

Received: 03.11.2025
Revised: 15.12.2025
Accepted: 19.12.2025
DOI: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038

EXACT ANALYTICAL SOLUTION TO THE PROBLEM OF STATIONARY CONVECTION IN THE BOUSSINESQ APPROXIMATION WITH ACCOUNT FOR VISCOUS DISSIPATION

K. V. Gubareva^{1, a, *} and E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}

¹Samara State Technical University,





244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia

²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia

^a  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;
^b  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia
 Tel.: +7 (846) 332-4226

An exact analytical solution is obtained for the system of equations governing stationary convection of a viscous incompressible fluid, accounting for the buoyancy force (within the Boussinesq approximation) and viscous dissipation. The flow in a plane layer between two parallel plates is considered. It is found that the system admits two mutually exclusive classes of solutions. One describes a thermogravitational flow with a linear dependence of temperature on the longitudinal coordinate and a velocity dependent only on the transverse coordinate. The other class represents a generalized shear flow, combining the Couette and Poiseuille profiles with temperature depending solely on the transverse coordinate and explicitly accounting for dissipative heating. It is shown that the energy equation prohibits the simultaneous existence of a transverse velocity shear and a longitudinal temperature gradient. For the latter class, an explicit closed-form solution is constructed for a particular case, namely a generalized Couette–Poiseuille flow with a constant pressure gradient and isothermal boundaries, which includes closed-form expressions for velocity, temperature, and pressure. All the solutions strictly satisfy the equations of motion and energy, as well as the specified boundary conditions.

Keywords: exact solution, Couette–Poiseuille flow, viscous dissipation, Boussinesq approximation, stationary convection

References

1. Landau, L.D. and Lifshitz, E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics, Hydrodynamics, vol. 6]. Fizmatlit Publ., Moscow, 2006, 736 p. (In Russian).
2. Schlichting, H. and Gersten, K. *Boundary-Layer Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2017, 805 p. DOI: 10.1007/978-3-662-52919-5.
3. Bird, R., Stewart, W., and Lightfoot, E. *Transport Phenomena*, 2nd ed., John Wiley and Sons, New York, 2002, 895 p.
4. Gubareva, K.V. and Eremin, A.V. Numerical solution to the problem of thermal conductivity in a porous plate with a topology of triply periodic minimal surfaces. *Advanced*

Engineering Research (Rostov-on-Don), 2025, 25 (1), 23–31. DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31.

5. Eremin, A.V., Gubareva, K.V., and Shulga, A.S. Investigation of the process of thermal conductivity in a plate with internal sources of heat of constant power. *Inzhenernyi Vestnik Dona*, 2019, 6. (In Russian). Available at: <http://www.ivdon.ru/en/magazine/archive/N6y2019/6041>
6. Levich, V.G. *Fiziko-khimicheskaya gidrodinamika* [Physicochemical Hydrodynamics]. Fizmatgiz Publ., Moscow, 1959, 699 p. (In Russian).
7. Gershuni, G.Z. and Zhukhovitskii, E.M. *Konvektivnaya ustoychivost neszhimayemykh zhidkosti* [Convective Stability of Incompressible Fluids]. Nauka Publ., Moscow, 1972, 392 p. (In Russian).
8. Bejan, A. *Convection Heat Transfer*, 4th edition, Wiley, 2013, 704 p.
9. Shah, R.K. and London, A.L. *Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data*, Academic Press, New York, 1978, 477 p.
10. Pukhnachev, V.V. Group properties of the equations of Navier–Stokes in the planar case. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*, 1960, 1 (1), 83–90. (In Russian).
11. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, 7, 43–44. DOI: 10.1007/BF00914697.
12. Polyanin, A.D., Kutepov, A.M., Vyazmin, A.V., and Kazenin, D.A. *Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering*, CRC Press/Taylor & Francis, 2001, 408 p. DOI: 10.1201/9781420024517.
13. Polyanin, A.D. and Zaitsev, V.F. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, Chapman & Hall/CRC, 2004, 840 p.
14. Andreev, V.K., Gaponenko, Ya.A., Goncharova, O.N., and Pukhnachev, V.V. *Mathematical Models of Convection, De Gruyter Studies in Mathematical Physics Ser.*, Walter De Gruyter, Berlin, 2012, 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592.
15. Pukhnachov, V.V. Hierarchy of models in convection theory. *Journal of Mathematical Sciences*, 2004, 123, 4607–4620. DOI: 10.1023/B:JOTH.0000041478.45024.64.
16. Shtern, V. *Counterflows: Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012, 470 p. DOI: 10.1017/CBO9781139226516.
17. Shtern, V. *Cellular Flows: Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2018, 588 p. DOI: 10.1017/9781108290579.
18. Papanastasiou, T., Georgiou, G., and Alexandrou, A.N. *Viscous Fluid Flow*, CRC Press, 2021, 434 p.
19. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Nelineynaya Dinamika*, 2013, 9 (4), 651–657. (In Russian).
20. Goncharova, O.N. and Rezanova, E.V. Example of an exact solution of the stationary problem of two-layer flows with evaporation at the interface. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, 55, 247–257. DOI: 10.1134/S0021894414020072.
21. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychislitel'naya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2015, 8 (4), 445–456. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
22. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Nonuniform convective Couette flow. *Fluid Dynamics*, 2016, 51, 581–587. DOI: 10.1134/S001546281605001X.
23. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (3), 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
24. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (2), 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.

