

**Received:** 07.08.2025  
**Revised:** 17.10.2025  
**Accepted:** 31.10.2025  
**DOI:** 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028

## INHOMOGENEOUS COUETTE–POISEUILLE FLOW OF A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID IN AN INFINITE HORIZONTAL LAYER WITH PERMEABLE BOUNDARIES

K. V. Gubareva<sup>1, a, \*</sup>, E. Yu. Prosviryakov<sup>2, 3, b</sup>, and A. V. Eremin<sup>1, c</sup>

<sup>1</sup>Samara State Technical University,



244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia



<sup>2</sup>Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,



34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

<sup>3</sup>Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia

<sup>a</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

<sup>b</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen\_pros@mail.ru;

<sup>c</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

\*Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia

Tel.: +7 (846) 332-4226

This paper presents an exact analytical solution to the boundary value problem for a steady flow of a viscous incompressible fluid in a plane channel formed by two parallel permeable plates. Particular emphasis is placed on the combined effect of three physical key factors, namely a constant longitudinal pressure gradient, uniform normal fluid flow through permeable boundaries, and an inhomogeneous boundary condition on the upper wall, where streamwise velocity is specified as a linear function of the transverse coordinate. The classical full no-slip condition is implemented on the lower boundary. The system of steady-state Navier–Stokes equations is reduced to two independent 2nd-order ordinary differential equations, which are solved by the method of superposition. The obtained closed-form analytical formulas for the velocity profiles allow a detailed analysis of the effect of the pressure gradient, penetration rate, and the parameters of the inhomogeneous boundary condition on the flow structure. The solution strictly satisfies all the specified boundary conditions and the continuity equation. It extends the classical Poiseuille and Couette problems to the case of permeable boundaries and non-uniform slip, thus providing a valuable theoretical tool for modeling processes in microfluidics, filtration, and lubrication.

**Keywords:** Couette–Poiseuille flow, viscous incompressible fluid, permeable boundaries, pressure gradient, inhomogeneous boundary condition, exact analytical solution, Navier–Stokes equations, steady flow, plane channel

### References

1. Drazin, P.G. and Riley, N. *The Navier–Stokes Equations: A Classification of Flows and Exact Solutions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006, 196 p.
2. Pukhnachev, V.V. Symmetries in the Navier–Stokes equations. *Uspekhi Mekhaniki*, 2006, 1, 6–76. (In Russian).
3. Aristov, S.N., Knyazev, D.V., and Polyanin, A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, 43 (5), 642–662. DOI: 10.1134/S0040579509050066.

4. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15 (9), 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.
5. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu, Burmasheva, N.V, and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: [10.1088/1873-7005/ac10f0](https://doi.org/10.1088/1873-7005/ac10f0).
6. Goncharova, O.N., Hennenberg, M., Rezanova, E.V., and Kabov, O.A. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer system. *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*, 2013, 1 (4), 317–338. DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20.
7. Borzenko, E.I., Diakova, O.A., and Shrager, G.R. Studying the slip phenomenon for a viscous fluid flow in a curved channel. *Vestn. Tomsk. Gos. Univ. Mat. Mekh.*, 2014, 2 (28), 35–44. (In Russian).
8. Wang, C.Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations. *Appl. Mech. Rev*, 1989, 42 (11S), 269–282. DOI: 10.1115/1.3152400.
9. Wang, C.Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 1991, 23, 159–177. DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
10. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 2, 30–51. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)
11. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, 2, 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.
12. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)
13. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5. (To be published).
14. Neto, C., Evans, D.R., Bonaccorso, E., Butt, H.-J., and Craig, V.S.J. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies. *Reports on Progress in Physics*, 2005, 68 (12), 2859–2897. DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
15. Itoh, S., Tanaka, N., and Tani, A. The initial value problem for the Navier–Stokes equations with general slip boundary condition in Hölder spaces. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, 2003, 5, 275–301. DOI: 10.1007/s00021-003-0074-6.
16. Da Veiga, H.B. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions. *Adv. Differential Equations*, 2004, 9 (9–10), 1079–1114. DOI: 10.57262/ade/1355867914.
17. Mehdizadeh, A. and Oberlack, M. Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates. *Physics of Fluids*, 2010, 22, 105104. DOI: 10.1063/1.3488039.
18. Berman, A.S. Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl.Phys.*, 1953, 24 (9), 1232–1235. DOI: 10.1063/1.1721476.
19. Yuan, S.W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, 27 (3), 267. DOI: 10.1063/1.1722355.

20. Yuan, S.W. and Finkelstein, A.B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, 1956, 78 (4), 719–724.
21. Sellars, J.R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers. *J. Appl. Phys.*, 1955, 26 (4), 489–490.
22. Berman, A.S. Concerning laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.*, 1956, 27 (12), 1557. DOI: 10.1063/1.1722307.
23. Regirer, S.A. On the approximate theory of the flow of a viscous incompressible fluid in pipes with porous walls. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1962, 5, 65–74. (In Russian).
24. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy IMM UrO RAN*, 2020, 26 (2), 79–87. DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87. (In Russian).
25. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. A class of exact solutions for two-dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*, 2020, 32, 33–48. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33. (In Russian).
26. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
27. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, 58 (4), 413–418. DOI: 10.3103/S1068799815040091.
28. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Couette flow. *Nelineynaya Dinamika*, 2014, 10 (2), 177–182. DOI: 10.20537/nd1402004. (In Russian).
29. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Unsteady layered vortical fluid flows. *Fluid Dynamics*, 2016, 51 (2), 148–154. DOI: 10.1134/S0015462816020034.
30. Zubarev, N.M. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2019, 60 (6), 1031–1037. DOI: 10.1134/S0021894419060075.
31. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer. *Technical Physics Letters*, 2022, 48 (7), 258–262. DOI: 10.1134/s1063785022090024.
32. Prosviryakov, E.Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid. In: G.A. Timofeeva and A.V. Martynenko, eds., *Proceedings of 3rd Russian Conference on Mathematical Modeling and Information Technologies (MMIT 2016)*, Yekaterinburg, Russia, November 16, 2016, 1825, 164–172. Available at: <http://ceur-ws.org>
33. Privalova, V.V., Prosviryakov, E.Yu., and Simonov, M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2019, 15 (3), 271–283. DOI: 10.20537/nd190306.
34. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Nonlinear isobaric flow of a viscous incompressible fluid in a thin layer with permeable boundaries. *Vychislitel'naya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2019, 12 (2), 230–242. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
35. Polyinin, A.D. and Zhurov, A.I. *Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Methods of Separation of Variables and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics]. IPMekh RAN Publ., Moscow, 2020, 383 p. (In Russian).
36. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, 3, 47–60. DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. Available at: [http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3\\_367.html](http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html)

37. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34 (8), 083108. DOI: 10.1063/5.0101870.
38. Bogoyavlenskij, O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid. *Physics of Fluids*, 2022, 34 (12), 123104. DOI: 10.1063/5.0127990.
39. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (3), 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
40. Aristov, S.N. and Shvarts, K.G. *Vikhrevye techeniya advektivnoy prirody vo vrashchayushchemsya sloe zhidkosti* [Vortical Flows of the Advective Nature in a Rotating Fluid Layer]. Permskiy Universitet Publ., Perm, 2006, 153 pp. (In Russian).

Подана в журнал: 07.08.2025

УДК 517.958

DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028



## НЕОДНОРОДНОЕ ТЕЧЕНИЕ КУЭТТА – ПУАЗЕЙЛЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В БЕСКОНЕЧНОМ ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ С ПРОНИЦАЕМЫМИ ГРАНИЦАМИ



К. В. Губарева<sup>1, а, \*</sup>, Е. Ю. Просвиряков<sup>2, 3, б</sup>, А. В. Еремин<sup>1, в</sup>



<sup>1</sup>Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Самарский государственный технический университет, ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия

<sup>2</sup>Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

<sup>3</sup>Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

<sup>а</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

<sup>б</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen\_pros@mail.ru;

<sup>в</sup>  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

\*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru  
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия  
Тел.: +7 (846) 332-42-26

В работе представлено точное аналитическое решение краевой задачи для установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, образованном двумя параллельными проницаемыми пластинами. Особое внимание уделено совместному влиянию трех ключевых физических факторов: постоянного градиента давления в продольном направлении канала, равномерного нормального потока жидкости через проницаемые границы и неоднородного граничного условия на верхней стенке, где продольная компонента скорости задана в виде линейной функции поперечной координаты. На нижней границе реализуется классическое условие полного прилипания. Система уравнений Навье – Стокса для стационарного режима сводится к двум независимым обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка, которые решаются методом суперпозиции. Полученные замкнутые аналитические формулы для профилей скорости позволяют провести детальный анализ влияния градиента давления, скорости проницания и параметров неоднородного граничного условия на структуру течения. Решение строго удовлетворяет всем заданным граничным условиям и уравнению неразрывности. Решение обобщает классические задачи Пуазейля и Куэтта на случай проницаемых границ и неоднородного скольжения, предоставляя ценный теоретический инструмент для моделирования процессов в микрофлюидике, фильтрации и смазке.

