

Received: 09.12.2025

Revised: 16.05.2026

Accepted: 05.06.2026

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.3.049-063

MICROPOLAR EFFECTS AND ENERGY DISSIPATION IN A THREE-DIMENSIONAL FLOW OF A MICROPOLAR FLUID IN A CUBIC CAVITY

K. V. Gubareva^{1, a, *}, E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}, and A. V. Eremin^{1, c}

¹Samara State Technical University,

244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia

²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,

34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia

^a  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^b  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^c  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

*Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia

Tel.: +7 (846) 332-4226

This paper presents a comprehensive study of energy dissipation mechanisms and micropolar effects in a three-dimensional flow of a micropolar fluid within a cubic cavity. Emphasis is laid on the analysis of different dissipation components, namely classical viscous dissipation, dissipation due to micro-rotation gradients, and dissipation arising from the interaction between macro-rotation and micro-rotation. Numerical modeling is used to obtain the spatial distributions of the micro-rotation vector and the energy dissipation field. The characteristics of macro-vortex and micro-vortex structures are compared. Quantitative estimates of the contribution of each dissipation mechanism to the overall flow energy balance are provided. The results elucidate the specific features of dissipative processes in micropolar media, and they can be used to optimize the processing of non-Newtonian fluids.

Keywords: micropolar fluid, energy dissipation, micro-rotation, micro-vortices, energy balance, numerical modeling, cubic cavity

References

1. Prosviryakov, E.Yu., Goruleva, L.S., and Ales, M.Yu. A class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations taking into account the Rayleigh dissipation function. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya*, 2024, 26 (2), 164–178. (In Russian). DOI: 10.62669/17270227.2024.2.15.
2. Baranovskii, E.S. The stationary Navier–Stokes–Boussinesq system with a regularized dissipation function. *Mathematical Notes*, 2024, 115, 670–682. DOI: 10.1134/S0001434624050031.
3. Goruleva, L.S., Obabkov, I.I., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to thermal diffusion equations for Stokes slow flows. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2024, 6, 241–267. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.6.241-267. Available at: http://dream-journal.org/issues/2024-6/2024-6_481.html
4. Shelukhin, V.V. and Neverov, V.V. Rotational sedimentation in neutrally buoyant particle suspensions. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2024, 65, 985–993. DOI: 10.1134/S0021894424050195.
5. Viswanath, K., Lingaswamy, A.P., Raghavendra, K., Kodi, R., and Vaddemani, R.R. Effects of thermo physical aspects of radiant-heating on an unsteady magnetohydrodynamic hybrid nanofluid flow. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2025, 223, 1087–1102. DOI: 10.1134/S0040577925060182.

6. Siddiqui, A.A. and Turkyilmazoglu, M. Film flow of nano-micropolar fluid with dissipation effect. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2024, 140 (3), 2487–2512. DOI: 10.32604/cmescs.2024.050525.
7. Saraswathy, M., Prakash, D., and Durgaprasad, P. MHD micropolar fluid in a porous channel provoked by viscous dissipation and non-linear thermal radiation: an analytical approach. *Mathematics*, 2023, 11 (1), 183. DOI: 10.3390/math11010183.
8. Xu, X., Qiu, W., Wan, D., Wu, J., Zhao, F., and Xiong, Y. Numerical modelling of the viscoelastic polymer melt flow in material extrusion additive manufacturing. *Virtual and Physical Prototyping*, 2024, 19 (1), e2300666. DOI: 10.1080/17452759.2023.2300666.
9. Ohaegbue, A.D., Salawu, S.O., Oderinu, R.A., Fatunmbi, E.O., and Akindele, A.O. Thermal dissipation of two-step combustible tangent hyperbolic fluid with quadratic Boussinesq approximation and convective cooling. *Results in Materials*, 2024, 22, 100565. DOI: 10.1016/j.rinma.2024.100565.
10. Tassaddiq, A. Impact of Cattaneo–Christov heat flux model on MHD hybrid nano-micropolar fluid flow and heat transfer with viscous and joule dissipation effects. *Scientific Reports*, 2021, 11, 67. DOI: 10.1038/s41598-020-77419-x.
11. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for unidirectional flows of micropolar fluids in a mass force field. *Diagnostics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2024, 3, 41–63. DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063. URL: http://dream-journal.org/issues/2024-3/2024-3_438.html
12. Baranovskii, E.S. Exact solutions for the non-isothermal Poiseuille flow of a FENE-P fluid. *Polymers*, 2025, 17 (17), 2343. DOI: 10.3390/polym17172343.
13. Baranovskii, E.S., Prosviryakov, E.Yu., and Ershkov, S.V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2025, 84, 104294. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
14. Bondarenko, R., Bukichev, Yu., Dzhaga, A., Dzhardimalieva, G., and Solyaev, Yu. Micropolar effects on the effective shear viscosity of nanofluids. *Physics of Fluids*, 2024, 36, 062004. DOI: 10.1063/5.0208850.
15. Baranovskii, E.S., Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu., and Yudin, A.V. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for describing three-dimensional flows of micropolar liquids. *Symmetry*, 2024, 16 (12), 1669. DOI: 10.3390/sym16121669.
16. Debue, P., Valori, V., Cuvier, C., Daviaud, F., Foucaut, J.-M., Laval, J.-P., Wiertel, C., Padilla, V., and Dubrulle, B. Three-dimensional analysis of precursors to non-viscous dissipation in an experimental turbulent flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 2021, 914, A9. DOI: 10.1017/jfm.2020.574.
17. Lone, S.A., Raizah, Z., Alrabaiah, H., Shahab, S., Saeed, A., and Khan, A. Exploring convective conditions in three-dimensional rotating ternary hybrid nanofluid flow over an extending sheet: a numerical analysis. *Journal of Thermal Analysis and Calorimetry*, 2025, 150 (4), 2651–2666. DOI: 10.1007/s10973-024-13070-2.
18. Chang, Q., Li, D., Sun, C., and Zelik, S.V. Deterministic and random attractors for a wave equation with sign changing damping. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, 2023, 87 (1), 161–210. (In Russian). DOI: 10.4213/im9250.
19. Tishkin, V.F., Gasilov, V.A., Zmitrenko, N.V., Kuchugov, P.A., Ladonkina, M.E., and Poveschenko, Yu.A. Modern methods of mathematical modeling of the development of hydrodynamic instabilities and turbulent mixing. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, 13, 311–327. DOI: 10.1134/S2070048221020174.
20. Gopal, D., Jagadha, S., Sreehari, P., Kishan, N., and Mahendar, D. A numerical study of viscous dissipation with first order chemical reaction and ohmic effects on MHD nanofluid flow through an exponential stretching sheet. *Materials Today: Proceedings*, 2022, 59, part 1, 1028–1033. DOI: 10.1016/j.matpr.2022.02.368.

