368.
8. Ingel L.Kh., Aristov S.N. The class of exact solutions of nonlinear problems on thermal circulation associated with volumetric heat release in the atmosphere. *Tr. In-ta Eksperim. Meteorol.*, 1996, No. 27 (162), pp. 142–157. (In Russian).

9. Gorshkov A.V. Prosviryakov E.Yu. Isobaric Vortex Flow of a Viscous Incompressible Fluid with the Navier Boundary Condition // AIP Conference Proceedings, 2018, vol. 2053, 040030. DOI: 10.1063/1.5084468.
10. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, No. 5, pp. 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
11. Ershkov Sergey V., Prosviryakov Evgeniy Yu., Burmasheva Natalya V., and Christianto Victor. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, vol. 53, No. 4, pp. 044501. DOI:10.1088/1873-7005/ac10f0.
12. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. On laminar flows of planar free convection. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2013, vol. 9, No. 4, pp. 651–657. DOI: 10.20537/nd1304004. (In Russian).
13. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. Inhomogeneous Couette Flows. *Nelin. Dyn.*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian).
14. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushcheyasya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Perm, Perm. Gos. Univ. Publ., 2006, 154 p. (In Russian).
15. Aristov S.N., Shvarts K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortical Flows in Thin Fluid Layers]. Kirov, VyatGU Publ., 2011. (In Russian).
16. Aristov S.N., Shvarts K.G. Advective flow in a rotating liquid film. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2016, vol. 57, No. 1, pp. 188–194. DOI: 10.1134/S0021894416010211.
17. Neto C., Evans D., Bonaccorso E., Hans-Jürgen Butt and Vincent S.J. Craig Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, vol. 68, No. 12, pp. 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
18. Borzenko E.I., Diakova O.A., Shrager G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, No. 2 (28), pp. 35–44. (In Russian).

Подана в журнал: 30.12.2021

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.052-066

ЗАСТОЙНЫЕ ТОЧКИ НЕОДНОРОДНОГО РЕШЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕГО КОНВЕКТИВНОЕ ТЕЧЕНИЕ ЭКМАНА В ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ ЗОНЕ ОКЕАНА

А. В. Горшков^{а)},*, Е. Ю. Просвиряков^{б)}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-5741-3979>  alex55gor@mail.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: alex55gor@mail.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 375–35–76; факс: 374–53–30

В работе получено неоднородное аналитическое решение, описывающее слоистое крупномасштабное конвективное течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости в экваториальной зоне. Исследуется множество застойных точек этого решения. На границах потока жидкости задана температура. На свободной границе заданы касательные напряжения, моделирующие воздействие ветра. На твердой поверхности заданы условия скольжения жидкости Навье.

Решение построено в виде функций, линейных по горизонтальным координатам с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты. Коэффициенты линейных функций получены в виде полиномов.

Получено условие совместности переопределенной системы уравнений, описывающей указанное течение. Условие совместности накладывает ограничения на граничные условия. Показано, что множество застойных точек лежит на прямой.

Ключевые слова: вязкая жидкость конвекция, течение Экмана, сила Кориолиса, экватор, неоднородное решение.

1. Введение

Геострофическое приближение, описывающее течение жидкости по поверхности Земного шара, построено на основе равновесия градиента давления жидкости и силы Кориолиса. Приводя к очень простым и изящным соотношениям, это приближение играет чрезвычайно важную роль. Но это приближение не работает в окрестности экватора, и в экваториальной области требуются более сложные динамические модели [1, 2].

Исследование экваториальных течений является одной из важных проблем океанологии и геофизической гидродинамики. К настоящему времени отправной точкой всех исследований в геофизической гидродинамике является точное решение Экмана [3], описывающее стационарное изобарическое течение жидкости по равномерно вращающейся поверхности.

Компоненты скорости течения жидкости получены в виде функций вертикальной пространственной координаты z . Обобщения сдвигового течения Экмана отражены в монографиях [1, 2, 4, 5] и статьях [6–12].

В работах [6–8, 11–15] были построены решения уравнений Навье–Стокса при различных граничных условиях. В этих решениях, как и в решении Экмана, компоненты скорости зависят только от вертикальной координаты z . При таком выборе представления скоро-

стей условие несжимаемости выполняется автоматически, и разрешающая система уравнений получается совместной.

В работах [10, 11] описаны классы решений, линейных по горизонтальным координатам. В работах [9, 13] построены частные случаи решений, описывающих завихренное движение жидкости, для которого условие несжимаемости выполняется автоматически.