25. Bratsun, D.A., Vyatkin, V.A., and Mukhamatullin, A.R. On exact nonstationary solutions of equations of vibrational convection. *Computational Continuum Mechanics*, 2017, 10 (4), 433–444. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.35.
26. Bekezhanova, V.B. and Goncharova, O.N. Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations. *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, 130, 323–332. DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.05.001.
27. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. The effect of tangential boundary stresses on the convective unidirectional flow of a viscous fluid layer under the lower boundary heating condition. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, 4, 44–55. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055. Available at: http://dream-journal.org/issues/2019-4/2019-4_262.html
28. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional thermocapillary flows of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. *AIP Conference Proceedings*, 2019, 2176 (1), 030002. DOI: 10.1063/1.5135126.
29. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53, 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
30. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2020, 54, 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
31. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. Available at: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
32. Prosviryakov, E.Yu., Mikhailov, S.A., Ledyankina, O.A., and Goruleva, L.S. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing binary fluid flows. *Russian Aeronautics*, 2023, 66, 500–509. DOI: 10.3103/S106879982303011X.
33. Prosviryakov, E.Yu., Ledyankina, O. A., and Goruleva, L.S. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the flow of multicomponent fluids with internal heat generation. *Russian Aeronautics*, 2024, 67, 60–69. DOI: 10.3103/S1068799824010070.
34. Goruleva, L.S., Obabkov, I.I., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for convective Stokes flows. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2024, 2, 36–49. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049. Available at: http://dream-journal.org/issues/2024-2/2024-2_437.html
35. Bashurov, V.V., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution to the velocity field description for Couette–Poiseuille flows of binary liquids. *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2024, 28 (4), 759–772. DOI: 10.14498/vsgtu2098.
36. Prosviryakov, E.Yu., Ledyankina, O.A., and Goruleva, L.S. A class of exact solutions of magnetic hydrodynamics equations for describing convective flows of multilayer fluids. *Russian Aeronautics*, 2024, 67, 550–563. DOI: 10.3103/S1068799824030103.
37. Goruleva, L.S., Obabkov, I.I., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for describing multilayer fluid flows in the Stokes approximation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 2, 6–27. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.2.006-027. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-2/2025-2_504.html
38. Prosviryakov, E., Goruleva, L., and Ledyankina, O. A new exact solution of the Navier–Stokes equations for describing the unsteady flows of vertically swirled fluid. *Russian Aeronautics*, 2025, 68 (2), 393–401. DOI: 10.3103/S1068799825020151.

39. Goruleva, L.S., Obabkov, I.I., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to thermal diffusion equations for Stokes slow flows. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2024, 6, 241–267. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.6.241-267. Available at: http://dream-journal.org/issues/2024-6/2024-6_481.html
40. Prosviryakov, E.Yu., Goruleva, L.S., and Alies, M.Yu. A class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations with the Rayleigh dissipative function. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya*, 26 (2), 164–178. (In Russian). DOI: 10.62669/17270227.2024.2.15.

Подана в журнал: 03.11.2025

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038



ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СТАЦИОНАРНОЙ КОНВЕКЦИИ В ПРИБЛИЖЕНИИ БУССИНЕСКА С УЧЕТОМ ВЯЗКОЙ ДИССИПАЦИИ



К. В. Губарева^{1, а, *}, Е. Ю. Просвиряков^{2, 3, б}

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^б  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия
Тел.: +7 (846) 332-42-26

В работе получено точное аналитическое решение системы уравнений стационарной конвекции для вязкой несжимаемой жидкости с учетом силы Архимеда (в приближении Буссинеска) и вязкой диссипации. Рассматривается течение в плоском слое между двумя параллельными пластинами. Установлено, что система допускает два взаимоисключающих класса решений. Первый описывает термогравитационное течение с линейной зависимостью температуры от продольной координаты и скоростью, зависящей только от поперечной координаты. Второй класс представляет собой обобщенное сдвиговое течение, сочетающее профили Куэтта и Пуазейля с температурой, зависящей лишь от поперечной координаты, и явным учетом диссипативного нагрева. Установлено, что уравнение энергии запрещает одновременное существование поперечного сдвига скорости и продольного градиента температуры. Для второго класса построено явное замкнутое решение частного случая (обобщенного течения Куэтта – Пуазейля с постоянным градиентом давления и изотермическими границами), включающее замкнутые выражения для скорости, температуры и давления. Все решения строго удовлетворяют уравнениям движения и энергии, а также заданным граничным условиям.