Подана в журнал: 09.12.2025

УДК 532.5

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.3.049-063

МИКРОПОЛЯРНЫЕ ЭФФЕКТЫ И ДИССИПАЦИЯ ЭНЕРГИИ В ТРЕХМЕРНОМ ТЕЧЕНИИ МИКРОПОЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ В КУБИЧЕСКОЙ ПОЛОСТИ

К. В. Губарева^{1, а, *}, Е. Ю. Просвирыков^{2, 3, 6}, А. В. Еремин^{1, в}

¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Самарский государственный технический университет»,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^а  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

⁶  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^в  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия
Тел.: +7 (846) 332-42-26

В работе представлены результаты исследования механизмов диссипации энергии и особенностей микрополярных эффектов в трехмерном течении микрополярной жидкости в кубической полости. Основное внимание уделено анализу различных составляющих диссипации: классической вязкой диссипации, диссипации, связанной с градиентами микровращения, и диссипации от взаимодействия макро- и микровращений. На основе численного моделирования получены пространственные распределения вектора микровращения, поля диссипации энергии, проведено сравнение характеристик макро- и микровихревых структур. Приведены количественные оценки вклада каждого механизма диссипации в общий энергетический баланс течения. Полученные результаты раскрывают специфику диссипативных процессов в микрополярных средах и могут быть использованы для оптимизации процессов переработки неньютоновских жидкостей.

Ключевые слова: микрополярная жидкость, диссипация энергии, микровращение, микровихри, энергетический баланс, численное моделирование, кубическая полость

1. Введение

Исследование процессов диссипации энергии в течениях неньютоновских жидкостей представляет значительный научный и практический интерес [1–3]. В отличие от классических ньютоновских сред, микрополярные жидкости характеризуются наличием внутренней вращательной степени свободы микрочастиц, что приводит к существенному усложнению механизмов преобразования и рассеяния энергии. Понимание этих механизмов имеет фундаментальное значение для описания поведения широкого класса реальных сред, включающих полимерные растворы, суспензии, коллоидные системы и биологические жидкости.

Микрополярные жидкости представляют собой среды, микроструктура которых обладает внутренней вращательной степенью свободы. К таким средам относятся суспензии с твердыми частицами несферической формы, полимерные растворы с вращающимися макромолекулами, жидкие кристаллы, биологические жидкости (например, кровь с эритроцитами). В

этих средах микрочастицы могут вращаться независимо от макроскопического движения жидкости, что приводит к возникновению дополнительных напряжений — моментных — и требует обобщения классической механики сплошных сред.

Актуальность исследования диссипативных процессов в микрополярных жидкостях обусловлена несколькими факторами [4–7]. Во-первых, диссипация энергии определяет энергетические затраты при переработке неньютоновских сред в различных технологических процессах: перемешивании, экструзии, литье под давлением [8]. Во-вторых, диссипация тесно связана с тепловыделением, что важно для расчета температурных полей и обеспечения теплового режима оборудования [9]. В-третьих, анализ диссипации позволяет глубже понять физику взаимодействия между макроскопическим движением жидкости и вращением микрочастиц [10].

В существующей научной литературе вопросы диссипации энергии в микрополярных жидкостях исследованы недостаточно полно [11–14]. Большинство работ посвящено анализу полей скорости и микровращения, тогда как количественному анализу различных механизмов диссипации уделено мало внимания. Особенно это касается трехмерных течений, где пространственная структура диссипации может иметь сложный характер. Имеющиеся исследования в основном ограничиваются расчетом полной диссипации без разделения на составляющие, что не позволяет оценить вклад различных физических механизмов.

Теоретической основой исследования служит модель Эрингена для микрополярных жидкостей, которая обобщает классические уравнения Навье – Стокса путем введения дополнительного векторного поля микровращения и соответствующих членов в уравнения движения [15]. Однако в большинстве работ, использующих эту модель, основное внимание уделяется решению краевых задач без детального анализа диссипативных процессов. Существует пробел в знаниях относительно пространственного распределения различных компонент диссипации и их взаимосвязи с параметрами течения.

Особую сложность представляет анализ диссипации в трехмерных течениях в ограниченных областях [16–18]. В таких течениях возникают сложные пространственные структуры с областями интенсивного сдвига, вращательного движения и взаимодействия между различными компонентами течения. Диссипация в этих условиях носит ярко выраженный неоднородный характер, и ее анализ требует применения современных численных методов с высоким пространственным разрешением [19, 20].

Целью настоящей работы является исследование механизмов диссипации энергии и микрополярных эффектов в трехмерном течении в кубической полости. Для достижения этой цели решаются следующие задачи: разработка математической модели, учитывающей различные механизмы диссипации; создание численного алгоритма для расчета полей диссипации; проведение расчетов для конкретных значений параметров; анализ пространственных распределений диссипации и микровращения; количественная оценка вклада различных механизмов диссипации; сравнение характеристик макро- и микровихрей; исследование энергетического баланса течения.

Новизна работы заключается в анализе различных составляющих диссипации энергии в трехмерном течении микрополярной жидкости. В отличие от предыдущих исследований, в которых обычно рассматривается только полная диссипация, в данной работе проводится разделение на три компоненты: классическую вязкую диссипацию, диссипацию от градиентов микровращения и диссипацию от взаимодействия макро- и микровращений. Такой подход позволяет выявить особенности каждого механизма диссипации и оценить их относительный вклад в общий энергетический баланс.

Практическая значимость работы связана с возможностью использования полученных результатов для оптимизации технологических процессов с участием неньютоновских жидкостей. Понимание механизмов диссипации позволяет снижать энергозатраты при переработке полимерных материалов, улучшать качество продукции за счет управления тепловыми режимами, проектировать более эффективное оборудование для работы с неньютоновскими средами.