В настоящей работе построено аналитическое решение, описывающее слоистое крупномасштабное конвективное течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости в экваториальной зоне. Решение построено в виде функций, линейных по двум горизонтальным пространственным координатам с коэффициентами, зависящими от вертикальной координаты z . Получено условие совместности разрешающей системы дифференциальных уравнений.

2. Постановка задачи

Однородным будем называть решение, в котором компоненты скорости течения жидкости зависят только от вертикальной пространственной координаты z . Решение, в котором компоненты скорости зависят от горизонтальных координат и вертикальной координаты z , будем называть неоднородным. Слагаемые решения, не зависящие от горизонтальных координат, будем называть фоновыми. Система уравнений, описывающая неоднородное решение, в общем случае получается переопределенной. Для обеспечения разрешимости системы строится «условие совместности». Условие совместности накладывает ограничения на компоненты скоростей и, соответственно, на граничные условия.

Рассмотрим конвективное течение Экмана в экваториальной зоне. При этом полагается, что широта места φ мала и можно, приближенно, принять $\sin \varphi \approx 0$, $\cos \varphi \approx 1$. Введем локальную систему координат следующим образом: ось oz направлена вдоль радиуса Земли, ось oy – по касательной к меридиану в сторону Северного полюса, ось ox им перпендикулярна и направлена по касательной к экватору.

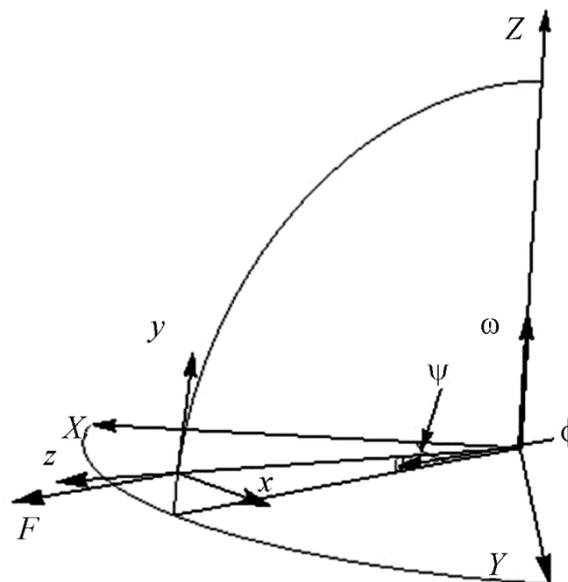


Рис. 1. Схема ориентации осей координат и векторов в экваториальной зоне

В локальной системе координат (x, y, z) при указанной широте ось вращения Земли параллельна оси oy . Далее будем рассматривать сдвиговое течение вязкой несжимаемой жидкости, полагая $V_z = 0$. Стационарное крупномасштабное конвективное течение Экмана

вязкой несжимаемой жидкости с учетом двух компонент силы Кориолиса в безразмерных переменных описывается системой уравнений Навье–Стокса [1, 2, 9]:

$$\begin{aligned} \left(V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \Delta V_x; \\ \left(V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \Delta V_y; \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= \frac{2\delta V_x}{\text{Gr} \cdot \text{Ek}} + \frac{\delta}{\text{Gr}} T; \\ \text{Ra} \left(V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \Delta^* T; \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_x, V_y – безразмерные компоненты вектора скорости жидкости \mathbf{V} ; безразмерные горизонтальные координаты x и y определены характерным масштабом длины L , а поперечная координата z – толщиной слоя жидкости h ; $\delta = h/L$ – отношение масштабов длины; ν – кинематическая вязкость жидкости; β – коэффициент объемного расширения жидкости; g – ускорение свободного падения; χ – коэффициент температуропроводности; T_m – разность максимальной и минимальной температур; Ω – угловая скорость вращения Земли; P – безразмерное приведенное давление; деленное на удвоенную кинетическую энергию; $V = g \beta T_m L^2 / \nu$ – характерный масштаб линейной скорости; $\text{Gr} = g \beta T_m L^3 / \nu^2$ – число Грасгофа; $\text{Ra} = \text{Pr Gr}$ – число Рэлея; $\text{Pr} = \nu / \chi$ – число Прандтля; $\text{Ek} = \text{Ro} / \text{Gr} = \nu / (L^2 \Omega)$ – число Экмана; $\text{Ro} = V / (L \Omega)$ – число Россби; оператор Лапласа в безразмерных переменных:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Сила Кориолиса параллельна оси oz локальной системы координат. Вектор скорости движения жидкости лежит в плоскости oxy (рис. 1).