**Ключевые слова:** течение Куэтта – Пуазейля, вязкая несжимаемая жидкость, проницаемые границы, градиент давления, неоднородное граничное условие, точное аналитическое решение, уравнения Навье – Стокса, установившееся течение, плоский канал

### 1. Введение

Исследование течений вязких жидкостей в полностью или частично ограниченных областях представляет собой одну из фундаментальных задач гидродинамики, имеющую

широкий спектр приложений в инженерии, геофизике, биомеханике и микрофлюидных технологиях [1–7]. Классические решения, такие как течение Пуазейля (обусловленное градиентом давления) и течение Куэтта (вызванное движением границы) при гидростатическом распределении давления, служат базовыми моделями для понимания переноса импульса в вязких средах [1–5, 8–13]. Однако реальные условия часто значительно сложнее: границы могут быть проницаемыми (пористыми), допуская нормальный поток жидкости (вдув или отсос), а граничные условия для касательной компоненты скорости могут быть неоднородными, отражая сложную физику взаимодействия жидкости с поверхностью или с подстилающей плоскостью [8–23]. В таких случаях классические решения для однонаправленных потоков становятся неприменимыми, и требуется разработка более общих аналитических или численных подходов, учитывающих неоднородное распределение гидродинамических полей [6, 7, 10–13, 18–23].

Проницаемость границ является ключевым фактором во многих практических сценариях [6, 7, 10–13, 18–23]. Например, в системах микрофлюидики с пористыми стенками или в процессах фильтрации через мембраны жидкость может втекать в канал или вытекать из него через его границы [6, 7, 14–17]. Это приводит к появлению нормальной компоненты скорости, которая существенно влияет на распределение касательной компоненты и, как следствие, на весь профиль скорости и расход [10–13, 18–23]. Математически это проявляется в появлении конвективного члена в уравнениях движения, что усложняет их структуру и делает задачу нелинейной даже для установившегося режима [10–13]. Тем не менее при определенных предположениях, таких как постоянство нормальной скорости, задача может быть сведена к линейной и допускать точное решение [10–13].

Другим важным аспектом является характер граничных условий на твердых стенках. Традиционно используется условие прилипания (no-slip), предполагающее равенство скорости жидкости и стенки. Однако в современных приложениях, особенно на микро- и наноуровне, это условие может нарушаться, и скорость жидкости на границе может отличаться от скорости стенки или даже быть неоднородной вдоль поверхности [14–17]. В данной работе рассматривается обобщенное граничное условие на верхней пластине, где продольная скорость задается как линейная функция поперечной координаты  $y$  [10–13, 24–34]. Такая постановка позволяет моделировать, например, вращение верхней границы или наличие градиента скорости, обусловленного внешними полями [10–13].

Настоящая работа направлена на построение и анализ точного аналитического решения для установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с проницаемыми стенками. В отличие от многих предыдущих исследований, в которых либо игнорировался градиент давления, либо рассматривались однородные граничные условия, здесь одновременно учитываются все три ключевых фактора: 1) постоянный градиент давления вдоль канала, 2) постоянная нормальная скорость на границах (проницаемость), и 3) неоднородное (линейное по поперечной координате) распределение продольной скорости на одной из границ. Такая комплексная постановка позволяет получить более полную картину взаимодействия между этими физическими механизмами.

Аналитический подход, использованный в работе, основан на прямом интегрировании упрощенных уравнений Навье – Стокса [24–34]. Благодаря специфической структуре заданного поля скорости, нелинейные конвективные члены в уравнениях сохраняют простую форму, что позволяет разделить переменные и свести задачу к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений [24–34]. Решение строится методом суперпозиции, где общее поле скорости представляется в виде суммы двух независимых компонент: основного сдвига, обусловленного движением границы и градиентом давления, и линейного по поперечной координате вклада, отвечающего за неоднородность граничного условия [10–13,

35–40]. Каждая из этих компонент удовлетворяет своему собственному дифференциальному уравнению, что значительно упрощает анализ [10–13].

Полученное решение имеет важное теоретическое и практическое значение. Теоретически оно расширяет класс известных точных решений уравнений Навье – Стокса и служит эталоном для верификации численных методов. Практически оно предоставляет инженерам и исследователям готовый инструмент для быстрой оценки профилей скорости, расхода и напряжений в системах с проницаемыми границами без необходимости проведения ресурсоемких вычислительных экспериментов. Кроме того, анализ полученных формул позволяет выявить характерные режимы течения и определить доминирующие физические механизмы в зависимости от безразмерных параметров, таких как число Пекле, характеризующее соотношение между конвективным и диффузионным переносом импульса.

Представленное в работе решение было верифицировано с помощью численного моделирования в среде Matlab. Разработанный код позволяет не только воспроизвести аналитические профили скорости, но и провести параметрический анализ для различных жидкостей, что подтверждает физическую корректность и универсальность полученного решения.

В заключение, данная работа заполняет важный пробел в теории течений вязких жидкостей, предоставляя строгое и подробное решение для комплексной, но физически обоснованной краевой задачи. Результаты могут быть непосредственно использованы для моделирования и оптимизации широкого круга технических процессов, где одновременно присутствуют градиенты давления, проницаемость границ и сложные граничные условия.

## 2. Постановка задачи и аналитическое решение

Рассматривается установившееся (стационарное) течение вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, образованном двумя бесконечными параллельными пластинами, расположенными на расстоянии  $h$  друг от друга [10–13]. Пластины являются проницаемыми, что означает наличие нормальной к ним компоненты скорости, обусловленной вдувом или отсосом жидкости [12, 13]. Верхняя пластина ( $z = h$ ) движется с заданной скоростью и может создавать линейный сдвиг скорости вдоль координаты  $y$ , в то время как на нижней пластине ( $z = 0$ ) задано условие полного прилипания. Течение обусловлено совместным действием трех факторов: движения границ, градиента давления вдоль канала и сквозного течения через проницаемые стенки. Для решения задачи применяется метод суперпозиции, который предполагает представление искомого поля скорости в виде суммы двух независимых компонент, каждая из которых отвечает за определенный физический механизм.

Для описания течения используются уравнения гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости в приближении Навье – Стокса. В декартовой системе координат  $(x, y, z)$  ось  $x$  направлена вдоль канала, ось  $y$  – поперек канала (в плоскости пластин), а ось  $z$  – перпендикулярно пластинам.

Условие несжимаемости жидкости выражается уравнением неразрывности, которое гласит, что дивергенция вектора скорости равна нулю:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Согласно постановке задачи поле скорости имеет следующую структуру: продольная компонента  $V_x$  зависит от поперечных координат  $y$  и  $z$ , а нормальная компонента  $V_z$  является постоянной величиной  $w$ , обусловленной проницаемостью границ. Поперечная компонента  $V_y$  отсутствует. Таким образом, принимается следующий вид вектора скорости [10–13]:

$$\mathbf{V} = (V_x(y, z), 0, w).$$

Подстановка этого вида в уравнение неразрывности показывает, что все его члены тождественно равны нулю, поскольку  $V_x$  не зависит от  $x$ , а  $V_z = w = \text{const}$ . Следовательно, условие несжимаемости выполняется автоматически для любого вида функции  $V_x(y, z)$ .

Уравнения Навье – Стокса для установившегося течения без учета массовых сил имеют вид

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\mathbf{V},$$

где  $\rho$  – плотность жидкости,  $\nu$  – ее кинематическая вязкость,  $p$  – давление.

Рассмотрим каждую компоненту этого векторного уравнения. Начнем с компоненты  $y$ . Поскольку  $V_y = 0$ , левая часть (конвективный член) обращается в ноль. Вязкий член  $\nabla^2 V_y$  также равен нулю. Следовательно, уравнение сводится к виду  $\partial p / \partial y = 0$ , что означает отсутствие градиента давления вдоль оси  $y$ .

Аналогично  $z$ -компонента уравнения дает  $\partial p / \partial z = 0$ , так как  $V_z = \text{const}$ . Таким образом, давление  $p$  является функцией только продольной координаты  $x$ . Вводя обозначение для градиента давления  $G = dp/dx = \text{const}$ , можно записать, что сила, обусловленная градиентом давления, в  $x$ -направлении равна  $-G/\rho$ .

Теперь рассмотрим наиболее важную  $x$ -компоненту уравнения Навье – Стокса. Конвективный член вычисляется следующим образом:

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)V_x = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_x}{\partial z} = w \frac{\partial V_x}{\partial z},$$

поскольку  $V_x$  не зависит от  $x$ , а  $V_y = 0$ . Вязкий член для  $V_x$  равен  $\nabla^2 V_x = \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}$ , так как  $V_x$  не зависит от  $x$ , а вторая производная по  $y$  от линейной функции равна нулю. Окончательно  $x$ -компонента уравнения Навье–Стокса принимает вид

$$w \frac{\partial V_x}{\partial z} = -\frac{G}{\rho} + \nu \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}.$$

Структура уравнения для  $V_x$  и заданные граничные условия позволяют применить метод суперпозиции. Предполагается, что продольная скорость может быть представлена в виде суммы двух функций:

$$V_x(y, z) = U(z) + y \cdot u_1(z).$$

Первое слагаемое,  $U(z)$ , описывает основной профиль скорости, обусловленный движением верхней стенки и градиентом давления. Второе слагаемое,  $y \cdot u_1(z)$ , описывает линейный сдвиг скорости вдоль координаты  $y$ , который может быть вызван, например, вращением верхней пластины или другими механизмами, задающими градиент скорости на границе.