2. Математическое моделирование диссипативных процессов

Движение микрополярной жидкости описывается системой взаимосвязанных уравнений, учитывающих как поступательное движение среды, так и вращение микрочастиц. В отличие от классических уравнений Навье – Стокса, система дополняется уравнениями для поля микровращения, что существенно усложняет анализ диссипативных процессов.

Под микрополярными эффектами в данной работе понимается совокупность явлений, обусловленных взаимодействием между поступательным движением жидкости и вращением микрочастиц:

- 1) изменение эффективной вязкости среды за счет параметра микрополярности N ;
- 2) возникновение моментных напряжений, передающих вращательный импульс;
- 3) релаксация микровращения к локальному макровихрю;
- 4) дополнительная диссипация энергии, обусловленная градиентами микровращения и взаимодействием микро- и макровращений.

Для перехода к безразмерной форме уравнений в качестве масштабов выбраны: длина L (ребро кубической полости), скорость U_0 (скорость движения верхней грани), давление ρU_0^2 , микровращение U_0/L , время L/U_0 . Число Рейнольдса определяется как $Re = U_0 L / \nu$, где ν – кинематическая вязкость. Безразмерные переменные обозначены теми же символами, что и размерные. Далее все уравнения приведены в безразмерной форме.

Уравнение неразрывности в тензорной форме для несжимаемой жидкости имеет вид

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1)$$

где u_i – безразмерные компоненты вектора скорости, $i = 1, 2, 3$ (соответствует x, y, z); подразумевается суммирование по повторяющемуся индексу.

Уравнения баланса количества движения для микрополярной жидкости включают дополнительные члены, обусловленные взаимодействием с полем микровращения:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \left[(1 + N) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + N \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j} \right], \quad (2)$$

где p – безразмерное давление, ω_k – безразмерные компоненты вектора микровращения, Re – число Рейнольдса, N – безразмерный параметр микрополярности, ε_{ijk} – символ Леви-Чивиты. Индексная запись подразумевает суммирование по повторяющимся индексам.

Уравнения для поля микровращения имеют вид

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{m^2} \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{2N}{m^2} \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \omega_i \right) \right], \quad (3)$$

где m – дополнительный параметр микрополярности (безразмерный), характеризующий соотношение между характерными масштабами микроструктуры и макротечения.

Вектор микровращения характеризует среднюю угловую скорость вращения микрочастиц (микроструктуры) в элементарном объеме среды. В отличие от макроскопической скорости движения, это поле отражает внутреннюю вращательную степень свободы вещества, обусловленную наличием несферических частиц или макромолекул.

В классической гидродинамике ньютоновской жидкости тензор напряжений симметричен, что соответствует отсутствию внутренних вращательных степеней свободы. Для описания микрополярных сред необходимо обобщение: тензор напряжений становится несимметричным, а в системе уравнений появляется дополнительное поле микровращения ω_i и уравнение баланса момента импульса. Эти «дополнительные слагаемые» (члены с ε_{ijk} в уравнении (2) и все члены уравнения (3)) физически представляют собой моментные напряжения,

передающие вращательный импульс от одних микрочастиц к другим. Исключение этих слагаемых привело бы к вырождению модели в классическую жидкость Навье – Стокса и сделало бы невозможным анализ специфических механизмов диссипации, являющихся предметом настоящего исследования. Таким образом, используемая система уравнений (1)–(3) является минимальной замкнутой моделью, адекватно описывающей микрополярные эффекты.

Диссипация энергии в микрополярной жидкости имеет более сложную структуру по сравнению с ньютоновскими средами. Полная безразмерная удельная мощность диссипации Φ_{total} может быть представлена в виде суммы трех независимых компонент:

$$\Phi_{\text{total}} = \Phi_{\text{class}} + \Phi_{\text{grad}} + \Phi_{\text{inter}}, \quad (4)$$

где каждая компонента имеет определенный физический смысл. Для перехода к размерной мощности диссипации (Вт/м³) безразмерное значение умножается на масштаб $\mu U_0^2/L^2$, где μ – динамическая вязкость.

Классическая вязкая диссипация Φ_{class} связана с деформацией жидкости и определяется тензором скоростей деформации:

$$\Phi_{\text{class}} = (1 + N)(2D_{ij}D_{ij}), \quad (5)$$

где $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$ – безразмерный тензор скоростей деформации. Коэффициент $(1 + N)$ учитывает увеличение эффективной вязкости за счет микрополярных эффектов.

Диссипация, связанная с градиентами микровращения Φ_{grad} , обусловлена неоднородностью поля микровращения:

$$\Phi_{\text{grad}} = \frac{1}{m^2} \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right). \quad (6)$$

Эта компонента отражает энергию, затрачиваемую на поддержание пространственных градиентов вращения микрочастиц.

Диссипация от взаимодействия Φ_{inter} возникает из-за различия между макровихрем и микровращением:

$$\Phi_{\text{inter}} = N \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - 2\omega_i \right)^2. \quad (7)$$

Физически эта компонента описывает энергию, расходуемую на приведение вращения микрочастиц в соответствие с локальным вращением жидкости. Параметр N определяет интенсивность взаимодействия между макро- и микровращениями.

Для характеристики вращательного движения в различных масштабах вводятся понятия макро- и микровихрей. Макровихрь определяется стандартным образом:

$$\Omega_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \quad (8)$$

где Ω_i – безразмерные компоненты вектора макровихря.

Микровихрь тождественен полю микровращения ω_i . Важной характеристикой является безразмерное отношение

$$R = \frac{|\omega|}{|\Omega|}, \quad (9)$$

которое показывает степень соответствия вращения микрочастиц макроскопическому вращению жидкости. Значение $R = 0,5$ соответствует состоянию локального термодинамического равновесия между поступательным и вращательным движениями, при котором микровращение точно равно половине макроскопического вихря. При $R < 0,5$ (как в настоящей работе) микровращение слабо связано с макровихрем, что характерно для режимов с преобладанием вязких эффектов над микрополярами.

3. Численный метод и постановка задачи

Численное решение системы безразмерных уравнений (1)–(3) проводится для следующей расчетной постановки.