Для системы (1) зададим следующие граничные условия. На границах слоя жидкости задана температура в виде линейной функции горизонтальных координат. На нижней поверхности, задаваемой уравнением $z = 0$;

$$T|_{z=0} = A_0 + xA_1 + yA_2, \quad (2)$$

где A_0 – значение фоновой температуры (можно принять равным нулю); A_1 и A_2 – компоненты граничного вектора градиента температуры, постоянные. На свободной поверхности, заданной уравнением $z = 1$, температура задана аналогично (2):

$$T|_{z=1} = B_0 + xB_1 + yB_2, \quad (3)$$

где B_0 – значение фоновой температуры; B_1 и B_2 – постоянные компоненты граничного вектора градиента температуры.

Предполагается, что жидкость скользит по твердой поверхности, и выполняется условие Навье [17, 18]:

$$\delta V_x|_{z=0} = a V_x'|_{z=0}, \quad \delta V_y|_{z=0} = a V_y'|_{z=0}. \quad (4)$$

Здесь штрихом обозначена частная производная соответствующей функции по переменной z .

На свободной поверхности заданы касательные напряжения [3]:

$$V_x' = \delta \tau_1, \quad \text{и} \quad V_y' = \delta \tau_2, \quad (5)$$

моделирующие воздействие ветра, причем $\tau_1(x, y)$ и $\tau_2(x, y)$ являются линейными функциями горизонтальных координат.

Поле давления на верхней границе представим в следующем виде:

$$P|_{z=1} = P_0 + P_1 x + P_2 y, \quad (6)$$

где P_0 – значение фонового давления; P_1 и P_2 – компоненты вектора градиента давления жидкости, постоянные. Фоновое давление на верхней границе P_0 примем за отсчетное, т. е. будем полагать равным нулю:

$$P_0 = 0. \quad (7)$$

3. Точное решение вблизи экватора

Точное решение будем искать в виде [10, 11]:

$$\begin{aligned} V_x &= U_0(z) + xU_1(z) + yU_2(z); \quad V_y = V_0(z) + xV_1(z) + yV_2(z); \\ P &= P_0(z) + xP_1(z) + yP_2(z); \quad T = T_0(z) + xT_1(z) + yT_2(z). \end{aligned} \quad (8)$$

Подставив вид точного решения (8) в исходную систему уравнений в частных производных (1) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях переменных x и y , получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно двенадцати функций $U_0, V_0, U_1, V_1, U_2, V_2, P_0, P_1, P_2, T_0, T_1, T_2$:

$$\begin{aligned} U_1'' &= \text{Re} \delta^2 (U_1^2 + U_2 V_1); \\ V_2'' &= \text{Re} \delta^2 (U_2 V_1 + V_2^2); \\ U_2'' &= \text{Re} \delta^2 (U_1 U_2 + U_2 V_2); \\ V_1'' &= \text{Re} \delta^2 (U_1 V_1 + V_1 V_2); \\ T_1'' &= \text{Ra} (T_1(z) U_1(z) + T_2(z) V_1(z)); \\ T_2'' &= \text{Ra} (T_1(z) U_2(z) + T_2(z) V_2(z)); \\ P_1' &= \frac{\delta U_1}{\text{Ek Re}} + \frac{T_1}{\delta}, \quad P_2' = \frac{\delta U_2}{\text{Ek Re}} + \frac{T_2}{\delta}; \end{aligned} \quad (9)$$

(10)

$$\begin{aligned}
 U_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_1 + U_0 U_1 + U_2 V_0); \\
 V_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_2 + U_0 V_1 - V_0 U_1); \\
 T_0''(z) &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_0(z) + T_2(z) V_0(z)); \\
 P_0' &= \frac{\delta U_0}{\operatorname{Re} \operatorname{Ek}} + \frac{T_0}{\delta};
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$U_1 + V_2 = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) – условие несжимаемости. Подставим в уравнения (9), (10) и (11) условие несжимаемости. В результате системы уравнений (9), (10) и (11) преобразуются в следующие:

$$\begin{aligned}
 U_1'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (U_1^2 + U_2 V_1); \\
 U_1'' &= -\operatorname{Re} \delta^2 (U_2 V_1 + U_1^2); \\
 U_2'' &= 0, V_1'' = 0;
 \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
 T_1'' &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_1(z) + T_2(z) V_1(z)); \\
 T_2'' &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_2(z) - T_2(z) U_1(z));
 \end{aligned} \tag{14}$$

$$P_1' = \frac{\delta U_1}{\operatorname{Ek} \operatorname{Re}} + \frac{T_1}{\delta}; P_2' = \frac{\delta U_2}{\operatorname{Ek} \operatorname{Re}} + \frac{T_2}{\delta}; \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
 U_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_1 + U_0 U_1 + U_2 V_0); \\
 V_0'' &= \operatorname{Re} \delta^2 (P_2 + U_0 V_1 - V_0 U_1);
 \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
 P_0' &= \frac{\delta U_0}{\operatorname{Re} \operatorname{Ek}} + \frac{T_0}{\delta}; \\
 T_0''(z) &= \operatorname{Ra} (T_1(z) U_0(z) + T_2(z) V_0(z)).
 \end{aligned} \tag{17}$$