Ключевые слова: точное решение, течение Куэтта – Пуазейля, вязкая диссипация, приближение Буссинеска, стационарная конвекция

1. Введение

Аналитическое исследование точных решений уравнений гидродинамики сохраняет свою актуальность на протяжении всей истории развития механики сплошных сред [1–3]. Несмотря на впечатляющие успехи вычислительных методов [4, 5], замкнутые аналитические решения продолжают играть фундаментальную роль в понимании физической сущности явлений, верификации численных алгоритмов и выявлении базовых закономерностей, которые могут быть завуалированы в сложных компьютерных расчетах. Особый интерес представляют течения, в которых существенную роль играют нелинейные эффекты, связан-

ные с переносом тепла и его взаимодействием с динамикой жидкости [6–9]. В этом контексте задачи о конвективных течениях с учетом диссипации энергии и силы плавучести образуют важное направление исследований с многочисленными приложениями в природных и технологических процессах.

Стационарная конвекция вязкой несжимаемой жидкости с учетом силы Архимеда и диссипативного нагрева описывается системой связанных нелинейных уравнений в частных производных, включающей уравнение неразрывности, уравнения Навье – Стокса в приближении Буссинеска и уравнение энергии [1, 7, 10]. Суть приближения Буссинеска заключается в том, что плотность считается постоянной во всех членах, за исключением гравитационного, где ее зависимость от температуры учитывается линейно. Это позволяет моделировать эффекты плавучести без чрезмерного усложнения математической модели. Диссипативная функция в уравнении энергии представляет собой существенно нелинейный член, описывающий необратимое превращение механической энергии в тепловую вследствие работы вязких напряжений. Совместный учет этих факторов обеспечивает адекватное описание широкого спектра явлений – от атмосферной и океанической конвекции до задач микрофлюидики и теплообмена в промышленных устройствах [11–15].

Исторически большинство известных точных решений уравнений Навье – Стокса получено для изотермических течений или при пренебрежении диссипацией. Классические решения, такие как течение Пуазейля в плоском канале, течение Куэтта между параллельными пластинами или течение Тейлора – Куэтта между вращающимися цилиндрами, хорошо изучены и входят в стандартные учебные курсы [1–3]. Однако значительно меньше внимания уделялось построению самосогласованных решений, в которых поля скорости, температуры и давления определяются совместно с учетом их взаимного влияния через плавучесть и диссипацию [16–18]. Часто такие задачи решаются численно или с существенными упрощениями, включая фиксацию одного из полей.

Анализ литературы выявляет значительный пробел в области построения полных аналитических решений сопряженных задач тепломассопереноса с учетом как плавучести, так и вязкого нагрева [19–24]. Большинство работ либо отделяют гидродинамику от теплопереноса, либо пренебрегают одним из механизмов. В то же время именно самосогласованные решения позволяют выявить тонкие эффекты взаимодействия механических и тепловых процессов, недоступные в рамках упрощенных моделей.

Особую сложность представляет обеспечение структурной совместимости функциональных зависимостей различных полей, необходимой для замыкания системы уравнений. Граничные условия дополнительно ограничивают допустимые классы решений, что требует тщательного выбора анзаца, позволяющего понизить размерность задачи и провести ее полную аналитическую интеграцию [25–29].

Целью настоящей работы является построение и анализ полных самосогласованных аналитических решений системы уравнений стационарной конвекции для вязкой несжимаемой жидкости с учетом силы Архимеда в приближении Буссинеска и диссипации энергии. Для достижения этой цели решаются следующие задачи: вывод общего класса решений с заданной структурой полей; анализ структурных ограничений, возникающих при построении самосогласованных решений; получение альтернативных классов решений для специальных случаев; построение и детальный анализ частного решения для течения Куэтта – Пуазейля с диссипативным нагревом и изотермическими границами; физическая интерпретация результатов и их связь с классическими решениями гидродинамики.

2. Постановка задачи

Рассматривается стационарное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в бесконечном слое, ограниченном плоскостями $z = 0$ и $z = h$. Течение возникает под действием градиентов давления и/или движения границ, сопровождается конвективным и дис-

сипативным переносом тепла, а также модулируется силой плавучести. Система описывается уравнениями Навье – Стокса и энергии в приближении Буссинеска, что предполагает постоянство всех физических свойств жидкости, за исключением плотности в члене, описывающем гравитационное воздействие [1, 7]. Ось z направлена вертикально вверх, гравитация действует в отрицательном направлении оси z .

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (1)$$

Уравнения Навье – Стокса с учетом силы Архимеда записываются как

$$\rho_0(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho_0 g \beta T \mathbf{e}_z, \quad (2)$$

где ρ_0 – характерная плотность, μ – динамическая вязкость, g – ускорение свободного падения, β – коэффициент теплового расширения, T – отклонение температуры от опорного состояния, а \mathbf{e}_z – единичный вектор вдоль оси z .