Рассматривается течение в кубической полости с ребром $L = 1,0$ м. Верхняя грань ($z = L$) движется с постоянной скоростью U_0 в направлении оси x . Безразмерные параметры – это число Рейнольдса $Re = 5,0$, параметр микрополярности $N = 0,2$, параметр $m = 0,3$.

Начальные условия следующие: в момент времени $t = 0$ жидкость в полости покоится ($u = v = w = 0$), поле микровращения отсутствует ($\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$). Движение верхней грани начинается мгновенно и в дальнейшем поддерживается с постоянной скоростью U_0 .

Граничные условия для скорости соответствуют условиям прилипания на всех твердых поверхностях. Для поля микровращения принимаются следующие условия: на движущейся верхней границе – условие $\omega_i = 0$, что соответствует отсутствию относительного вращения микрочастиц на поверхности; на остальных неподвижных стенках – условие Неймана $\partial\omega_i/\partial n = 0$, что моделирует отсутствие поверхностных крутящих моментов (свободное вращение микрочастиц у стенки).

Для решения системы уравнений (1)–(3) используется метод конечных разностей на равномерной сетке. Расчетная область разбивается на $n_x \times n_y \times n_z = 41 \times 41 \times 41$ узлов. Шаги сетки по всем направлениям одинаковы и составляют $\Delta = 0,025$ м. Производные аппроксимированы центральными разностями второго порядка.

Интегрирование по времени выполняется явной схемой Эйлера первого порядка точности. Шаг $\Delta t = 2 \times 10^{-6}$ с выбран из условия устойчивости. При максимальной скорости $U_{\max} \approx 0,2$ м/с конвективное число Куранта составляет

$$CFL = \frac{U_{\max} \Delta t}{\Delta x} = 1,6 \times 10^{-5},$$

что значительно меньше единицы и гарантирует устойчивость. Основным фактором, ограничивающим шаг по времени, является диффузионная устойчивость для вязких членов.

Алгоритм решения (проеекционный метод) включает следующие этапы: решение уравнений (3) для микровращения на текущем временном слое; прогноз скорости без учета давления из уравнений (2); решение уравнения Пуассона для давления методом последовательной верхней релаксации (SOR); коррекция скорости с учетом найденного градиента давления для обеспечения условия несжимаемости (1). Расчет проводится до выхода на стационарное состояние.

Расчет компонент диссипации энергии выполняется после определения полей скорости и микровращения. Для каждой внутренней ячейки расчетной сетки вычисляются градиенты скорости и микровращения с использованием центральных разностей.

Тензор скоростей деформации рассчитывается по формуле

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (10)$$

Классическая вязкая диссипация Φ_{class} вычисляется по формуле (5) с использованием дискретных аппроксимаций производных. В разностной форме

$$\Phi_{\text{class},i,j,k} = (1 + N)(D_{11}^2 + D_{22}^2 + D_{33}^2 + 2D_{12}^2 + 2D_{13}^2 + 2D_{23}^2)_{i,j,k} \quad (11)$$

индексы i, j, k соответствуют узлам пространственной сетки.

Диссипация, связанная с градиентами микровращения Φ_{grad} , рассчитывается согласно выражению (6):

$$\Phi_{\text{grad},i,j,k} = \frac{1}{m^2} \left[\left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_y}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right)^2 \right]_{i,j,k}. \quad (12)$$

Ротор скорости вычисляется по компонентам:

$$(\nabla \times \mathbf{u})_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, (\nabla \times \mathbf{u})_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, (\nabla \times \mathbf{u})_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (13)$$

Диссипация от взаимодействия определяется согласно формуле (7):

$$\Phi_{\text{inter},i,j,k} = N \left[((\nabla \times \mathbf{u})_x - 2\omega_x)^2 + ((\nabla \times \mathbf{u})_y - 2\omega_y)^2 + ((\nabla \times \mathbf{u})_z - 2\omega_z)^2 \right]_{i,j,k}. \quad (14)$$

Полная удельная мощность диссипации в каждой ячейке расчетной сетки определяется как сумма трех вычисленных компонент согласно формуле (4).

Для количественного анализа вклада различных механизмов диссипации вычисляются интегральные по объему полости значения:

$$\Psi_{\text{class}} = \iiint_V \Phi_{\text{class}} dV, \Psi_{\text{grad}} = \iiint_V \Phi_{\text{grad}} dV, \Psi_{\text{inter}} = \iiint_V \Phi_{\text{inter}} dV, \Psi_{\text{total}} = \iiint_V \Phi_{\text{total}} dV. \quad (15)$$

Интегрирование выполняется методом средних прямоугольников: значение подынтегральной функции в каждой ячейке умножается на объем ячейки $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$, после чего результаты суммируются по всем ячейкам.

Доли каждого механизма диссипации в общей диссипации вычисляются в процентах:

$$\eta_{\text{class}} = \frac{\Psi_{\text{class}}}{\Psi_{\text{total}}} \times 100\%, \eta_{\text{grad}} = \frac{\Psi_{\text{grad}}}{\Psi_{\text{total}}} \times 100\%, \eta_{\text{inter}} = \frac{\Psi_{\text{inter}}}{\Psi_{\text{total}}} \times 100\%. \quad (16)$$

Макровихрь вычисляется по формулам (13). Величина макровихря в каждой точке определяется как евклидова норма вектора $\mathbf{\Omega}$:

$$|\mathbf{\Omega}| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2}. \quad (17)$$

Аналогично вычисляется величина микровихря:

$$|\mathbf{\omega}| = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2}. \quad (18)$$

Отношение микровихрей к макровихрям рассчитывается по формуле (9). Для избежания деления на ноль в точках, где величина макровихря близка к нулю, вводится пороговое значение $\epsilon = 10^{-6}$: если $|\mathbf{\Omega}| < \epsilon$, то отношение полагается равным нулю.

4. Результаты и обсуждение

На рис. 1 показано распределение модуля вектора микровращения $|\omega|$ в горизонтальном сечении $z = 0,5$. Максимальные значения ($\approx 8 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1}$) наблюдаются в пристеночных областях. Распределение симметрично относительно центральной вертикальной оси, что соответствует симметрии течения. Повышенные значения $|\omega|$ в зонах больших градиентов скорости свидетельствуют о генерации микровращения за счет сдвигового течения.