Граничные условия (2), (3), (5) и (7) с учетом вида решения (8) преобразуются в следующие:

$$\delta U_1(0) = aU_1'(0), \delta V_1(0) = aV_1'(0), \delta U_2(0) = aU_2'(0), \delta V_2(0) = aV_2'(0); \tag{18}$$

$$U_1'(1) = \delta\tau_{11}, V_1'(1) = \delta\tau_{21}, U_2'(1) = \delta\tau_{12}, V_2'(1) = \delta\tau_{22}; \tag{19}$$

$$\delta U_0(0) = aU_0'(0), \delta V_0(0) = aV_0'(0), U_0'(1) = \delta\tau_{10}, V_0'(1) = \delta\tau_{20};$$

$$T_0(0) = A_0, T_1(0) = A_1, T_2(0) = A_2;$$

$$T_0(1) = B_0, T_1(1) = B_1, T_2(1) = B_2;$$

$$P_0(1) = 0, P_1(1) = P_{10}, P_2(1) = P_{20},$$

(20)

где компоненты вектора силы трения τ_1, τ_2 представлены как линейные функции горизонтальных координат $\tau_1 = \tau_{10} + x\tau_{11} + y\tau_{12}$ и $\tau_2 = \tau_{20} + x\tau_{21} + y\tau_{22}$.

Первое и второе уравнения подсистемы (13) будут совместны, если выполняется равенство

$$U_2 V_1 + U_1^2 = 0, \quad (21)$$

которое назовем условием совместности. Условие совместности накладывает ограничения на параметры граничных условий системы (13).

Решения для производных скоростей U_1, U_2, V_1 и V_2 по горизонтальным переменным с учетом условия совместности (21) получатся в виде линейных функций переменной z . Используя граничные условия на твердой поверхности (18), получим решения в виде:

$$U_1 = C_1(z + a/\delta); U_2 = C_3(z + a/\delta); V_1 = C_5(z + a/\delta); V_2 = -U_1 = -C_1(z + a/\delta), \quad (22)$$

где C_1, C_3 и C_5 – произвольные постоянные интегрирования. Для выполнения условий совместности (21) произвольные постоянные C_1, C_3 и C_5 должны удовлетворять соотношению $C_1^2 + C_3 C_5 = 0$, а граничные условия (19), соответственно, соотношению:

$$\tau_{11}^2 + \tau_{12}\tau_{21} = 0. \quad (23)$$

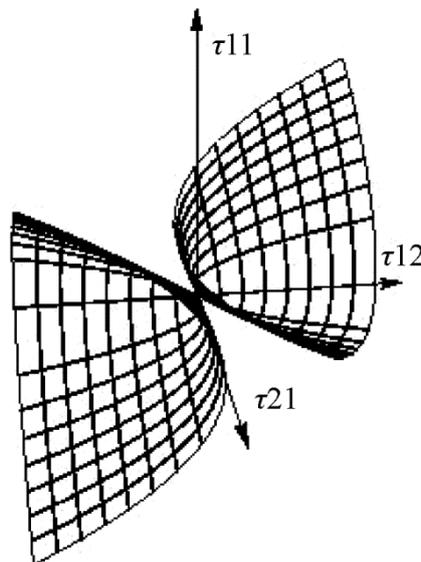


Рис. 2. Поверхность в пространстве параметров граничных напряжений τ_{ij}

На рис. 2 представлена поверхность в пространстве параметров граничных условий τ_{ij} , соответствующая уравнению (23). Если изображающая точка граничных условий с координатами $(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21})$ лежит на этой поверхности, то выполняется условие совместности и существует слоистое течение, принадлежащее классу решений (8), описанное в данной работе. В противном случае слоистое течение невозможно.