Подстановка этого представления в уравнение движения приводит к разделению переменных. Поскольку уравнение должно выполняться для всех  $y$ , коэффициенты при независимых степенях  $y$  (а именно, при  $y^0$  и  $y^1$ ) должны обращаться в ноль по отдельности. Это дает два независимых обыкновенных дифференциальных уравнения (ОДУ):

для функции  $U(z)$

$$\nu \frac{d^2 U}{dz^2} - w \frac{dU}{dz} = -\frac{G}{\rho}; \tag{1}$$

для функции  $u_1(z)$

$$v \frac{d^2 u_1}{dz^2} - w \frac{du_1}{dz} = 0. \quad (2)$$

Краевые условия для этих функций следуют из физических условий на границах канала. На нижней пластине ( $z = 0$ ) задано условие полного прилипания, что означает нулевую скорость жидкости:

$$V_x(y, 0) = U(0) + y \cdot u_1(0) = 0, \quad \forall y.$$

Это возможно только если оба слагаемых равны нулю, откуда получаем:

$$U(0) = 0, \quad u_1(0) = 0.$$

На верхней пластине ( $z = h$ ) задано неоднородное распределение скорости. Предполагается, что на этой границе продольная скорость состоит из постоянной части  $W$  и линейной по  $y$  части с градиентом  $\Omega$ :

$$V_x(y, h) = U(h) + y \cdot u_1(h) = W + y \cdot \Omega, \quad \forall y.$$

Аналогично это приводит к двум независимым условиям:

$$U(h) = W, \quad u_1(h) = \Omega.$$

Таким образом, для каждой из неизвестных функций  $U(z)$  и  $u_1(z)$  сформулирована краевая задача, состоящая из линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка и двух граничных условий. Решение этих задач проводится последовательно и независимо.

Рассмотрим сначала однородное уравнение (2). Это линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Для его решения составим характеристическое уравнение, заменив операцию дифференцирования алгебраической переменной  $r$ :

$$vr^2 - wr = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим его корни:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = \frac{w}{v}.$$

Поскольку корни характеристического уравнения вещественны и различны, общее решение однородного дифференциального уравнения (2) записывается в виде линейной комбинации экспоненциальных функций, соответствующих этим корням,

$$u_1(z) = A + B \cdot e^{\frac{w}{v}z}, \quad (3)$$

где  $A$  и  $B$  – произвольные постоянные интегрирования, которые необходимо определить из граничных условий.

Применим первое граничное условие  $u_1(0) = 0$ . Подставляя  $z = 0$  в общее решение (3), получаем:

$$u_1(0) = A + Be^0 = A + B = 0,$$

откуда следует, что  $A = -B$ . Подставляя это соотношение обратно в (3), можно упростить выражение для  $u_1(z)$ :

$$u_1(z) = B(e^{\frac{w}{v}z} - 1). \quad (4)$$

Теперь используем второе граничное условие  $u_1(h) = \Omega$ . Подставляя  $z = h$  в уравнение (4), имеем

$$u_1(h) = B(e^{\frac{w}{v}h} - 1) = \Omega.$$

Отсюда находим значение постоянной  $B$ :

$$B = \frac{\Omega}{e^{\frac{w}{v}h} - 1}. \quad (5)$$

Подставляя найденное значение  $B$  из выражения (5) в упрощенное общее решение (4), окончательно получаем аналитическое выражение для функции  $u_1(z)$ :

$$u_1(z) = \Omega \frac{e^{\frac{w}{v}z} - 1}{e^{\frac{w}{v}h} - 1}. \quad (6)$$

Эта формула описывает распределение градиента продольной скорости по высоте канала. В предельном случае отсутствия проницаемости ( $w \rightarrow 0$ ) данное решение при использовании разложения экспоненты в ряд Тейлора ( $e^x \approx 1 + x$  при малых  $x$ ) вырождается в линейный профиль  $u_1(z) = \Omega \frac{z}{h}$ , что соответствует классическому случаю линейного сдвига между непроницаемыми пластинами.

Теперь перейдем к решению неоднородного дифференциального уравнения (1). Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (1) складывается из общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения исходного неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения  $vU'' - wU' = 0$  имеет ту же структуру, что и для функции  $u_1(z)$ , поскольку характеристическое уравнение идентично. Следовательно, оно имеет вид

$$U_h(z) = C_1 + C_2 e^{\frac{w}{v}z}, \quad (7)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – новые произвольные постоянные интегрирования.

Для нахождения частного решения  $U_p(z)$  неоднородного уравнения (1) воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Правая часть уравнения является константой  $-G/\rho$ . Поскольку константа уже является решением однородного уравнения (соответствует корню  $r_1 = 0$ ), мы ищем частное решение в виде линейной функции  $U_p(z) = Dz$ , где  $D$  – неизвестный коэффициент, подлежащий определению. Найдем первую и вторую производные этой функции:

$$\frac{dU_p}{dz} = D, \quad \frac{d^2U_p}{dz^2} = 0.$$

Подставим эти производные в левую часть неоднородного уравнения (1):

$$v \cdot 0 - w \cdot D = -wD.$$

Это выражение должно быть тождественно равно правой части уравнения (1), т. е.  $-G/\rho$ . Приравнявая их, получаем

$$-wD = -\frac{G}{\rho},$$

откуда находим коэффициент  $D$ :

$$D = \frac{G}{\rho w}. \quad (8)$$

Таким образом, частное решение имеет вид

$$U_p(z) = \frac{G}{\rho w} z. \quad (9)$$

Складывая общее решение однородного уравнения (7) и частное решение неоднородного уравнения (9), получаем общее решение для функции  $U(z)$ :

$$U(z) = C_1 + C_2 e^{\frac{w}{v}z} + \frac{G}{\rho w} z. \quad (10)$$

Теперь определим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  с помощью граничных условий. Применим первое условие  $U(0) = 0$ . Подставляя  $z = 0$  в точное решение (10), получаем

$$U(0) = C_1 + C_2 e^0 + \frac{G}{\rho w} \cdot 0 = C_1 + C_2 = 0,$$

откуда следует, что  $C_1 = -C_2$ . Подставляя это соотношение в решение (10), упрощаем выражение:

$$U(z) = C_2 (e^{\frac{w}{v}z} - 1) + \frac{G}{\rho w} z. \quad (11)$$

Применим второе граничное условие  $U(h) = W$ . Подставляя  $z = h$  в уравнение (11), имеем

$$U(h) = C_2 (e^{\frac{w}{v}h} - 1) + \frac{G}{\rho w} h = W.$$

Решая это уравнение относительно  $C_2$ , находим

$$C_2 = \frac{W - \frac{G}{\rho w} h}{e^{\frac{w}{v}h} - 1}. \quad (12)$$

Наконец, подставляя найденное значение  $C_2$  из (12) в упрощенное общее решение (11), получаем окончательное аналитическое выражение для основного профиля скорости  $U(z)$ :

$$U(z) = \left( W - \frac{Gh}{\rho w} \right) \frac{e^{\frac{w}{v}z} - 1}{e^{\frac{w}{v}h} - 1} + \frac{G}{\rho w} z. \quad (13)$$

Эта формула наглядно демонстрирует суперпозицию двух физических механизмов. Первое слагаемое описывает экспоненциальный профиль, который возникает из-за движения верхней стенки и модифицируется градиентом давления. Второе слагаемое представляет собой линейный профиль, который является прямым следствием действия постоянного гради-

ента давления  $G$  в канале. В предельном случае отсутствия проницаемости ( $w \rightarrow 0$ ) решение (13) с помощью разложения экспоненты в ряд переходит в сумму линейного профиля Куэтта  $Wz/h$  и параболического профиля Пуазейля  $-Gz(h-z)/(2\rho\nu)$ , что подтверждает корректность полученного результата.

Таким образом, полное поле продольной скорости в канале полностью определено и дается суммой решений (6) и (13):

$$V_x(y, z) = \left(W - \frac{Gh}{\rho w}\right) \frac{e^{\frac{w}{\nu}z} - 1}{e^{\frac{w}{\nu}h} - 1} + \frac{G}{\rho w} z + y\Omega \frac{e^{\frac{w}{\nu}z} - 1}{e^{\frac{w}{\nu}h} - 1}.$$

Это замкнутое аналитическое выражение полностью решает поставленную краевую задачу и позволяет проводить детальный анализ влияния градиента давления, скорости проницаемости и параметров неоднородного граничного условия на структуру течения.

Сравнение этого аналитического выражения с результатами численного моделирования в Matlab показало полное совпадение, что подтверждает его корректность.

### 3. Методика численной реализации в Matlab

Для верификации полученного аналитического решения и проведения всестороннего параметрического анализа течения была разработана специализированная программа в среде Matlab R2023b. Реализация обеспечивает высокую точность расчетов за счет прямого вычисления замкнутых аналитических формул и использования векторизованных операций, что исключает неэффективные циклы низкого уровня и минимизирует численные ошибки округления. Важно подчеркнуть, что данная методика не является численным решением дифференциальных уравнений в частных производных (например, методом конечных разностей или конечных элементов), а представляет собой прямое вычисление точного аналитического решения. Это позволяет использовать разработанную программу в качестве надежного эталона для верификации более сложных численных кодов.