Уравнение энергии с учетом вязкой диссипации принимает форму

$$\rho_0 c_p (\mathbf{V} \cdot \nabla)T = k \nabla^2 T + \Phi, \quad (3)$$

где c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении, k – коэффициент теплопроводности, а Φ – функция диссипации, определяемая как

$$\begin{aligned} \Phi = \mu \left[2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right]. \quad (4) \end{aligned}$$

Для построения точного решения вводятся следующие функциональные зависимости компонент поля:

скорость

$$V_x = U(z) + u_1(z)y, \quad V_y = 0, \quad V_z = 0; \quad (5)$$

давление

$$P(x, z) = P_0(z) + P_1(z)x; \quad (6)$$

температура

$$T(x, z) = T_0(z) + T_1(z)x. \quad (7)$$

Такой выбор анзаца отражает однородность течения в продольном направлении x , возможную линейную модуляцию скорости по поперечной координате y и линейную зависимость термодинамических полей от продольной координаты, что характерно для течений с неоднородным градиентом давления и температурным расслоением [30–32].

3. Общее аналитическое решение

Подстановка компонент скорости (5) в уравнение неразрывности (1) дает

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 + 0 + 0 = 0,$$

поскольку V_x не зависит от x , а остальные компоненты скорости тождественно равны нулю. Следовательно, условие несжимаемости выполнено тождественно, и дополнительных ограничений на функции $U(z)$ и $u_1(z)$ уравнение неразрывности не накладывает.

Рассмотрим компоненту уравнения Навье – Стокса (2) вдоль оси x . Ввиду стационарности и структуры поля скорости, конвективный член обращается в нуль:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)V_x = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = 0.$$

Вязкий член вычисляется как

$$\nabla^2 V_x = \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} = 0 + (U''(z) + u_1''(z)y),$$

поскольку V_x линейна по y . Градиент давления по x равен $P/\partial x = P_1(z)$. Таким образом, z -компонента уравнения Навье – Стокса (2) принимает вид

$$0 = -P_1(z) + \mu(U''(z) + u_1''(z)y). \quad (8)$$

Это равенство должно выполняться при всех значениях y , что возможно лишь в случае независимости обеих частей от y . Следовательно, коэффициент при y должен обращаться в ноль:

$$u_1''(z) = 0. \quad u_1(z) = B_0 + B_1 z. \quad (9)$$

Одновременно получаем соотношение

$$\mu U''(z) = P_1(z). \quad (10)$$

Теперь перейдем к z -компоненте уравнения Навье – Стокса. Поскольку $V_z = 0$, вязкий член и конвективное ускорение исчезают. Градиент давления по z равен $\partial P/\partial z = P'_0(z) + P'_1(z)x$. Подстановка в z -компоненту дает

$$0 = -(P'_0(z) + P'_1(z)x) + \rho_0 g \beta (T_0(z) + T_1(z)x). \quad (11)$$

Это соотношение должно быть справедливо при любых x , что приводит к раздельному равенству коэффициентов при линейно независимых функциях 1 и x :

$$P'_0(z) = \rho_0 g \beta T_0(z), \quad (12)$$

$$P'_1(z) = \rho_0 g \beta T_1(z). \quad (13)$$

Эти уравнения устанавливают прямую связь между компонентами давления и температуры через условие гидростатического равновесия с учетом плавучести.

Вычислим все члены уравнения (3). Конвективный перенос тепла определяется как

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)T = V_x \frac{\partial T}{\partial x} = (U(z) + u_1(z)y)T_1(z). \quad (14)$$

В силу точного решения (7) диффузионный член уравнения теплопроводности (3) имеет вид

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 + T_0''(z) + T_1''(z)x. \quad (15)$$

Функция диссипации с учетом (5) и (9) принимает вид

$$\Phi = \mu \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} \right)^2 \right] = \mu [u_1(z)^2 + (U'(z) + u_1'(z)y)^2]. \quad (16)$$

Подстановка выражений (14)–(16) в уравнение (3) приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \rho_0 c_p (U(z) + u_1(z)y) T_1(z) = \\ = k(T_0''(z) + T_1''(z)x) + \mu [u_1(z)^2 + (U'(z) + u_1'(z)y)^2]. \end{aligned} \quad (17)$$

Левая часть этого уравнения зависит от y , но не от x ; правая часть зависит от x и, если $u_1'(z) \neq 0$, от y^2 . Единственная возможность удовлетворить равенство при всех x и y – потребовать, чтобы коэффициенты при всех независимых функциях совпадали. Анализ показывает, что совместное существование нетривиальных $u_1(z)$ и $T_1(z)$ невозможно. Более того, из требования отсутствия зависимости от x следует:

$$T_1''(z) = 0, \quad T_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z, \quad (18)$$

а из отсутствия зависимости от y – необходимость выполнения

$$u_1(z) = 0, \quad u_1'(z) = 0. \quad (19)$$

Таким образом, в рамках принятого анзаца (5)–(7) допустимо лишь течение, не зависящее от поперечной координаты y . Это фундаментальное ограничение диктуется структурой уравнения энергии при совместном учете конвекции и диссипации [33–35].