Рассмотрим систему уравнений (14), описывающую компоненты вектора градиента температуры. Умножим первое уравнение на U_1 , второе – на U_2 и сложим. В результате с учетом условия несжимаемости (12), условия совместности (21) и выражений для производных скоростей (22) получим соотношение, связывающее вторые производные неизвестных T_1 и T_2 :

$$C_1(z+a/\delta)T_1'' + C_3(z+a/\delta)T_2'' = 0.$$

Полученное выражение разделим на $(z+a/\delta)$ и проинтегрируем дважды по z . В результате получится соотношение, связывающее неизвестные T_1 и T_2 :

$$C_1 T_1(z) + C_3 T_2(z) = C_7 z + C_8, \quad (24)$$

где C_7 и C_8 произвольные постоянные интегрирования. Разрешим полученное соотношение (24) относительно неизвестной T_2 и подставим в первое уравнение системы (14):

$$T_1'' = \frac{Ra(C_8 + C_7 z)(a + z\delta)}{\delta}. \quad (25)$$

Интегрируя уравнение (25) и используя соотношение (24), найдем компоненты градиента температуры:

$$T_1(z) = C_{10} + C_9 z + Ra \left(\frac{C_8}{2} \left(\frac{z^3}{3} + \frac{a z^2}{\delta} \right) + \frac{C_7}{6} \left(\frac{z^4}{2} + \frac{a z^3}{\delta} \right) \right);$$

$$T_2(z) = \frac{C_8 + C_7 z - C_1 \left(C_{10} + C_9 z + Ra \left(\frac{C_8 z^3}{6} + \frac{C_7 z^4}{12} + \frac{a C_8 z^2}{2\delta} + \frac{a C_7 z^3}{6\delta} \right) \right)}{C_3},$$

где C_9 и C_{10} – произвольные постоянные интегрирования. Из полученных выражений делаем вывод, что при данной постановке задачи градиенты температуры не являются линейными функциями координаты z , как для однородного решения, а являются полиномами третьего порядка относительно переменной z и существенно зависят от производных скорости по горизонтальным координатам.

Интегрируя уравнения системы (15), найдем компоненты градиента давления в виде:

$$P_1 = C_{11} - \left(C_{10} z - \frac{a C_1 z}{Ek \delta} + \frac{C_9 z^2}{2} - \frac{C_1 z^2}{2 Ek} + \frac{a C_8 Ra z^3}{6\delta} + \frac{C_8 Ra z^4}{24} + \frac{a C_7 Ra z^4}{24\delta} + \frac{C_7 Ra z^5}{60} \right) \frac{\delta}{Gr};$$

$$P_2 = C_{12} - \frac{\delta}{Gr} \left[\frac{C_8 z}{C_5} - \frac{C_1 C_{10} z}{C_5} + \frac{C_7 z^2}{2 C_5} - \frac{C_1 C_9 z^2}{2 C_5} - \frac{C_3}{Ek} \left(\frac{z^2}{2} + \frac{az}{\delta} \right) - \right]$$

$$-\frac{Ra C_1}{C_5} \left(-\frac{a C_8 z^3}{6\delta} + \frac{C_8 z^4}{24} - \frac{a C_7 z^4}{24\delta} - \frac{C_7 z^5}{60} \right),$$

где C_{11} и C_{12} – произвольные постоянные интегрирования.

Для системы уравнений (16), описывающей фоновые компоненты скорости, проведем преобразования, аналогичные преобразованиям уравнений для градиентов температуры (14). В результате получим соотношение, связывающее вторые производные неизвестных функций U_0 и V_0 :

$$C_1 U_0''(z) + C_3 V_0''(z) = \delta^2 Gr (P_1(z) + P_2(z)).$$

Интегрируя полученное равенство, найдем связь самих функций U_0 и V_0 :

$$C_1 U_0(z) + C_3 V_0(z) = \int \left(\int \delta^2 Gr (P_1(z) + P_2(z)) dz + C_{13} \right) dz + C_{14}. \quad (26)$$

Выразим из (26) функцию V_0 и подставим в первое уравнение системы (11). Проинтегрировав полученное соотношение, найдем выражение для фоновой компоненты скорости U_0 :

$$\begin{aligned} U_0 = C_{16} + C_{15} z - z^2 \delta^2 \left[\frac{Ra(5a(C_7 + 4C_8) + (2C_7 + 5C_8)\delta)}{240} + \frac{(2aC_1 + (C_1 + (2C_{10} + C_9)Ek)\delta)}{4Ek} \right] + \\ + z^3 \left(\frac{C_{14} Gr \delta^2}{6} + \frac{\delta^2 (a C_1 + C_{10} Ek \delta)}{6 Ek} \right) + z^4 \left(\frac{C_{13} Gr \delta^2}{12} + \frac{(C_1 + C_9 Ek) \delta^3}{24 Ek} \right) + \\ + z^5 \delta^2 \left[\frac{a C_8 Ra}{120} - \frac{\delta^2 Gr}{80 Ek} \left((C_1^2 + C_3^2)(2a + \delta) + (C_7 + 2C_8) \delta Ek \right) \right] + \\ + z^6 \delta^2 \left[\frac{Ra(a C_7 + C_8 \delta)}{720} + \frac{Gr \delta^2}{180 Ek} (a(C_3^2 + C_1^2) + C_8 Ek \delta) \right] + \\ + z^7 \delta^3 \left[\frac{C_7 Ra}{2520} + \frac{\delta^2 Gr}{1008 Ek} (C_3^2 + C_1^2 + C_7 Ek) \right], \end{aligned}$$