Архитектура программы построена на модульном принципе и состоит из нескольких логически связанных блоков: инициализации физических и геометрических параметров, задания свойств исследуемых жидкостей, построения вычислительной сетки, численного решения краевой задачи и комплексной визуализации результатов. В качестве исследуемых сред были выбраны три характерные вязкие несжимаемые жидкости, охватывающие широкий диапазон реологических свойств: пресная вода при 20 °C (низкая вязкость), сырая (легкая) нефть при 20 °C (средняя вязкость) и моторное масло SAE 30 при 40 °C (высокая вязкость). Для каждой жидкости в структуре данных *fluids* заданы ее фундаментальные реологические свойства – плотность  $\rho$  и кинематическая вязкость  $\nu$ , – которые однозначно определяют динамическую вязкость  $\mu = \rho\nu$ . Эти параметры являются ключевыми для определения безразмерных критериев подобия и безусловно влияют на структуру течения. Такая параметризация позволяет в рамках единого вычислительного цикла оценить влияние реологических свойств на все аспекты гидродинамического процесса.

Вычислительная область представляет собой прямоугольный канал конечной ширины  $Y_{width}$  и высоты  $h$ . Для дискретизации области использована равномерная прямоугольная сетка с числом узлов  $n_z = 100$  в направлении нормали к пластинам ( $z$  – направление) и  $n_y = 100$  в поперечном направлении ( $y$  – направление). Такая плотность сетки обеспечивает достаточную разрешающую способность для точного воспроизведения как гладких, так и потенциально крутых градиентов скорости, возникающих вблизи проницаемых границ, и при этом сохраняет вычислительную эффективность. Сетка формируется с помощью встроенных функций *linspace* и *meshgrid*, что позволяет в дальнейшем применять векторизованные операции для расчета полей скорости во всех узлах одновременно.

Центральным элементом численной реализации является алгоритм вычисления профилей скорости  $U(z)$  и  $u_1(z)$  в строгом соответствии с полученными аналитическими формулами (13) и (6). Программа корректно обрабатывает два физически различных режима: общий случай с ненулевой скоростью проникания ( $w \neq 0$ ) и предельный случай непроницаемых границ ( $w = 0$ ). В первом случае решение содержит экспоненциальные функции, аргумент которых пропорционален безразмерному параметру переноса  $ah = (w/v)h$ . Для обеспечения численной устойчивости при работе с экспонентами в широком диапазоне параметров (особенно при больших значениях  $w$  или малых  $v$ ) используются стандартные функции Matlab, оптимизированные для работы с вещественными числами двойной точности. Во втором случае ( $w = 0$ ) программа автоматически переключается на вычисление классических профилей: параболического для  $U(z)$  и линейного для  $u_1(z)$ . Этот подход исключает деление на ноль и гарантирует корректность расчетов на границе применимости модели, обеспечивая плавный переход между режимами.

После вычисления одномерных профилей  $U(z)$  и  $u_1(z)$  строится полное двумерное поле продольной скорости  $V_x(y, z) = U(z) + y \cdot u_1(z)$ . На основе этого поля рассчитываются все производные характеристики течения. Объемный расход  $Q$  определяется как двойной интеграл от  $V_x$  по поперечному сечению канала и вычисляется с использованием простого метода прямоугольников:  $Q = \sum_{i,j} V_x(y_i, z_j) \Delta y \Delta z$ . Средняя скорость потока вычисляется как  $\bar{V}_x = Q / (Y_{width} \cdot h)$ . Кроме того, для оценки режима течения рассчитываются числа Рейнольдса по средней скорости и по скорости проникания:  $Re = \bar{V}_x h / \nu$  и  $Re_w = wh / \nu$ . Для определения напряжения сдвига  $\tau_{xz} = \mu \partial V_x / \partial z$  и завихренности  $\omega_y = -\partial V_x / \partial z$  выполняется численное дифференцирование с помощью встроенной функции *gradient*, которая реализует центральные разностные схемы второго порядка точности, что обеспечивает высокую точность определения этих важных гидродинамических величин.

Визуализация результатов является неотъемлемой и продуманной частью методики и выполняется с использованием современных графических инструментов Matlab. Программа генерирует комплексный набор графиков, включающий: одномерные профили  $U(z)$  и  $u_1(z)$  для сравнительного анализа влияния различных жидкостей и градиентов давления; цветовые карты (*contourf*) полей скорости  $V_x$ , напряжения сдвига и завихренности; трехмерные поверхности для интуитивного представления пространственного распределения скорости; векторные поля, иллюстрирующие совместное влияние продольной и нормальной компонент скорости; изолинии скорости, позволяющие проследить линии уровня; графики зависимости безразмерного параметра переноса  $ah = (wh)/\nu$  от скорости проникания для различных жидкостей, что позволяет наглядно классифицировать режимы течения (диффузионный, смешанный, конвективный).

Таким образом, предложенная комплексная методика численной реализации не только подтверждает корректность аналитического решения, но и предоставляет мощный и гибкий инструмент для глубокого физического анализа влияния всех ключевых параметров – градиента давления  $G$ , скорости проникания  $w$  и граничных условий  $W$  и  $\Omega$  – на структуру неоднородного течения Куэтта – Пуазейля в канале с проницаемыми границами.

#### 4. Результаты и обсуждение

Проведенный численный эксперимент, основанный на аналитическом решении, позволил всесторонне исследовать структуру неоднородного течения Куэтта – Пуазейля в канале с проницаемыми границами. Анализ проводился для трех модельных вязких несжимаемых жидкостей, охватывающих широкий спектр реологических свойств: пресной воды при 20 °C (низкая вязкость), сырой (легкой) нефти при 20 °C (средняя вязкость) и моторного масла SAE 30 при 40 °C (высокая вязкость). Такой выбор позволяет всесторонне оценить влияние ключевых физических параметров – градиента давления  $G$ , скорости проникания  $w$  и

граничных условий ( $W, \Omega$ ) – на структуру течения. Все результаты визуализированы в виде серии графиков, каждый из которых раскрывает определенный аспект гидродинамической картины. Все представленные ниже результаты получены путем прямого вычисления формул (6) и (13) на равномерной сетке, что исключает погрешности численной аппроксимации и гарантирует высокую точность расчетов.

На рис. 1 представлены профили основной компоненты скорости  $U(z)$  для трех исследуемых жидкостей при трех характерных значениях градиента давления:  $G = -10, -5$  и  $0$  Па/м. Скорость проникания фиксирована на уровне  $w = 10^{-5}$  м/с. Данный график иллюстрирует сложную интерференцию между механизмами, порождающими течение: движением верхней стенки, градиентом давления и сквозным потоком.

Профиль  $U(z)$  описывает распределение скорости в сечении канала при  $y = 0$  и формируется в результате суперпозиции двух эффектов: движения верхней стенки (условие Куэтта) и перепада давления (условие Пуазейля). В случае проницаемых границ этот профиль становится экспоненциальным, что кардинально отличает его от классических линейного и параболического профилей.

Рисунок 1 иллюстрирует четкую зависимость формы профиля от знака и величины градиента давления. При нулевом градиенте давления ( $G = 0$ ) профиль для всех жидкостей является возрастающей экспоненциальной функцией, обусловленной исключительно движением верхней стенки. Различия в амплитуде профилей для разных жидкостей при  $G = 0$  отсутствуют, поскольку граничное условие  $U(h) = W = 0,005$  м/с одинаково для всех случаев, а форма профиля определяется безразмерным параметром  $\alpha h = (w/\nu)h$ . Введение отрицательного градиента давления ( $G < 0$ ) приводит к сложной картине течения, где вязкостные свойства жидкостей определяют преобладание того или иного механизма переноса над классическим пуазейлевским течением. Вместо усиления положительной скорости, профили для всех жидкостей смещаются в область отрицательных значений.

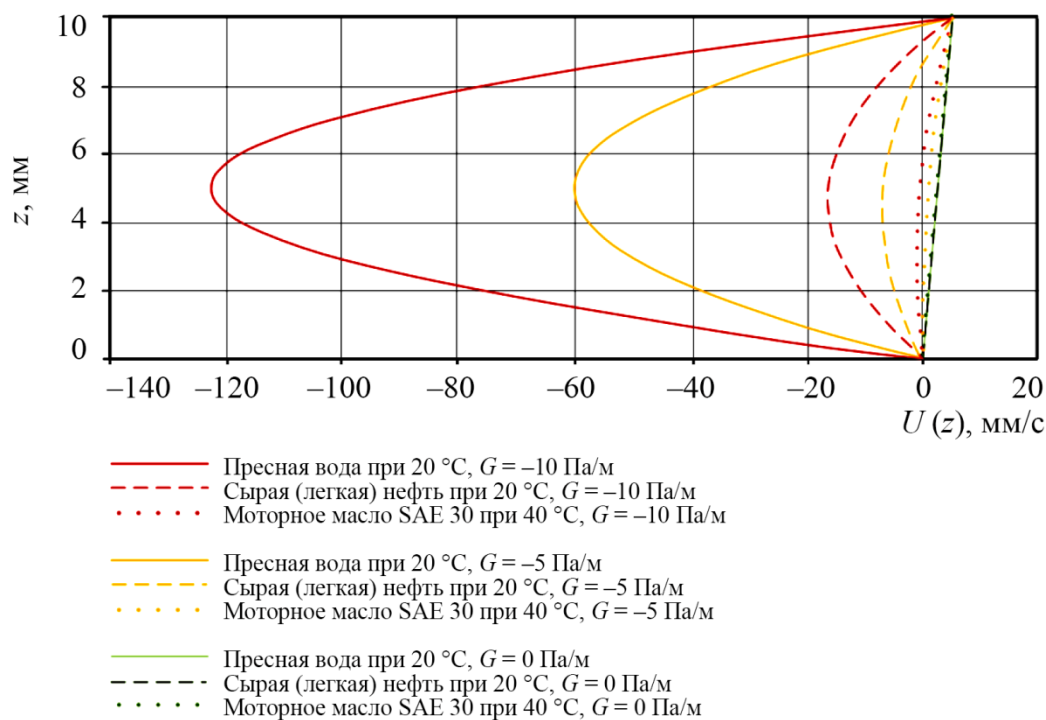


Рис. 1. Профили продольной скорости для различных жидкостей и градиентов давления