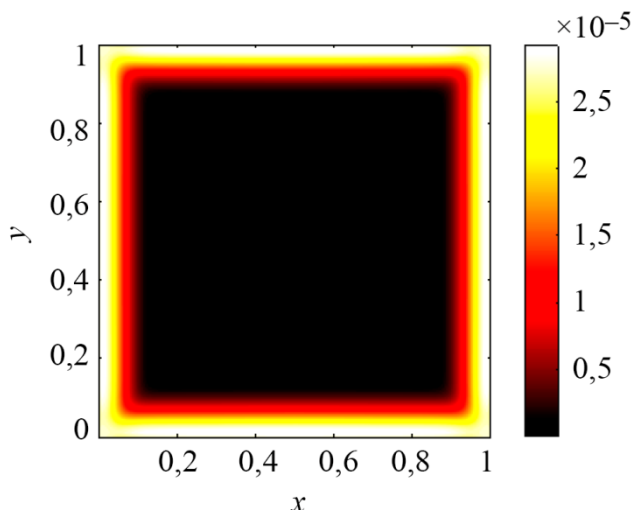


Рис. 1. Распределение величины вектора микровращения $|\omega|$ в сечении $z = 0,5$

Интересной особенностью является симметричное распределение микровращения относительно вертикальной оси полости. Области повышенного микровращения расположены в зонах с большими градиентами скорости, что соответствует физическому смыслу: именно в этих областях происходит интенсивное взаимодействие между соседними слоями жидкости, приводящее к вращению микрочастиц.

На рис. 2 показан профиль величины микровращения вдоль горизонтальной оси x при $y = 0,5L_y$ и $z = 0,5L_z$. Профиль имеет сложную форму с двумя максимумами, расположенными симметрично относительно центра полости. Значения в максимумах составляют примерно $0,0006 \text{ с}^{-1}$. В центральной точке профиль имеет локальный минимум, что соответствует зоне более однородного вращения микрочастиц.

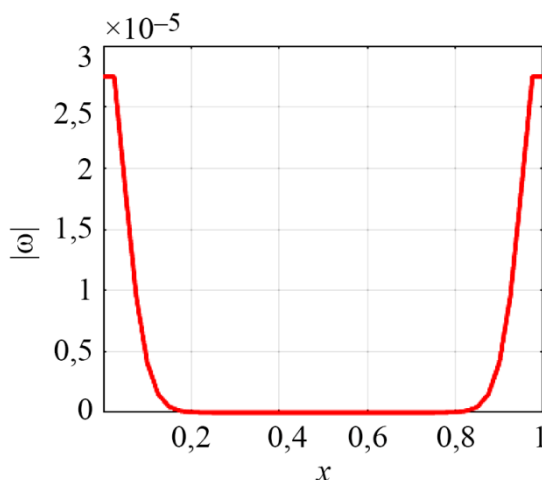


Рис. 2. Профиль величины микровращения $|\omega|$ вдоль оси x при $y = 0,5L_y$, $z = 0,5L_z$

На рис. 3 представлено распределение полной диссипации энергии Φ_{total} в центральном сечении $z = 0,5L_z$. Наблюдается ярко выраженная пространственная неоднородность диссипации. Максимальные значения, достигающие $0,015 \text{ Вт/м}^3$, сосредоточены вблизи боковых и нижней стенок, а также в угловых областях. В центральной части полости диссипация значительно меньше.

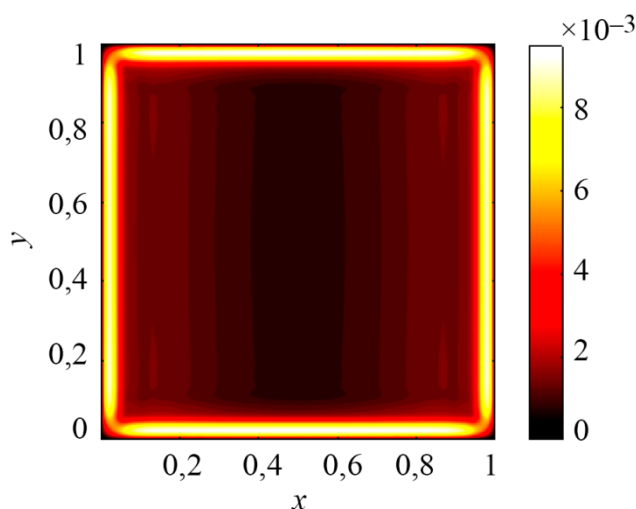


Рис. 3. Распределение полной диссипации энергии Φ_{total} в сечении $z = 0,5L_z$

Такое распределение диссипации объясняется особенностями течения: вблизи стенок образуются пограничные слои с большими градиентами скорости, что приводит к интенсивной вязкой диссипации. В угловых областях дополнительный вклад вносят вторичные течения и связанные с ними градиенты микровращения.

На рис. 4 показан профиль полной диссипации вдоль горизонтальной оси x при $y = 0,5L_y$ и $z = 0,5L_z$. Профиль имеет четыре ярко выраженных пика, соответствующих зонам максимальной диссипации вблизи боковых стенок. Центральная часть профиля относительно плоская, с небольшим провалом в центре, что соответствует зоне пониженной диссипации.

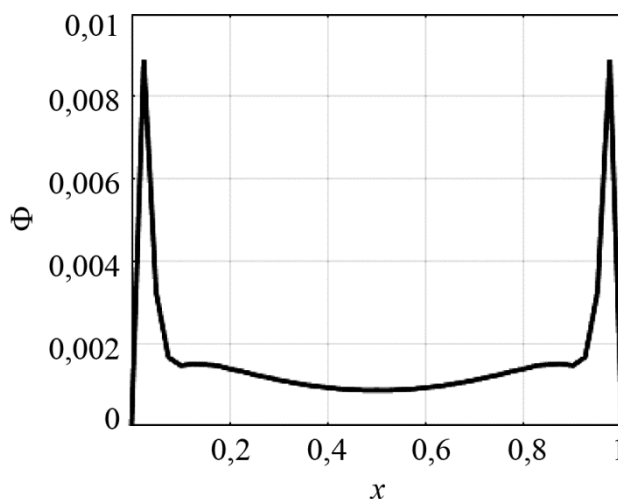


Рис. 4. Профиль полной диссипации энергии Φ_{total} вдоль оси x при $y = 0,5L_y$, $z = 0,5L_z$

Для сравнения характеристик вращательного движения на разных масштабах на рис. 5 и 6 представлены распределения z -компоненты макро- и микровихрей соответственно в сечении $z = 0,5L_z$.