С учетом (19) поле скорости упрощается до вида

$$V_x = U(z), \quad V_y = V_z = 0. \quad (20)$$

Функция диссипации принимает вид

$$\Phi = \mu (U'(z))^2, \quad (21)$$

а уравнение энергии редуцируется к системе

$$kT_1''(z) = 0, \quad (22)$$

$$\rho_0 c_p U(z) T_1(z) = kT_0''(z) + \mu (U'(z))^2. \quad (23)$$

Интегрируя (18), получаем линейный профиль

$$T_1(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z, \quad (24)$$

где α_0 и α_1 – произвольные константы. Подстановка точного решения (24) в дифференциальное уравнение (13) и последующее интегрирование дают

$$P_1(z) = \rho_0 g \beta \left(\alpha_0 z + \frac{\alpha_1}{2} z^2 \right) + \gamma, \quad (25)$$

где y – константа интегрирования, имеющая смысл постоянной составляющей градиента давления.

Из уравнения (10) и точного решения (25) следует дифференциальное уравнение для скорости:

$$U''(z) = \frac{1}{\mu} \left[\rho_0 g \beta \left(\alpha_0 z + \frac{\alpha_1}{2} z^2 \right) + \gamma \right]. \quad (26)$$

Интегрируя дважды, находим

$$U'(z) = \frac{1}{\mu} \left[\rho_0 g \beta \left(\frac{\alpha_0}{2} z^2 + \frac{\alpha_1}{6} z^3 \right) + \gamma z \right] + \delta, \quad (27)$$

$$U(z) = \frac{1}{\mu} \left[\rho_0 g \beta \left(\frac{\alpha_0}{6} z^3 + \frac{\alpha_1}{24} z^4 \right) + \frac{\gamma}{2} z^2 \right] + \delta z + \varepsilon, \quad (28)$$

где δ и ε – дополнительные константы интегрирования, определяемые условиями на границах.

Температурная компонента $T_0(z)$ находится из уравнения (23):

$$T_0''(z) = \frac{1}{k} \left[\rho_0 c_p (\alpha_0 + \alpha_1 z) U(z) - \mu (U'(z))^2 \right]. \quad (29)$$

Двукратное интегрирование этого выражения дает

$$T_0(z) = \frac{1}{k} \int_0^z \int_0^\zeta \left[\rho_0 c_p (\alpha_0 + \alpha_1 \eta) U(\eta) - \mu (U'(\eta))^2 \right] d\eta d\zeta + C_1 z + C_0, \quad (30)$$

где C_0 и C_1 – константы, определяемые температурными граничными условиями.

Наконец, гидростатическая компонента давления $P_0(z)$ следует из равенства (12):

$$P_0(z) = \rho_0 g \beta \int_z^h T_0(\zeta) d\zeta + S, \quad (31)$$

где S – значение давления на верхней границе при $z = h$. Это условие соответствует заданию атмосферного или иного фиксированного давления на свободной поверхности.

Альтернативный класс решений – сдвиговое течение с изотермическими границами. Если отказаться от зависимости температуры от x (то есть положить $T_1(z) \equiv 0$), то уравнение (23) упрощается, и становится возможным ввести линейную зависимость скорости от y . В этом случае система допускает решение вида

$$V_x(y, z) = -\frac{G}{2\mu} z^2 + A_1 z + A_0 + B_0 y, \quad (32)$$

$$P(x, z) = P_0(z) - Gx, \quad (33)$$

$$T(z) = -\frac{G^2}{12k\mu} z^4 + \frac{GA_1}{3k} z^3 - \frac{\mu(B_0^2 + A_1^2)}{2k} z^2 + C_1 z + C_0, \quad (34)$$

$$P_0(z) = \rho_0 g \beta \left(-\frac{G^2}{60k\mu} z^5 + \frac{GA_1}{12k} z^4 - \frac{\mu(B_0^2 + A_1^2)}{6k} z^3 + \frac{C_1}{2} z^2 + C_0 z \right) + S, \quad (35)$$

где $G, A_0, A_1, B_0, C_0, C_1$ – произвольные константы, а S по-прежнему обозначает давление на верхней границе $z = h$. Данное решение описывает обобщенное сдвиговое течение, включающее как движение границ, так и параболический профиль, индуцированный постоянным градиентом давления G .

В результате проведенного анализа получено точное аналитическое решение уравнений стационарной конвекции (1)–(4) для вязкой несжимаемой жидкости с учетом силы Архимеда и диссипации энергии. Решение представлено в виде двух отдельных классов, описывающих физически различные режимы течения.

1. Термогравитационное течение. Этот класс решений, определяемый формулами (24), (28), (30), (25), (31), характеризуется линейной зависимостью температуры от продольной координаты x и отсутствием зависимости скорости от поперечной координаты y . Данный режим возникает при наличии продольного градиента температуры и реализуется в условиях, когда поле скорости имеет единственную ненулевую компоненту $V_x = U(z)$.

2. Сдвиговое течение с диссипацией. Этот класс решений, описываемый формулами (32)–(35), существует в случае, когда температура не зависит от x . Он допускает линейную зависимость скорости от поперечной координаты y и включает параболический профиль Пуазейля. Данное решение обобщает классические сдвиговые течения, учитывая вклад вязкой диссипации в тепловой баланс [36–38].

Установлено, что совместное существование зависимостей скорости от y и температуры от x в рамках исходного анзаца (5)–(7) является невозможным, что следует из структурных ограничений, накладываемых уравнением энергии (3). Таким образом, два полученных класса решений являются взаимоисключающими.