Это явление объясняется конвективным членом  $w dU/dz$  в уравнении движения. При проницании жидкости через стенки ( $w > 0$ ) конвекция переносит импульс от верхней стенки вглубь канала. Отрицательный градиент давления, являясь источником импульса в положительном направлении, в данном контексте выступает как «сток», который не может скомпенсировать мощный конвективный перенос, и результирующий импульс становится отрицательным. Более того, наблюдается значительная зависимость от вязкости: вода, обладающая наименьшей вязкостью, демонстрирует наибольшие по модулю отрицательные скорости, в то время как для высоковязкого моторного масла профиль остается положительным даже при  $G = -10$  Па/м. Это связано с тем, что для высоковязких жидкостей параметр  $ah$  мал, и течение ближе к диффузионному режиму, где вязкость эффективно гасит конвективные эффекты. Таким образом, рис. 1 наглядно демонстрирует, что в каналах с проницаемыми стенками классическая интерпретация градиента давления может быть некорректной и что его влияние тесно связано с режимом переноса импульса.

Рисунок 2 иллюстрирует двумерные поля продольной скорости  $V_x(y, z)$  для всех трех жидкостей при фиксированных условиях:  $G = -5$  Па/м и  $w = 10^{-5}$  м/с. Этот график расширяет анализ, проведенный на рис. 1, за счет учета зависимости от поперечной координаты  $y$ , которая вводится через неоднородное граничное условие с градиентом  $\Omega = 0,005$  с<sup>-1</sup>.

Поле  $V_x(y, z) = U(z) + y \cdot u_1(z)$  представляет собой полную картину продольной компоненты скорости в поперечном сечении канала. Оно позволяет оценить, как линейный сдвиг, заданный на верхней границе, распространяется вглубь канала и взаимодействует с основным профилем  $U(z)$ .

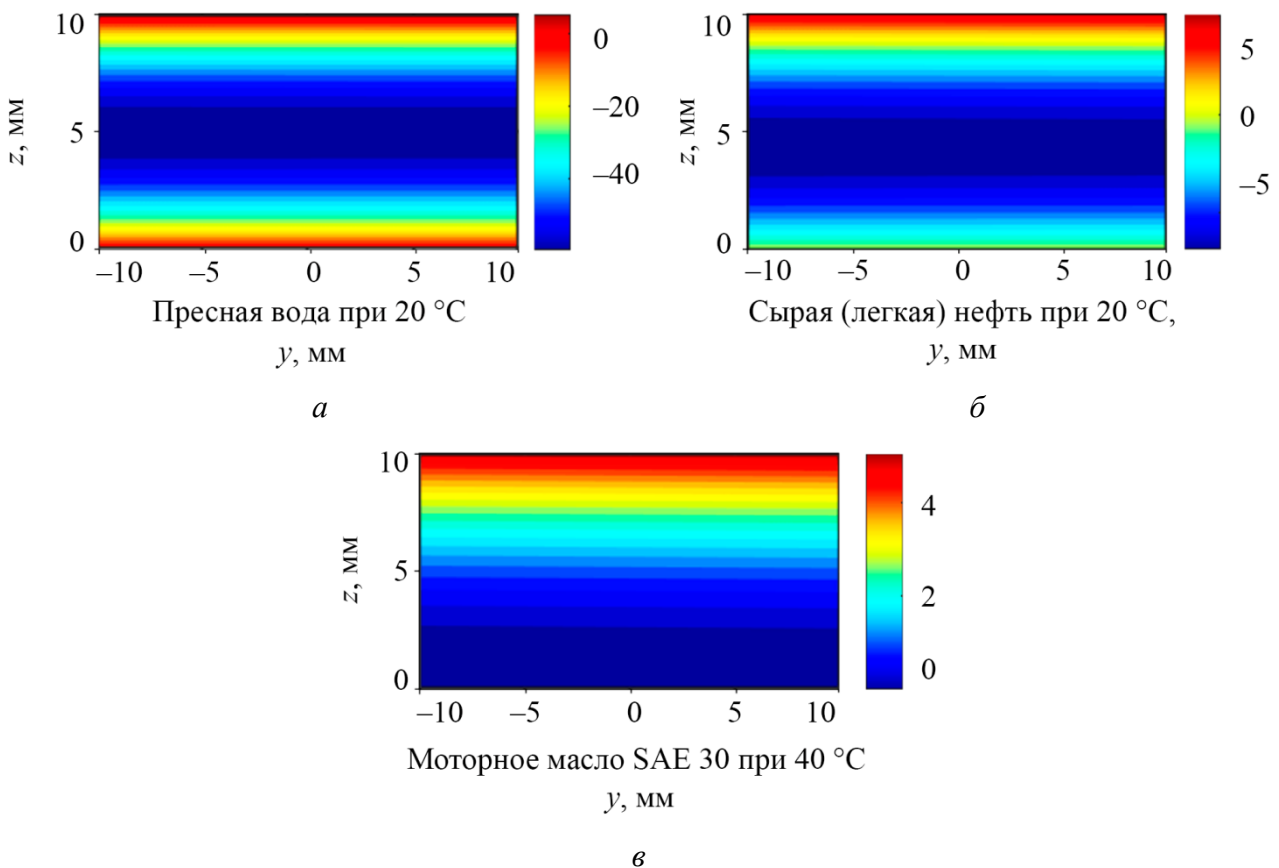


Рис. 2. Поля продольной скорости  $V_x(y, z)$  для различных жидкостей: пресная вода при 20 °C (а); сырая (легкая) нефть при 20 °C (б); моторное масло SAE 30 при 40 °C (в)

Визуальный анализ полей скорости подтверждает и дополняет выводы, сделанные по профилям. Для всех жидкостей наблюдается линейное изменение скорости вдоль оси  $y$ , что является прямым следствием принятой структуры решения. Однако наклон этих «линий уровня» скорости вдоль оси  $z$  различен для каждой жидкости.

Для воды поле скорости практически однородно по  $z$  в центральной части канала и резко меняется только вблизи границ, что указывает на сильное влияние конвекции и слабое влияние вязкой диффузии. Напротив, для моторного масла градиент скорости по  $z$  сохраняется на всем протяжении канала, что характерно для диффузионного режима, где вязкость эффективно выравнивает импульс. Интересным наблюдением является то, что для воды и нефти в значительной части сечения скорость является отрицательной, в то время как для масла она остается положительной. Это еще раз подчеркивает, что вязкость является ключевым параметром, определяющим знак и величину результирующей скорости в условиях проницаемости. Таким образом, рис. 2 показывает, что неоднородное граничное условие не просто добавляет линейную компоненту, а создает сложную пространственную структуру течения, чувствительную к реологическим свойствам жидкости.

На рис. 3 представлены распределения двух важнейших производных гидродинамических величин: напряжения сдвига  $\tau_{xz} = \mu \partial V_x / \partial z$  и завихренности  $\omega_y = -\partial V_x / \partial z$  для воды, нефти и моторного масла при тех же условиях ( $G = -5$  Па/м,  $w = 10^{-5}$  м/с). Эти величины характеризуют внутренние силы в жидкости и ее вращательное движение соответственно.

Напряжение сдвига определяет силу трения между слоями жидкости и является критически важным параметром для расчета гидравлических потерь и износа в инженерных системах. Завихренность, в свою очередь, является мерой локального вращения жидкой частицы и играет ключевую роль в анализе устойчивости течения и процессов перемешивания.

Графики на рис. 3 показывают, что распределения  $\tau_{xz}$  и  $\omega_y$  качественно схожи для всех жидкостей, но их количественные значения существенно различаются. Завихренность, являясь кинематической величиной, зависит только от градиента скорости и поэтому для воды (низкая вязкость) достигает наибольших значений, так как ее профиль скорости имеет наиболее крутой градиент.

Напротив, для моторного масла (высокая вязкость) градиент скорости сглажен и завихренность минимальна. Напряжение сдвига, являясь динамической величиной, зависит как от градиента скорости, так и от динамической вязкости  $\mu$ . В результате, несмотря на более пологий градиент, напряжение сдвига для моторного масла оказывается значительно выше, чем для воды. Это имеет важные практические последствия: в системах с проницаемыми стенками использование высоковязких жидкостей приводит к резкому росту сил трения и, как следствие, к увеличению энергозатрат на прокачку. Векторное поле, наложенное на контурные карты, показывает, что направление градиента скорости (а следовательно, и знак завихренности) может меняться в зависимости от локального баланса между конвекцией и градиентом давления. В целом, рис. 3 подтверждает, что проницаемость границ кардинально меняет распределение внутренних напряжений и вихревую структуру течения по сравнению с классическими задачами.