где C_{13} , C_{14} , C_{15} и C_{16} - произвольные постоянные интегрирования. Возвращаясь к выражению (26), найдем выражение для фоновой компоненты скорости V_0 :

$$\begin{aligned}
 V_0 = & \frac{C_{14} - C_1 C_{16} + (C_{13} - C_1 C_{15})z}{C_3} + \\
 & + z^2 \left[\frac{C_1 Ra \delta^2 (5a(C_7 + 4C_8) + (2C_7 + 5C_8)\delta)}{240 C_3} - \frac{(C_7 + 2C_8 - C_1(2C_{10} + C_9))\delta^3}{4 C_3} - \frac{C_3 \delta^2 (2a + \delta)}{4 Ek} \right] + \\
 & + z^3 \left[\frac{a C_3 \delta^2}{6 Ek} - \frac{C_1 C_{14} Gr \delta^2}{6 C_3} + \frac{(C_8 - C_1 C_{10})\delta^3}{6 C_3} \right] + z^4 \left[\frac{(C_7 - C_1 C_9)\delta^3}{24 C_3} - \frac{C_1 C_{13} Gr \delta^2}{12 C_3} + \frac{C_3 \delta^3}{24 Ek} \right] + \\
 & + z^5 \frac{C_1}{C_3} \left[\frac{\delta^4 Gr}{80 Ek} ((C_3^2 + C_1^2)(2a + \delta) + (C_7 + 2C_8)Ek\delta) - \frac{a C_8 Ra \delta^2}{120} \right] - \\
 & - z^6 \frac{C_1}{C_3} \left[\frac{Ra \delta^2 (aC_7 + \delta C_8)}{720} + \frac{\delta^4 Gr (a(C_3^2 + C_1^2) + C_8 Ek\delta)}{180 Ek} \right] - \\
 & - \frac{z^7 C_1}{C_3} \left[\frac{C_7 Ra \delta^3}{2520} + \frac{Gr \delta^5 ((C_3^2 + C_1^2) + C_7 Ek)}{1008 Ek} \right].
 \end{aligned}$$

Получилось общее решение системы (16) при заданном виде производных скоростей (22), зависящее от шестнадцати произвольных постоянных. Решения для фоновой температуры и давления не приводятся из-за их громоздкости. Решение для температуры – полином тринадцатого порядка, для давления – четырнадцатого порядка.

Заметим, что из четырех значений граничных условий (19) τ_{11} , τ_{12} , τ_{21} и τ_{22} в данной задаче независимы только два. На решения (22) наложены два условия: условие несжимаемости (12) и условие совместности (21). Из условия несжимаемости (12) следует, что $\tau_{22} = -\tau_{11}$, из условия совместности (21) – $\tau_{21} = -\tau_{11}^2/\tau_{12}$. Очевидно, что второе условие может выполняться только при $\tau_{12} \neq 0$ или $\tau_{21} \neq 0$. Если $\tau_{12} = 0$, то и τ_{11} должно быть равно нулю. При этом τ_{21} может принимать произвольные значения. Этот случай для изотермического течения рассмотрен в работе [9].

Анализ множества застойных точек

Застойной точкой назовем точку оси z , в которой одна из компонент вектора скорости V обращается в ноль. Двойной застойной точкой будем называть точку, в которой обращаются в ноль обе компоненты вектора скорости.

Построим компоненты вектора скорости V_x и V_y согласно виду решения (8) с подстановкой выражений (22) и учетом граничных условий (19). В результате получим:

$$V_x = U_0(z) + \tau_{11}x(z+a/\delta) + \tau_{12}y(z+a/\delta); \quad V_y = V_0(z) + \tau_{21}x(z+a/\delta) - \tau_{11}y(z+a/\delta).$$