При числе Рейнольдса $Re = 5,0$ в полости формируется стационарное ламинарное течение. Основную часть объема занимает один крупный циркуляционный вихрь. Ядро вихря смещено в верхнюю часть полости в направлении движения крышки. У неподвижных стенок формируются тонкие пограничные слои с большими поперечными градиентами скорости.

Распределение вертикальной компоненты макровихря Ω_z (рис. 5) подтверждает эту структуру: наблюдается характерная антисимметричная картина с максимальными по модулю значениями ($\approx 0,1 \text{ c}^{-1}$) вблизи верхней и нижней стенок. В центральной области полости макровихрь близок к нулю, что соответствует ядру основного вихря. Положительные значения Ω_z в нижней половине и отрицательные в верхней половине соответствуют направлению вращения основного циркуляционного вихря.

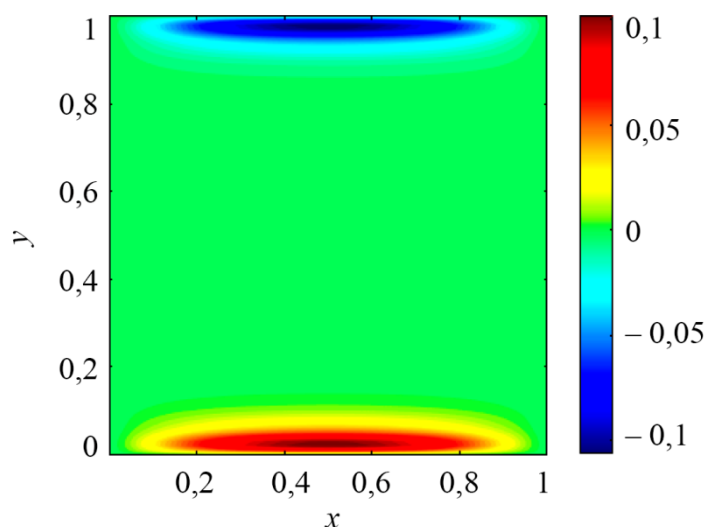


Рис. 5. Распределение вертикальной компоненты макровихря Ω_z в сечении $z = 0,5L_z$

На рис. 6 представлено распределение ω_z – вертикальной компоненты микровихря. По сравнению с макровихрем, распределение микровихря имеет более сложную структуру. Максимальные значения наблюдаются не только вблизи боковых стенок, но и в угловых областях. Величина микровихря на порядок меньше величины макровихря, что соответствует выбранным значениям параметров микрополярности.

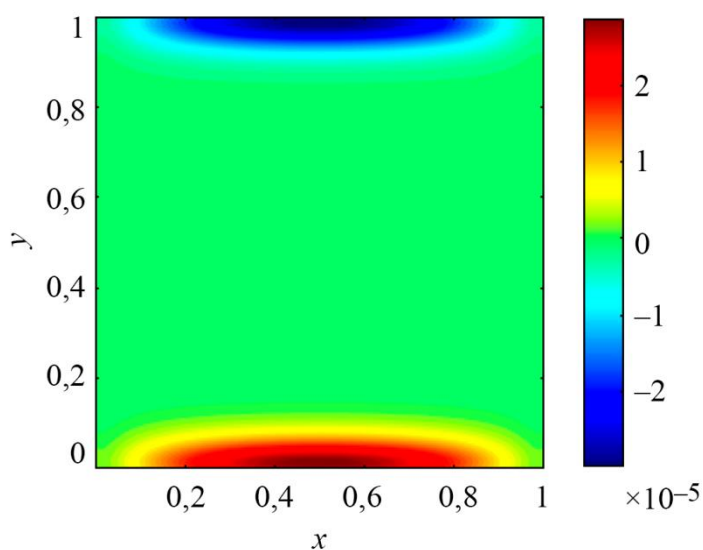


Рис. 6. Распределение вертикальной компоненты микровихря ω_z в сечении $z = 0,5L_z$

На рис. 7 показано отношение величин микро- и макровихрей $R = |\omega_z|/|\Omega_z|$ в сечении $z = 0,5L_z$. В центральной области, где величина макровихря близка к нулю, отношение не определено (на рис. 7 эти области показаны белым цветом). Наибольшие значения отношения, достигающие 0,001, наблюдаются вблизи боковых стенок, где микровихрь имеет значительную величину, а макровихрь не слишком велик. Это свидетельствует о том, что микрополярные эффекты наиболее выражены в областях с большими градиентами скорости.

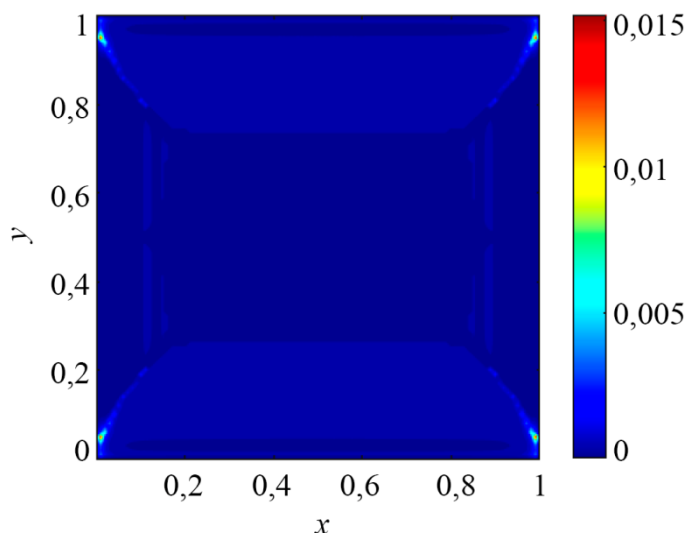


Рис. 7. Отношение величин микро- и макровихрей $R = |\omega_z|/|\Omega_z|$ в сечении $z = 0,5L_z$

Анализ рассчитанных полей показывает, что классическая вязкая диссипация Φ_{class} и диссипация от взаимодействия Φ_{inter} локализованы в пристеночных областях и угловых зонах, повторяя распределение полной диссипации. В центральной части полости их значения близки к нулю. В зонах интенсивного сдвига у боковых стенок Φ_{inter} составляет примерно 30–40 % от локальной Φ_{total} , что согласуется с ее интегральной долей 25,71 % (таблица). Диссипация от градиентов микровращения Φ_{grad} пренебрежимо мала во всей области течения (менее 0,1 % от Φ_{total}) из-за малых значений параметра m и гладкости поля микровращения. Таким образом, в рассмотренном режиме течения микрополярные эффекты влияют на диссипацию преимущественно через механизм взаимодействия макро- и микровращений.