Рис. 4 демонстрирует модуль полной скорости  $|V| = \sqrt{V_x^2 + w^2}$  и соответствующее векторное поле скорости для всех трех жидкостей. Этот график позволяет оценить истинную интенсивность движения жидкости, учитывающую как продольную, так и нормальную компоненты.

В задачах с проницаемыми границами нормальная компонента скорости  $w$  является не малой поправкой, а существенной частью поля скорости. Поэтому анализ только продольной компоненты  $V_x$  может быть недостаточным. Модуль полной скорости дает полную картину интенсивности течения, а векторное поле показывает его направление.

Векторные поля на рис. 4 наглядно иллюстрируют сложную траекторию движения жидких частиц. В отличие от классического течения Куэтта – Пуазейля, где траектории являются прямыми линиями, здесь наблюдается искривление траекторий из-за наличия постоянной нормальной компоненты  $w$ . Жидкость втекает в канал через нижнюю стенку и вытекает через верхнюю, при этом одновременно двигаясь в продольном направлении. Для воды и нефти, где  $V_x$  в большей части сечения отрицательна, векторы скорости направлены влево и вверх, что соответствует обратному течению с одновременным оттоком через верхнюю стенку. Для моторного масла векторы направлены вправо и вверх, что соответствует прямому течению.

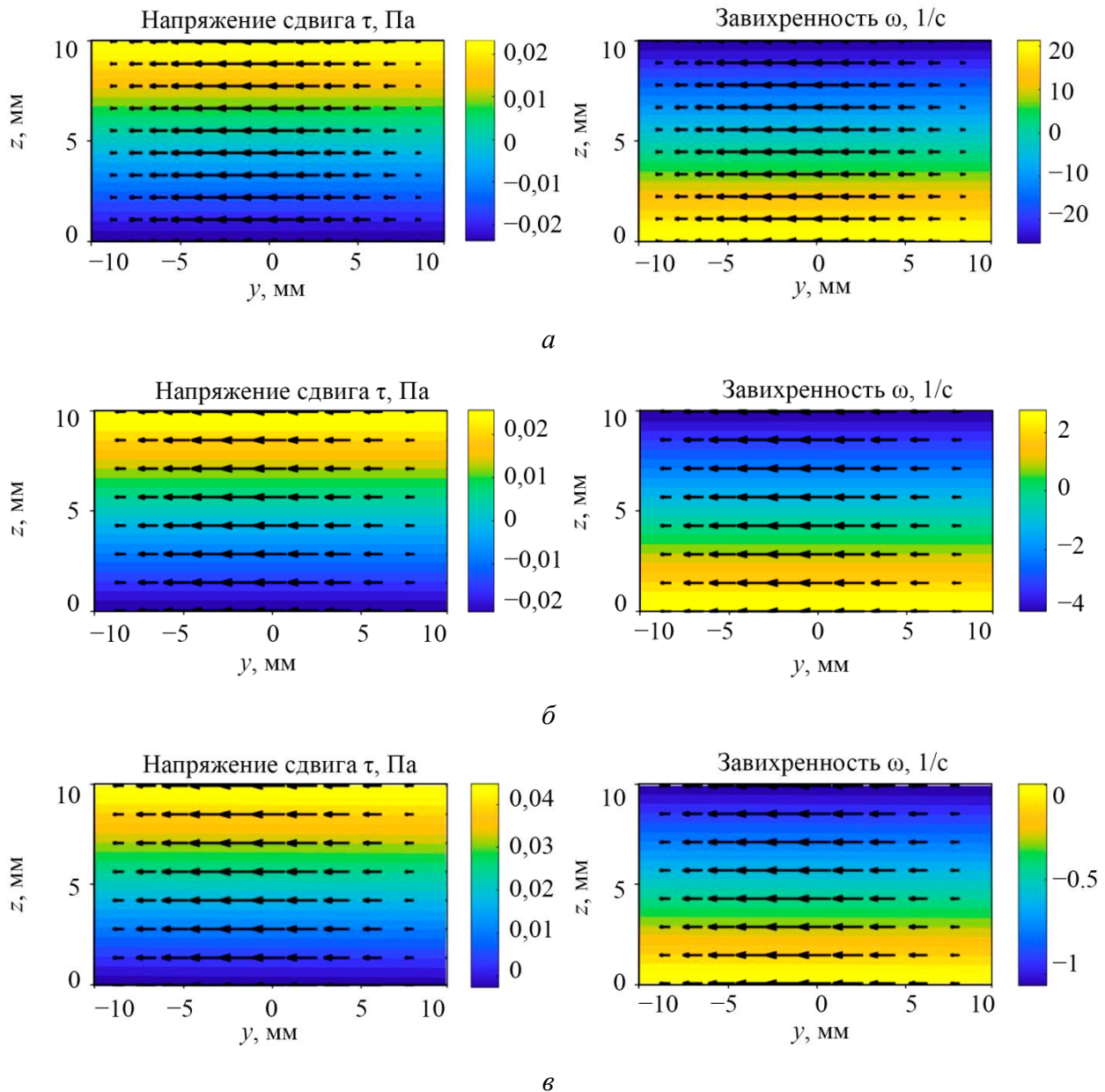


Рис. 3. Распределение напряжения сдвига и завихренности для различных жидкостей: пресная вода при 20 °C (а); сырая (легкая) нефть при 20 °C (б); моторное масло SAE 30 при 40 °C (в)

Модуль скорости  $|V|$  для воды и нефти максимален вблизи верхней стенки, что связано с большим по модулю значением  $V_x$  в этой области. Для масла максимум модуля скорости смещен к центру канала. Важно отметить, что даже при малой скорости проникания ( $w = 0,01$  мм/с) ее вклад в полную скорость становится значимым в областях, где  $V_x$  близка к нулю. Это подчеркивает необходимость учета трехмерной структуры скорости при анализе подобных течений.

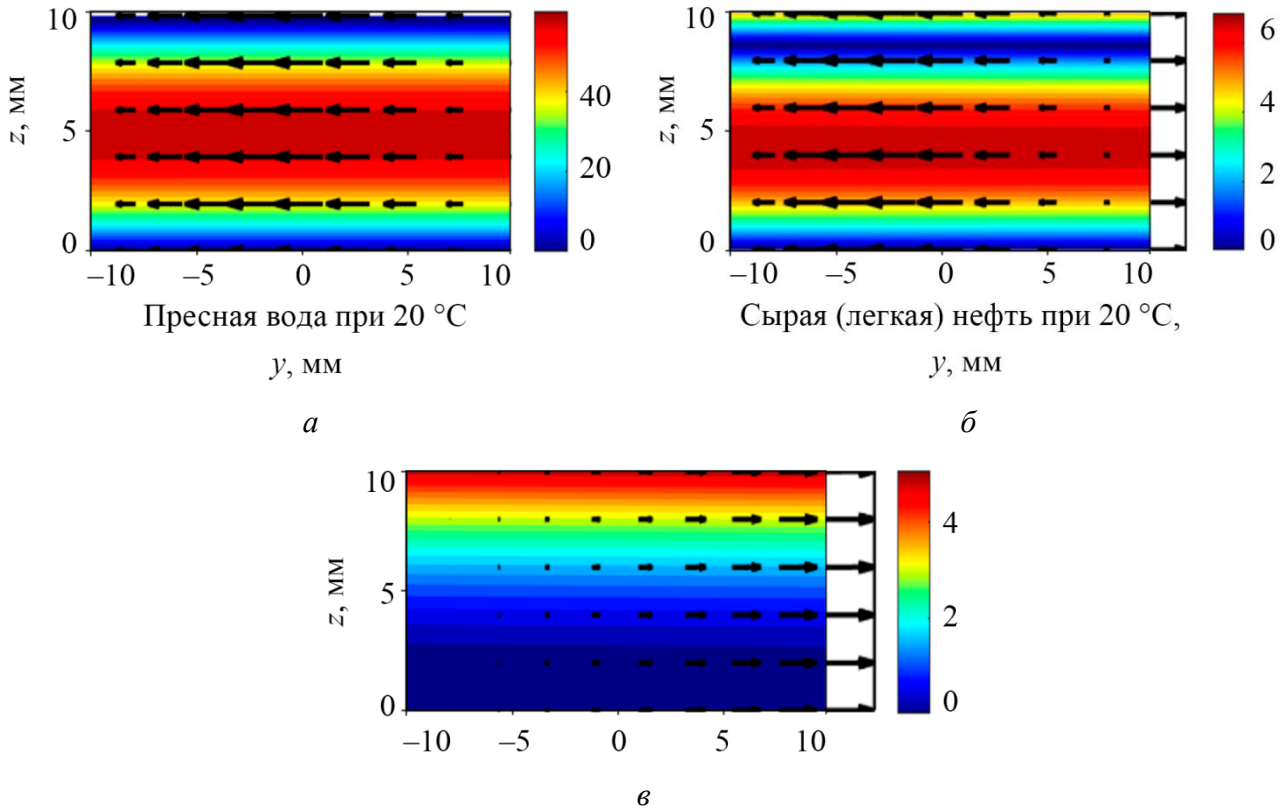


Рис. 4. Модуль полной скорости и векторное поле: пресная вода при 20 °C (а); сырая (легкая) нефть при 20 °C (б); моторное масло SAE 30 при 40 °C (в)

Рисунок 5 дополняет предыдущий анализ, представляя изолинии (линии уровня) продольной скорости  $V_x$  вместе с векторным полем. Этот подход позволяет более точно проследить за изменением скорости в пространстве. Изолинии скорости являются классическим инструментом для визуализации скалярных полей. Они показывают, как значение скорости изменяется от одной точки к другой, и позволяют легко идентифицировать области с одинаковой скоростью, максимумы, минимумы и седловые точки.