1. Пусть в точке $z = z^*$ фоновые слагаемые компонент скорости обращаются в ноль:

$$U_0(z^*) = 0 \text{ и } V_0(z^*) = 0.$$

Тогда координаты застойных точек на плоскости $z = z^*$ определяются системой уравнений:

$$\begin{aligned} \tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta) &= 0; \\ \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta) &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Получилась линейная система алгебраических однородных уравнений относительно переменных x и y . Но определитель этой системы в силу условия совместности (21) обращается в ноль. Так как система однородная, то она имеет бесконечно много решений, лежащих на прямой, определяемой уравнением:

$$\tau_{11}x + \tau_{12}y = 0. \quad (28)$$

На приведенном ниже рисунке показаны линии тока жидкости на плоскости переменных x и y при $z^* = 0,7725$ и следующих значениях параметров системы и граничных условий:

$$\begin{aligned} B_1 = 70,0, B_2 = -25,0, \tau_1 = -20,1, \tau_2 = -22,7584, \tau_{12} = 1,3, \tau_{21} = -1,0, \\ Ek = 0,0001, Gr = 10,0, Ra \end{aligned} \quad (29)$$

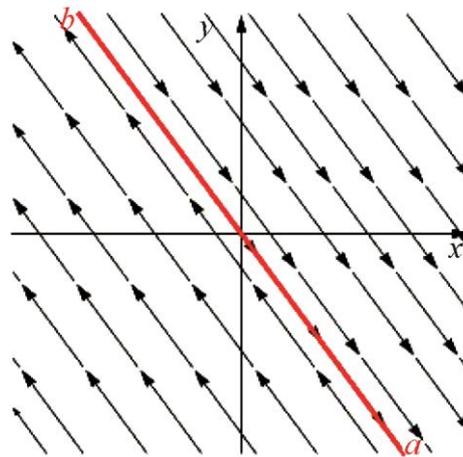


Рис. 3. Линии тока на плоскости x и y при $z^* = 0,7725$

Множество застойных точек выделено на рис. 3 красной линией.

2. Пусть в точке $z = z^*$ фоновые слагаемые компонент скорости в ноль не обращаются, застойных точек фоновых слагаемых компонент скорости нет:

$$U_0(z^*) \neq 0 \text{ и } V_0(z^*) \neq 0.$$

Координаты застойных точек на плоскости x, y удовлетворяют системе линейных алгебраических неоднородных уравнений относительно переменных x и y :

$$\begin{aligned} \tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta) &= -U_0(z^*); \\ \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta) &= -V_0(z^*). \end{aligned} \quad (30)$$

Но определитель этой системы, как и системы (27), в силу условия совместности (21) обращается в ноль. Как известно, решение такой системы существует, если правые части удовлетворяют условию совместности:

$$\tau_{11}U_0(z^*) + \tau_{12}V_0(z^*) = 0. \quad (31)$$

Решение при этом не единственно. Множество решений образует на плоскости $z = z^*$ прямую линию, координаты точек которой удовлетворяют уравнению:

$$\tau_{11}x + \tau_{12}y = -\frac{U_0(z^*)}{z^* + a/\delta}.$$

Пусть условие совместности (31) при заданных значениях параметров (29) и заданном значении z^* не выполняется. Тогда рассмотрим соотношение (31) как уравнение относительно какого-либо параметра граничных условий задачи. В приведенном ниже примере (рис. 4) граничное условие B_2 для компоненты градиента давления получено как решение уравнения (31).

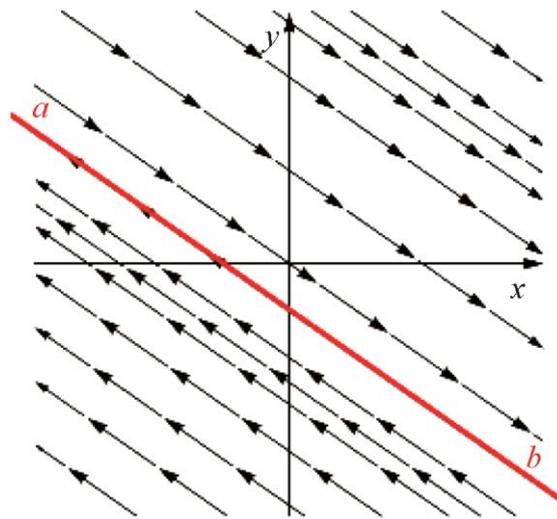


Рис. 4. Линии тока на плоскости x и y при $z^* = 0,7$

При наборе (29) параметров граничных условий (18), (19) и (20) и системы уравнений (9), (10) и (11) при относительной глубине $z^* = 0,7$ однородное решение не имеет застойной точки, так как свободные члены компонент скоростей не обращаются в ноль (рис. 4). В данном примере граничная компонента градиента температуры B_2 определена как решение условия совместности (31). Линия застойных точек (жирная линия) не проходит через начало координат плоскости переменных x и y . Таким образом, существование застойных точек зависит от горизонтальных градиентов температуры, заданных на границе.