Интегральный анализ диссипации энергии по всему объему полости дает следующие результаты. Общая диссипация энергии составляет $\Psi_{\text{total}} = 0,314455$ Вт.

Таблица

Вклад механизмов диссипации

Механизм диссипации	Интегральное значение Ψ , Вт	Доля в общей диссипации η , %
Классическая вязкая диссипация	0,233488	74,25
Диссипация от градиентов микровращения	0,000110	0,04
Диссипация от взаимодействия	0,080857	25,71

Механизм диссипации	Интегральное значение Ψ , Вт	Доля в общей диссипации η , %
Общая диссипация	0,314455	100,0

Классическая вязкая диссипация составляет $\Phi_{\text{class}} = 0,233488$ Вт, что соответствует 74,25 % от общей диссипации. Этот результат показывает, что даже для микрополярной жидкости основным механизмом рассеяния энергии остается классическая вязкая диссипация, связанная с деформацией жидкости.

Диссипация, связанная с градиентами микровращения, составляет $\Psi_{\text{grad}} = 0,000110$ Вт, что соответствует всего 0,04 % от общей диссипации. Столь малая величина объясняется малыми значениями градиентов микровращения при выбранных параметрах задачи ($N = 0,2$, $m = 0,3$). Это указывает на то, что механизм «собственной вязкости» микровращения в данной конфигурации пренебрежимо мал.

Диссипация от взаимодействия макро- и микровращений составляет $\Psi_{\text{inter}} = 0,080857$ Вт, что соответствует 25,71 % от общей диссипации. Этот механизм диссипации играет существенную роль, демонстрируя значительный энергообмен между поступательным движением жидкости и вращением микрочастиц. Таким образом, при заданных параметрах микрополярность влияет на диссипацию преимущественно через механизм релаксации микровращения к локальному макровращению.

Полученное распределение вкладов различных механизмов диссипации характерно для течений с умеренными значениями параметров микрополярности. При увеличении параметра N доля диссипации от взаимодействия может возрасти, а при уменьшении – приблизиться к нулю, что соответствует переходу к классической ньютоновской жидкости.

В установившемся стационарном режиме течения должен выполняться баланс между мощностью, подводимой к жидкости движущейся крышкой, и полной мощностью диссипации в объеме Φ_{total} . Рассчитанное значение $\Phi_{\text{total}} = 0,314455$ Вт количественно характеризует энергетические затраты на поддержание течения. Кинетическая энергия установившегося течения в полости составляет:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \iiint_V (u^2 + v^2 + w^2) dV = 6,92 \times 10^{-4} \text{ Дж.} \quad (19)$$

Отношение $\frac{E_{\text{kin}}}{\Psi_{\text{total}}} \approx 2,2 \times 10^{-3}$ с имеет смысл характерного времени, за которое кинетическая энергия рассеялась бы, если бы прекратилась работа движущейся крышки. Малая величина этого отношения (по сравнению с временем установления течения) и стабильность итерационного процесса подтверждают, что течение вышло на стационарный режим, при котором мощность подвода энергии равна мощности диссипации.

5. Заключение

Проведенное исследование позволило получить детальную картину микрополярных эффектов и диссипации энергии в трехмерном течении в кубической полости. Разработана математическая модель, учитывающая различные механизмы диссипации: классическую вязкую диссипацию, диссипацию от градиентов микровращения и диссипацию от взаимодействия макро- и микровращений. Создан численный алгоритм для расчета полей диссипации на основе метода конечных разностей.

Результаты расчетов показывают, что поле микровращения имеет пространственно неоднородное распределение с максимумами вблизи боковых стенок. Величина микровращения на порядок меньше величины макровихря при выбранных значениях параметров

микрополярности. Диссипация энергии характеризуется ярко выраженной пространственной неоднородностью с максимальными значениями вблизи стенок и в угловых областях.

Количественный анализ вклада различных механизмов диссипации показал, что классическая вязкая диссипация составляет 74,25 % от общей диссипации, диссипация от взаимодействия – 25,71 %, а диссипация, связанная с градиентами микровращения, пренебрежимо мала. Такое распределение характерно для течений с умеренными значениями параметров микрополярности.

Отношение величин микровихрей к макровихрям максимально в областях с существенным микровращением и умеренными значениями макровихря. Это наблюдается в зонах, удаленных от стенок, но все еще находящихся под влиянием градиентов скорости. Пространственные распределения различных параметров демонстрируют тесную корреляцию: области максимальной диссипации совпадают с зонами максимальных градиентов скорости и повышенного микровращения.

Энергетический анализ показал, что в установившемся режиме течение характеризуется малой кинетической энергией $E_{kin} = 0,000692$ Дж, что соответствует визуально наблюдаемому вялому циркуляционному движению при низком числе Рейнольдса ($Re = 5,0$). Расчетная полная мощность диссипации $\Psi_{total} = 0,314455$ Вт количественно характеризует затраты энергии на поддержание этого течения. Прямой расчет баланса (равенство мощности диссипации работе движущейся крышки) подтверждает корректность численного решения.

Полученные результаты раскрывают специфику диссипативных процессов в микрополярных средах и могут быть использованы для разработки и оптимизации технологических процессов с участием неньютоновских сред. В частности, знание распределения диссипации энергии позволяет прогнозировать тепловыделение в процессе переработки полимерных материалов, а анализ микрополярных эффектов – учитывать влияние микроструктуры на макропараметры течения.

Перспективными направлениями дальнейших исследований являются изучение влияния параметров микрополярности на структуру течения и диссипацию энергии, анализ неустановившихся режимов течения, исследование течений в областях со сложной геометрией, а также учет тепловых эффектов, связанных с диссипацией энергии. Дальнейшее развитие работы может быть связано с внедрением более эффективных алгоритмов решения, таких как неявные схемы или методы многосеточного типа, что позволит увеличить шаг по времени и сократить общее время вычислений.