Все произвольные постоянные интегрирования, входящие в решения $\alpha_0, \alpha_1, \gamma, \delta, \varepsilon, C_0, C_1$ и другие, подлежат определению из граничных условий, заданных на нижней ($z = 0$) и верхней ($z = h$) границах слоя, где давление фиксируется значением S .

4. Частный случай: течение Куэтта – Пуазейля с градиентом давления и диссипативным нагревом

Рассмотрим стационарное ламинарное течение вязкой несжимаемой жидкости в канале, образованном двумя бесконечными параллельными пластинами, расположенными при $z = 0$ и $z = h$. Нижняя пластина неподвижна, верхняя движется со скоростью U_0 вдоль оси x . Течение сопровождается переносом тепла и вязким диссипативным нагревом. Учитывается сила тяжести, направленная против оси z , однако в данном частном случае принимается, что температурное поле не зависит от продольной координаты x , что позволяет рассматривать сдвиговое течение с изотермическими границами. В этом режиме применим второй класс решений, описанный ранее.

Система уравнений редуцируется к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Уравнение движения вдоль оси x принимает вид

$$\mu \frac{d^2 V_x}{dz^2} = -G, \quad (36)$$

где $G = -\partial P / \partial x$ – модуль градиента давления; при $G > 0$ давление убывает в направлении течения.

Уравнение энергии с учетом вязкой диссипации записывается как

$$k \frac{d^2 T}{dz^2} + \mu \left(\frac{dV_x}{dz} \right)^2 = 0, \quad (37)$$

а гидростатическая компонента давления определяется из условия плавучести

$$\frac{dP_0}{dz} = \rho_0 g \beta T(z). \quad (38)$$

Граничные условия задаются следующим образом:

для скорости

$$V_x(0) = 0, \quad V_x(h) = U_0, \quad (39)$$

для температуры

$$T(0) = T_0, \quad T(h) = T_1, \quad (40)$$

для давления

$$P_0(0) = 0. \quad (41)$$

Решение уравнения (36) начинается с двукратного интегрирования. Первое интегрирование дает

$$\frac{dV_x}{dz} = -\frac{G}{\mu}z + C_1, \quad (42)$$

второе приводит к выражению

$$V_x(z) = -\frac{G}{2\mu}z^2 + C_1z + C_2. \quad (43)$$

Подстановка граничного условия $V_x(0) = 0$ немедленно дает $C_2 = 0$. Использование условия $V_x(h) = U_0$ позволяет определить вторую константу:

$$C_1 = \frac{U_0}{h} + \frac{Gh}{2\mu}. \quad (44)$$

Подстановка постоянной интегрирования (44) в точное решение (43) приводит к окончательному выражению для профиля скорости:

$$V_x(z) = \frac{U_0z}{h} - \frac{G}{2\mu}z(h-z). \quad (45)$$

Это выражение представляет собой суперпозицию линейного профиля классического течения Куэтта и параболического профиля течения Пуазейля [1–3, 7].

Далее вычисляется градиент скорости:

$$\frac{dV_x}{dz} = \frac{U_0}{h} - \frac{G}{2\mu}(h-2z). \quad (46)$$

Соответственно, функция диссипации принимает вид

$$\Phi = \mu \left(\frac{dV_x}{dz} \right)^2 = \mu \left[\frac{U_0}{h} - \frac{G}{2\mu}(h-2z) \right]^2. \quad (47)$$

Подстановка функции (47) в уравнение энергии (37) и раскрытие квадрата приводят к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -\frac{1}{k} \left[\frac{\mu U_0^2}{h^2} - GU_0 \left(1 - \frac{2z}{h} \right) + \frac{G^2}{4\mu} (h-2z)^2 \right]. \quad (48)$$

Интегрирование уравнения (48) по z дает первый интеграл:

$$\frac{dT}{dz} = -\frac{1}{k} \left[\frac{\mu U_0^2}{h^2} z - GU_0 \left(z - \frac{z^2}{h} \right) + \frac{G^2}{4\mu} \left(h^2 z - 2hz^2 + \frac{4z^3}{3} \right) \right] + C_3. \quad (49)$$

Повторное интегрирование приводит к выражению для температуры:

$$T(z) = -\frac{1}{k} \left[\frac{\mu U_0^2}{2h^2} z^2 - GU_0 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3h} \right) + \frac{G^2}{4\mu} \left(\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{3} \right) \right] + C_3 z + C_4. \quad (50)$$

Граничное условие $T(0) = T_0$ дает $C_4 = T_0$. Граничное условие при $z = h$ позволяет выразить C_3 :

$$T(h) = -\frac{1}{k} \left[\frac{\mu U_0^2}{2} - \frac{GU_0 h^2}{6} + \frac{G^2 h^4}{24\mu} \right] + C_3 h + T_0 = T_1, \quad (51)$$

откуда

$$C_3 = \frac{1}{h} \left(T_1 - T_0 + \frac{1}{k} \left[\frac{\mu U_0^2}{2} - \frac{GU_0 h^2}{6} + \frac{G^2 h^4}{24\mu} \right] \right). \quad (52)$$