3. Пусть при заданном значении z^* в ноль обращается только одна из компонент фоновых слагаемых скорости (простая застойная точка). Например $U_0(z^*) = 0$ и $V_0(z^*) \neq 0$. Тогда получим следующие выражения скоростей:

$$V_x = \tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta);$$

$$V_y = V_0(z^*) + \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta),$$

а система уравнений, определяющая застойные точки примет вид:

$$\begin{aligned}\tau_{11}x(z^* + a/\delta) + \tau_{12}y(z^* + a/\delta) &= 0; \\ \tau_{21}x(z^* + a/\delta) - \tau_{11}y(z^* + a/\delta) &= -V_0(z^*).\end{aligned}\quad (32)$$

Определитель системы (32), как и систем (27) и (30), равен нулю. Для существования решения системы (32) должно выполняться условие совместности:

$$V_0(z^*)\tau_{11} = 0 \text{ или } V_0(z^*)\tau_{12} = 0. \quad (33)$$

В этом случае должно выполняться одно из условий:

а) $V_0(z^*) = 0$ и приходим к случаю 1;

б) $\tau_{12} = 0$, но тогда из условия (23) следует $\tau_{11} = 0$ и первое уравнение системы (33)

вырождается;

в) $\tau_{11} = 0$, из условия совместности (23) следует: или $\tau_{12} = 0$ или $\tau_{21} = 0$ и левая часть одного из уравнений (33) обращается в тождественный ноль.

Таким образом, застойные точки могут появляться на заданной глубине, если на этой глубине существует двойная застойная точка фоновых слагаемых скорости или застойных точек фоновых слагаемых нет.

4. Заключение

В работе построено неоднородное аналитическое решение, описывающее конвективное течение вязкой несжимаемой жидкости в экваториальной зоне с учетом двух компонент силы Кориолиса. Решение для экваториальной зоны, в отличие от решения для средних широт [6], представлено в виде полиномов высокого порядка. Исследовано множество застойных точек решения. Показано, что линия застойных точек на заданной глубине существует, если существует двойная застойная точка фоновых компонент скорости, или застойные точки отсутствуют.

Литература

1. Педдоски Дж. Геофизическая гидродинамика : в 2-х т. – М. : Мир, 1984. – 811 с.
2. Зырянов В. Н. Теория установившихся океанических течений. – Л. : Гидрометеиздат, 1985.
3. Ekman V. W. On the Influence of the Earths Rotation on Ocean Currents // Arkiv for matematik, Asrtonomi, och Fysic. – 1905. – Band 2, No. 11.
4. Фельзенбаум А. И. Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. – М. : Изд-во. АН СССР, 1960. – 127 с.
5. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. – Киев : Наук. думка, 1986. – 208 с.
6. Горшков А. В., Просвирыков Е. Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. – 2018. – Т. 54, № 2. – С. 213–220.
7. Gorshkov A. V. and Prosviryakov E. Yu. Convective flow in the solid rotation of a viscous incompressible fluid // AIP Conference Proceedings. – 2017. – 1915. – 040020. – DOI: 10.1063/1.5017368.
8. Ингель Л. Х., Аристов С. Н. Класс точных решений нелинейных задач о термических циркуляциях, связанных с объемным тепловыделением в атмосфере // Тр. ин-та экспериментальной метеорологии. – 1996. – Вып. 27 (162). – С. 142–157.

9. Gorshkov A. V. Prosviryakov E. Yu. Isobaric Vortex Flow of a Viscous Incompressible Fluid with the Navier Boundary Condition // AIP Conference Proceedings. – 2018. – Vol. 2053. – 040030. – DOI: 10.1063/1.5084468.
10. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier-Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2009. – Vol. 43, No. 5. – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
11. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations / Sergey V. Ershkov, Evgeniy Yu. Prosviryakov, Natalya V. Burmasheva, and Victor Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. – Vol. 53, No. 4. – P. 044501. – DOI:10.1088/1873-7005/ac10f0.
12. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9 (3). – P. 3–9.
13. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. – 2014. – Т. 10 (2). – С. 177–182.
14. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : ПГУ, 2006. – 155 с.
15. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости // Киров : ВятГУ, 2011. – 207 с.
16. Aristov S. N., Shvarts K. G. Advective flow in a rotating liquid film // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2016. – Vol. 57, No. 1. – P. 188–194. – DOI: 10.1134/S0021894416010211.
17. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. Evans, E. Bonaccorso, Butt Hans-Jürgen, and S. J. Vincent Craig // Reports on Progress in Physics. – 2005. – Vol. 68, No. 12. – P. 2859–2897. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
18. Борзенко Е. И., Дьякова О. А., Шрагер Г. Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // Вестник ТГУ, Механика. – 2014. – № 2 (28). – С. 35–44.