Литература

1. Просвиряков Е. Ю., Горулева Л. С., Альес М. Ю. Класс точных решений уравнений Обербека–Буссинеска с учетом диссипативной функции Рэлея // Химическая физика и мезоскопия. – 2024. – Т. 26 (2). – С. 164–178. – DOI: 10.62669/17270227.2024.2.15.
2. Baranovskii E. S. The stationary Navier–Stokes–Boussinesq system with a regularized dissipation function // Mathematical Notes. – 2024. – Vol. 115. – P. 670–682. – DOI: 10.1134/S0001434624050031.
3. Goruleva L. S., Obabkov I. I., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to thermal diffusion equations for Stokes slow flows // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2024. – Iss. 6. – P. 241–267. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.6.241-267. – URL: http://dream-journal.org/issues/2024-6/2024-6_481.html
4. Shelukhin V. V., Neverov V. V. Rotational sedimentation in neutrally buoyant particle suspensions // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2024. – Vol. 65. – P. 985–993. – DOI: 10.1134/S0021894424050195.
5. Effects of thermo physical aspects of radiant-heating on an unsteady magnetohydrodynamic hybrid nanofluid flow / K. Viswanath, A. P. Lingaswamy, K. Raghavendra, R. Kodi, R. R. Vaddemani // Theoretical and Mathematical Physics. – 2025. – Vol. 223. – P. 1087–1102. – DOI: 10.1134/S0040577925060182.

6. Siddiqui A., Turkiilmazoglu M. Film flow of nano-micropolar fluid with dissipation effect // Computer Modeling in Engineering & Sciences. – 2024. – Vol. 140 (3). – P. 2487–2512. – DOI: 10.32604/cmes.2024.050525.
7. Saraswathy M., Prakash D., Durgaprasad P. MHD micropolar fluid in a porous channel provoked by viscous dissipation and non-linear thermal radiation: an analytical approach // Mathematics. – 2023. – Vol. 11 (1). – P. 183. – DOI: 10.3390/math11010183.
8. Numerical modelling of the viscoelastic polymer melt flow in material extrusion additive manufacturing / X. Xu, W. Qiu, D. Wan, J. Wu, F. Zhao, Y. Xiong // Virtual and Physical Prototyping. – 2024. – Vol. 19 (1). – P. e2300666. – DOI: 10.1080/17452759.2023.2300666.
9. Thermal dissipation of two-step combustible tangent hyperbolic fluid with quadratic Boussinesq approximation and convective cooling / A. D. Ohaegbue, S. O. Salawu, R. A. Oderinu, E. O. Fatunmbi, A. O. Akindele // Results in Materials. – 2024. – Vol. 22. – P. 100565. – DOI: 10.1016/j.rinma.2024.100565.
10. Tassaddiq A. Impact of Cattaneo–Christov heat flux model on MHD hybrid nano-micropolar fluid flow and heat transfer with viscous and joule dissipation effects // Scientific Reports. – 2021. – Vol. 11. – Art. No 67. – DOI: 10.1038/s41598-020-77419-x.
11. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for unidirectional flows of micropolar fluids in a mass force field // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2024. – Iss. 3. – P. 41–63. – DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063. – URL: http://dream-journal.org/issues/2024-3/2024-3_438.html
12. Baranovskii E. S. Exact solutions for the non-isothermal Poiseuille flow of a FENE-P fluid // Polymers. – 2025. – Vol. 17 (17). – P. 2343. – DOI: 10.3390/polym17172343.
13. Baranovskii E. S., Prosviryakov E. Y., Ershkov S. V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2025. – Vol. 84. – P. 104294. – DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
14. Micropolar effects on the effective shear viscosity of nanofluids / R. Bondarenko, Yu. Bukichev, A. Dzhaga, G. Dzhardimalieva, Yu. Solyaev // Physics of Fluids. – 2024. – Vol. 36. – 062004. – DOI: 10.1063/5.0208850.
15. Exact solutions to the Oberbeck–Boussinesq equations for describing three-dimensional flows of micropolar liquids / E. S. Baranovskii, S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, A. V. Yudin // Symmetry. – 2024. – Vol. 16 (12). – P. 1669. – DOI: 10.3390/sym16121669.
16. Three-dimensional analysis of precursors to non-viscous dissipation in an experimental turbulent flow / P. Debue, V. Valori, C. Cuvier, F. Daviaud, J.-M. Foucaut, J.-P. Laval, C. Wiertel, V. Padilla, B. Dubrulle // Journal of Fluid Mechanics. – 2021. – Vol. 914. – P. A9. – DOI: 10.1017/jfm.2020.574.
17. Exploring convective conditions in three-dimensional rotating ternary hybrid nanofluid flow over an extending sheet: a numerical analysis / S. A. Lone, Z. Raizah, H. Alrabaiah, S. Shahab, A. Saeed, A. Khan // Journal of Thermal Analysis and Calorimetry. – 2025. – Vol. 150. – P. 2651–2666. – DOI: 10.1007/s10973-024-13070-2.
18. Детерминистские и случайные аттракторы волновых уравнений со знакопеременной диссипацией / Ч. Чанг, Д. Ли, Ч. Сун, С. В. Зелик // Известия Российской академии наук. Серия математическая. – 2023. – Т. 87 (1). – С. 161–210. – DOI: 10.4213/im9250.
19. Modern methods of mathematical modeling of the development of hydrodynamic instabilities and turbulent mixing / V. F. Tishkin, V. A. Gasilov, N. V. Zmitrenko, P. A. Kuchugov, M. E. Ladonkina, Yu. A. Poveschenko // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2021. – Vol. 13. – P. 311–327. – DOI: 10.1134/S2070048221020174.
20. A numerical study of viscous dissipation with first order chemical reaction and ohmic effects on MHD nanofluid flow through an exponential stretching sheet / D. Gopal, S. Jagadha, P. Sreehari, N. Kishan, D. Mahendar // Materials Today: Proceedings. – 2022. – Vol. 59. – P. 1028–1033. – DOI: 10.1016/j.matpr.2022.02.368.