Подстановка постоянной интегрирования (52) и $C_4 = T_0$ в выражение (50) приводит к окончательному выражению для температурного поля:

$$T(z) = T_0 + \frac{z}{h} (T_1 - T_0) - \frac{1}{k} \left[\frac{\mu U_0^2}{2h^2} z^2 - GU_0 \left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3h} \right) + \frac{G^2}{4\mu} \left(\frac{h^2 z^2}{2} - \frac{2hz^3}{3} + \frac{z^4}{3} \right) \right] + \frac{z}{kh} \left[\frac{\mu U_0^2}{2} - \frac{GU_0 h^2}{6} + \frac{G^2 h^4}{24\mu} \right]. \quad (53)$$

Первое слагаемое в выражении (53) описывает линейное распределение температуры, обусловленное теплопроводностью между стенками с фиксированными температурами. Остальные члены представляют собой вклад вязкой диссипации, который всегда повышает температуру в объеме по сравнению с чисто проводящим случаем [39–40].

Гидростатическая компонента давления находится интегрированием уравнения (38) с учетом условия (41):

$$P_0(z) = \rho_0 g \beta \int_0^z T(\zeta) d\zeta. \quad (54)$$

Полное поле давления включает также динамическую компоненту, линейную по x :

$$P(x, z) = P_0(z) - Gx. \quad (55)$$

Таким образом, получено замкнутое аналитическое решение для течения Куэтта – Пуазейля с учетом вязкого нагрева и силы плавучести.

Решение (45), (53), (55) описывает стационарное сдвиговое течение между двумя изотермическими пластинами с учетом диссипативного нагрева и гидростатического перераспределения давления. Полученные профили скорости и температуры удовлетворяют всем уравнениям движения и энергии, а также заданным граничным условиям. При $G = 0$ решение переходит в классическое течение Куэтта с диссипацией, а при $U_0 = 0$ – в модифицированное течение Пуазейля с учетом тепловыделения от вязкого трения.

5. Заключение

В работе получены два класса точных аналитических решений уравнений стационарной конвекции для вязкой несжимаемой жидкости с учетом силы Архимеда и вязкой диссипации. Первый класс выявляет фундаментальное взаимоисключение между продольным температурным градиентом и поперечной неоднородностью скорости: либо температура линейна по x при скорости, зависящей только от z , либо скорость содержит сдвиг по y при изотермическом в продольном направлении поле. Второй класс представляет собой физически значимую реализацию в виде течения Куэтта – Пуазейля между изотермическими пластинами, явно демонстрируя роль диссипативного нагрева и его влияние на температурный профиль и гидростатическое давление. Оба решения полностью самосогласованы, удовлетворяют граничным условиям и могут служить эталонами для верификации численных методов и анализа теплофизических процессов в слоистых течениях.

Литература

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. – 5-е изд. – М. : Физматлит, 2006. – 736 с.
2. Schlichting H., Gersten K. Boundary-Layer Theory. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2017. – 805 p. – DOI: 10.1007/978-3-662-52919-5.
3. Bird R., Stewart W., Lightfoot E. Transport Phenomena. – 2nd ed. – New York : John Wiley and Sons, 2002. – 895 p.
4. Gubareva K. V., Eremin A. V. Numerical solution to the problem of thermal conductivity in a porous plate with a topology of triply periodic minimal surfaces // Advanced Engineering Research (Rostov-on-Don). – 2025. – Vol. 25 (1). – P. 23–31. – DOI: 10.23947/2687-1653-2025-25-1-23-31.
5. Еремин А. В., Губарева К. В., Шульга А. С. Исследование процесса теплопроводности в пластине с внутренними источниками теплоты постоянной мощности // Инженерный вестник Дона. – 2019. – № 6. – URL: <http://www.ivdon.ru/en/magazine/archive/N6y2019/6041>
6. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. – 2-е изд., доп. и перераб. – М. : Физматгиз, 1959. – 699 с.
7. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – Москва : Наука, 1972. – 392 с.
8. Bejan A. Convection Heat Transfer. – 4th ed. – Wiley, 2013. – 704 p.
9. Shah R. K., London A. L. Laminar Flow Forced Convection in Ducts : A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data. – New York : Academic Press, 1978. – 477 p.
10. Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье–Стокса в двумерном случае // Прикладная механика и техническая физика. – 1960. – Т. 1, № 1. – С. 83–90.
11. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1966. – Vol. 7. – P. 43–44. – DOI: 10.1007/BF00914697.
12. Hydrodynamics, Mass and Heat Transfer in Chemical Engineering / A. D. Polyinin, A. M. Kutepov, A. V. Vyazmin, D. A. Kazenin. – CRC Press/Taylor & Francis, 2001. – 408 p. – DOI: 10.1201/9781420024517.
13. Polyinin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations. – Chapman & Hall/CRC, 2004. – 840 p.
14. Mathematical Models of Convection. Seriya: De Gruyter Studies in Mathematical Physics / V. K. Andreev, Ya. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. – Berlin : Walter De Gruyter, 2012. – 417 p. – DOI: 10.1515/9783110258592.
15. Pukhnachov V. V. Hierarchy of models in convection theory // Journal of Mathematical Sciences. – 2004. – Vol. 123. – P. 4607–4620. – DOI: 10.1023/B:JOTH.0000041478.45024.64.