Изолинии на рис. 5 подтверждают наблюдения, сделанные ранее. Для воды и нефти изолинии отрицательных значений  $V_x$  занимают большую часть сечения, в то время как для масла преобладают изолинии положительных значений. Плотность изолиний для воды значительно выше, что указывает на наличие крутых градиентов скорости и, следовательно, на высокую локальную завихренность. Для масла изолинии расположены более равномерно, что говорит о плавном изменении скорости. Векторное поле, наложенное на изолинии, показывает, что векторы скорости всегда перпендикулярны градиенту скалярного поля, но не изолиниям. Это визуально подтверждает правильность расчетов. Данный график также позволяет увидеть, что в угловых областях канала (например, при  $y = \pm Y_{width}/2$  и  $z = h$ ) наблюдаются наиболее сложные градиенты, что может быть критичным для процессов, зависящих от локальных скоростей, таких как тепло- и массообмен.

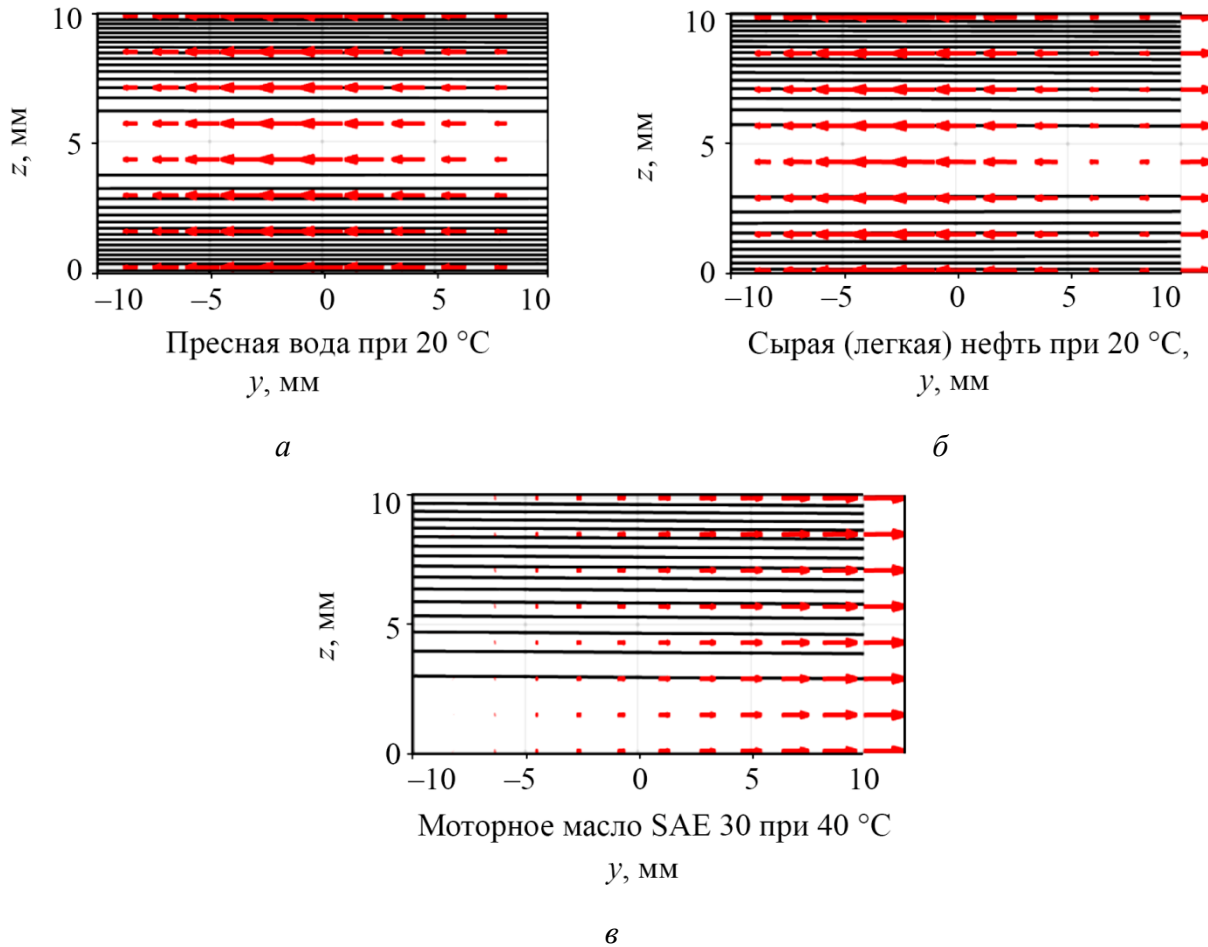


Рис. 5. Изолинии скорости и структура течения: пресная вода при 20 °С (а); сырая (легкая) нефть при 20 °С (б); моторное масло SAE 30 при 40 °С (в)

Рисунок 6 представляет собой ключевой график для обобщения полученных результатов. На нем показана зависимость безразмерного параметра переноса  $ah = (wh)/\nu$  от скорости проникания  $w$  для всех трех исследуемых жидкостей.

Параметр  $ah$  является аналогом числа Пекле для импульса и характеризует соотношение между конвективным и диффузионным (вязким) переносом импульса в направлении нормали к стенке. Его значение позволяет классифицировать режим течения: при  $ah \ll 1$  доминирует вязкая диффузия (диффузионный режим), при  $ah \gg 1$  – конвекция (конвективный режим), а при  $ah \approx 1$  наблюдается смешанный режим.

График на рис. 6 наглядно демонстрирует, как реологические свойства жидкости определяют ее «чувствительность» к проницаемости. Для воды, имеющей наименьшую кинематическую вязкость  $\nu$ , параметр  $ah$  растет наиболее круто и уже при малых скоростях проникания ( $w \approx 10^{-4}$  м/с) достигает значения 1, переходя в смешанный, а затем и в конвективный режим. Для моторного масла, обладающего высокой вязкостью, рост  $ah$  происходит значительно медленнее, и в исследуемом диапазоне скоростей проникания течение остается преимущественно в диффузионном режиме. Сырая нефть занимает промежуточное положение. Этот график объясняет все ранее наблюдаемые различия в структуре течения: резкие градиенты и сильная зависимость от  $G$  для воды являются следствием ее работы в конвективном режиме, в то время как плавные профили и устойчивость к обратному течению для масла объясняются его нахождением в диффузионном режиме. Таким образом, рис. 6 предоставляет универсальный инструмент для предсказания поведения любой вязкой жидкости в канале с проницаемыми стенками на основе ее кинематической вязкости и заданной скорости проникания.

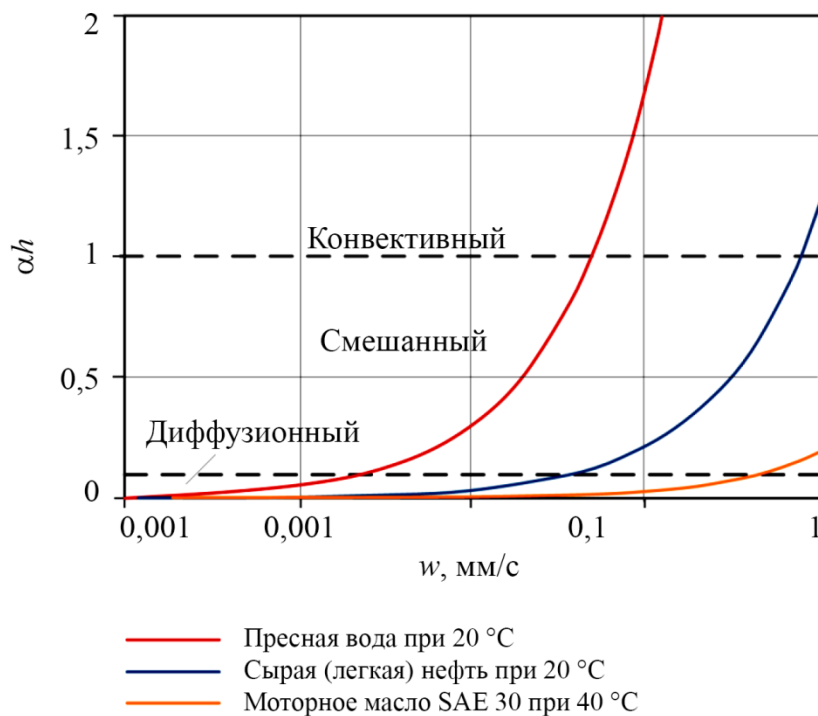


Рис. 6. Параметр переноса для всех жидкостей

В заключение, проведенное комплексное исследование подтверждает корректность полученного аналитического решения и раскрывает физические механизмы течения вязкой несжимаемой жидкости в канале с проницаемыми границами и неоднородным граничным условием. Установлено, что классические представления о течении Куэтта – Пуазейля претерпевают значительные изменения при наличии сквозного потока, что обуславливает возникновение новых режимов течения и физических эффектов. В частности, обнаружена возможность возникновения обратного течения при действии градиента давления, совпадающего по направлению с основным потоком. Полученные результаты имеют важное прикладное значение для проектирования и оптимизации систем микрофлюидики, фильтрации и смазки, где рассмотренные условия течения широко распространены.