16. Shtern V. Counterflows: Paradoxical Fluid Mechanics Phenomena. – Cambridge : Cambridge University Press, 2012. – 470 p. – DOI: 10.1017/CBO9781139226516.
17. Shtern V. Cellular Flows: Topological Metamorphoses in Fluid Mechanics. – Cambridge : Cambridge University Press. – 2018. – 588 p. – DOI: 10.1017/9781108290579.
18. Papanastasiou T., Georgiou G., Alexandrou A. N. Viscous Fluid Flow. – 2nd ed. – CRC Press, 2021. – 434 p.
19. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. О слоистых свободноконвективных течениях в плоскости // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9, № 4. – С. 651–662.
20. Goncharova O. N., Rezanova E. V. Example of an exact solution of the stationary problem of two-layer flows with evaporation at the interface // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2014. – Vol. 55 (2). – P. 247–257. – DOI:10.1134/S0021894414020072.
21. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8, № 4. – С. 445–455. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
22. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform convective Couette flow // Fluid Dynamics. – 2016. – Vol. 51. – P. 581–587. – DOI: 10.1134/S001546281605001X.
23. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (3). – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
24. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (2). – P. 132–141. – DOI: 10.1134/S0040579516020019.
25. Брацун Д. А., Вяткин В. А., Мухаматуллин А. Р. О точных нестационарных решениях уравнений вибрационной конвекции // Вычислительная механика сплошных сред. – 2017. – Т. 10 (4). – С. 433–444. – DOI: 10.7242/1999-6691/2017.10.4.35.
26. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Analysis of the exact solution for the evaporative convection problem and properties of the characteristic perturbations // International Journal of Thermal Sciences. – 2018. – Vol. 130. – P. 323–332. – DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.05.001.
27. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. The effect of tangential boundary stresses on the convective unidirectional flow of a viscous fluid layer under the lower boundary heating condition // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 4. – P. 44–55. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.4.044-055. – URL: http://dream-journal.org/issues/2019-4/2019-4_262.html
28. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional thermocapillary flows of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition // AIP Conference Proceedings. – 2019. – Vol. 2176 (1). – 030002. – DOI: 10.1063/1.5135126.
29. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53. – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
30. Burmasheva N. V. Prosviryakov E. Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2020. – Vol. 54. – P. 230–239. – DOI: 10.1134/S0040579519060034.
31. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
32. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing binary fluid flows / E. Yu. Prosviryakov, S. A. Mikhailov, O. A. Ledyankina, L. S. Goruleva // Russian Aeronautics. – 2023. – Vol. 66. – P. 500–509. – DOI: 10.3103/S106879982303011X.

33. Prosviryakov E. Yu., Ledyankina O. A., Goruleva L. S. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the flow of multicomponent fluids with internal heat generation // Russian Aeronautics. – 2024. – Vol. 67. – P. 60–69. – DOI: 10.3103/S1068799824010070.
34. Goruleva L. S., Obabkov I. I., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for convective Stokes flows // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2024. – Iss. 2. – P. 36–49. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.2.036-049. – URL: http://dream-journal.org/issues/2024-2/2024-2_437.html
35. Bashurov V. V., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution to the velocity field description for Couette–Poiseuille flows of binary liquids // Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki. – 2024. – Vol. 28 (4). – P. 759–772. – DOI: 10.14498/vsgtu2098.
36. Prosviryakov E. Yu., Ledyankina O. A., Goruleva L. S. A class of exact solutions of magnetic hydrodynamics equations for describing convective flows of multilayer fluids // Russian Aeronautics. – 2024. – Vol. 67. – P. 550–563. – DOI: 10.3103/S1068799824030103.
37. Goruleva L. S., Obabkov I. I., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for describing multilayer fluid flows in the stokes approximation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 2. – P. 6–27. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.2.006-027. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-2/2025-2_504.html
38. Prosviryakov E., Goruleva L., Ledyankina O. A new exact solution of the Navier–Stokes equations for describing the unsteady flows of vertically swirled fluid // Russian Aeronautics. – 2025. – Vol. 68 (2). – P. 393–401. – DOI: 10.3103/S1068799825020151.
39. Goruleva L. S., Obabkov I. I., Prosviryakov E. Yu. – 2024. – Iss. 6. – P. 241–267. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.6.241-267. – URL: http://dream-journal.org/issues/2024-6/2024-6_481.html
40. Просвирыков Е. Ю., Горулева Л. С., Альес М. Ю. Класс точных решений уравнений Обербека–Буссинеска с учетом диссипативной функции Рэлея // Химическая физика и мезоскопия. – 2024. – Т. 26 (2). – С. 164–178. – DOI: 10.62669/17270227.2024.2.15.