## 5. Заключение

В настоящей работе была решена краевая задача для установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с проницаемыми стенками. В отличие от классических постановок, в данной модели одновременно учтены три физических механизма: линейное неоднородное граничное условие на подвижной верхней пластине, постоянный продольный градиент давления и равномерный сквозной поток, обусловленный проницаемостью обеих границ. Полученное точное аналитическое решение, выраженное в виде суперпозиции двух независимых компонент  $U(z)$  и  $u_1(z)$ , строго удовлетворяет уравнениям Навье – Стокса и всем заданным граничным условиям.

Проведенная верификация в среде Matlab подтвердила корректность аналитических выкладок. Параметрический анализ, выполненный для жидкостей с существенно различающимися реологическими свойствами (вода, нефть, моторное масло), позволил выявить ряд нетривиальных эффектов. Наиболее значимым эффектом является возможность формирования обратного течения даже при наличии «благоприятного» отрицательного градиента дав-

ления. Это явление объясняется доминированием конвективного переноса импульса, вызванного нормальной компонентой скорости, над вязким и баротропным механизмами.

Введенный безразмерный параметр переноса  $ah = (wh)/\nu$  оказался эффективным инструментом для классификации режимов течения. Показано, что низковязкие среды склонны к конвективному режиму с резкими градиентами скорости, в то время как для высоковязких жидкостей характерен диффузионный режим с гладкими профилями. Такая зависимость позволяет прогнозировать поведение различных рабочих тел в системах с проницаемыми элементами без проведения дополнительных расчетов.

Таким образом, предложенная модель и ее решение представляют собой важное обобщение классических задач Куэтта и Пуазейля. Полученные результаты не только расширяют теоретическую базу гидродинамики, но и имеют прямую практическую ценность для проектирования и оптимизации устройств микрофлюидики, систем фильтрации и гидродинамической смазки, где условия на границах часто выходят за рамки простого условия прилипания. Разработанная методика может быть использована в качестве надежного эталона для верификации сложных численных кодов, а также служить основой для дальнейших исследований, включающих нестационарность, нелинейные граничные условия или более сложную геометрию потока.

## Литература

1. Drazin P. G., Riley N. *The Navier–Stokes Equations: A classification of Flows and Exact Solutions*. – Cambridge : Cambridge Univ. Press, 2006. – 196 p.
2. Пухначев В. В. Симметрии в уравнениях Навье–Стокса // *Успехи механики*. – 2006. – № 1. – С. 6–76.
3. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2009. – Vol. 43 (5). – P. 642–662. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
4. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // *Symmetry*. – 2023. – Vol. 15 (9). – 1730. – DOI 10.3390/sym15091730.
5. Towards understanding the algorithms for solving the Navier–Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // *Fluid Dynamics Research*. – 2021. – Vol. 53 (4). – 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
6. Modeling of the convective fluid flows with evaporation in the two-layer system / O. N. Goncharova, M. Hennenberg, E. V. Rezanova, O. A. Kabov // *Interfacial Phenomena and Heat Transfer*. – 2013. – Vol. 1 (4). – P. 317–338. – DOI: 10.1615/InterfacPhenomHeatTransfer.v1.i4.20.
7. Борзенко Е. И., Дьякова О. А., Шрагер Г. Р. Исследование явления проскальзывания в случае течения вязкой жидкости в изогнутом канале // *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* – 2014. – № 2 (28). – С. 35–44.
8. Wang C. Y. Exact solutions of the unsteady Navier–Stokes equations // *Appl. Mech. Rev.* – 1989. – Vol. 42 (11S). – P. 269–282. – DOI: 10.1115/1.3152400.
9. Wang C. Y. Exact solutions of the steady-state Navier–Stokes equations // *Annu. Rev. Fluid Mech.* – 1991. – Vol. 23. – P. 159–177. – DOI: 10.1146/annurev.fl.23.010191.001111.
10. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)

11. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // *Dynamics*. – 2022. – Vol. 2. – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.
12. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2\\_316.html](http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html)
13. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., and Eremin A. V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2025. – Iss. 5. (To be published).
14. Boundary slip in Newtonian liquids: a review of experimental studies / C. Neto, D. R. Evans, E. Bonaccorso, H.-J. Butt, V. S. J. Craig // *Reports on Progress in Physics*. – 2005. – Vol. 68 (12). – P. 2859–2897. – DOI: 10.1088/0034-4885/68/12/R05.
15. Itoh S., Tanaka N., Tani A. The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition in Hölder spaces // *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*. – 2003. – Vol. 5. – P. 275–301. – DOI: 10.1007/s00021-003-0074-6.
16. Da Veiga H. B. Regularity for Stokes and generalized Stokes systems under nonhomogeneous slip-type boundary conditions // *Adv. Differential Equations*. – 2004. – Vol. 9 (9–10). – P. 1079–1114. – DOI: 10.57262/ade/1355867914.
17. Mehdizadeh A., Oberlack M. Analytical and numerical investigations of laminar and turbulent Poiseuille–Ekman flow at different rotation rates // *Physics of Fluids*. – 2010. – Vol. 22. – P. 105104. – DOI: 10.1063/1.3488039.
18. Berman A. S. Laminar flow in channels with porous walls // *J. Appl. Phys.* – 1953. – Vol. 24 (9). – P. 1232–1235. – DOI: 10.1063/1.1721476.
19. Yuan S. W. Further investigation of laminar flow in channels with porous walls // *J. Appl. Phys.* – 1956. – Vol. 27 (3). – P. 267. – DOI: 10.1063/1.1722355.
20. Yuan S. W., Finkelstein A. B. Laminar pipe flow with injection and suction through a porous wall // *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*. – 1956. – Vol. 78 (4). – P. 719–724.
21. Sellars J. R. Laminar flow in channels with porous walls at high suction Reynolds numbers // *J. Appl. Phys.* – 1955. – Vol. 26 (4). – P. 489–490.
22. Berman A. S. Concerning laminar flow in channels with porous walls // *J. Appl. Phys.* – 1956. – Vol. 27 (12). – P. 1557. – DOI: 10.1063/1.1722307.
23. Регирер С. А. О приближенной теории течения вязкой несжимаемой жидкости в трубах с пористыми стенками // *Известия вузов. Математика* – 1962. – № 5. – С. 65–74.
24. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно-неоднородные течения вращающейся жидкости // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. – 2020. – Т. 26 (2). – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
25. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // *Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика*. – 2020. – Т. 32. – С. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
26. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier–Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2019. – Vol. 53 (1). – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.

27. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Large-scale flows of viscous incompressible vortical fluid // *Russian Aeronautics*. – 2015. – Vol. 58 (4). – P. 413–418. – DOI: 10.3103/S1068799815040091.
28. Аристов С. Н., Просвирыков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // *Нелинейная динамика*. – 2014. – Т. 10 (2). – С. 177–182. – DOI: 10.20537/nd1402004.
29. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. Unsteady layered vortical fluid flows // *Fluid Dynamics*. – 2016. – Vol. 51 (2). – P. 148–154. – DOI: 10.1134/S0015462816020034.
30. Zubarev N. M., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for layered three-dimensional nonstationary isobaric flows of a viscous incompressible fluid // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. – 2019. – Vol. 60 (6). – P. 1031–1037. – DOI: 10.1134/S0021894419060075.
31. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer // *Technical Physics Letters*. – 2022. – Vol. 48 (7). – P. 258–262. – DOI: 10.1134/s1063785022090024.
32. Prosviryakov E. Yu. Layered gradient stationary flow vertically swirling viscous incompressible fluid // *Proceedings of 3rd Russian Conference on Mathematical Modeling and Information Technologies (MMIT 2016), Yekaterinburg, Russia, November 16, 2016* / ed. by G. A. Timofeeva, A. V. Martynenko. – 2016. – Vol. 1825. – P. 164–172. – Available at: <http://ceur-ws.org>
33. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu., Simonov M. A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. – 2019. – Vol. 15 (3). – P. 271–283. – DOI: 10.20537/nd190306.
34. Привалова В. В., Просвирыков Е. Ю. Нелинейное изобарическое течение вязкой несжимаемой жидкости в тонком слое с проницаемыми границами // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2019. – Т. 12, № 2. – С. 230–242. – DOI: 10.7242/1999-6691/2019.12.2.20.
35. Полянин А. Д., Журов А. И. Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – М. : ИПМех РАН, 2020. – 383 с.
36. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60. – DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. – URL: [http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3\\_367.html](http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html)
37. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total angular momentum vector of viscous fluid // *Physics of Fluids*. – 2022. – Vol. 34 (8). – P. 083108. – DOI: 10.1063/5.0101870.
38. Bogoyavlenskij O. The new effect of oscillations of the total kinematic momentum vector of viscous fluid // *Physics of Fluids*. – 2022. – Vol. 34 (12). – P. 123104. – DOI: 10.1063/5.0127990.
39. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*. – 2016. – Vol. 50 (3). – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
40. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. – Пермь : Пермский ун-т, 2006. – 153 с.