

Received: 23.01.2024

Revised: 11.04.2024



Accepted: 24.05.2024



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063

EXACT SOLUTIONS TO THE NAVIER–STOKES EQUATIONS FOR UNIDIRECTIONAL FLOWS OF MICROPOLAR FLUIDS IN A MASS FORCE FIELD

N. V. Burmasheva^a and E. Yu. Prosviryakov^{b, *}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia
Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: evgen_pros@mail.ru

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

The paper presents a family of exact solutions to the Navier-Stokes equation system used to describe inhomogeneous unidirectional flows of a viscous fluid taking into account couple stresses. Despite the presence of only one non-zero component of the velocity vector, this component depends on time and two spatial coordinates. In view of the incompressibility equation, which is a special case of the mass conservation law, there is no dependence on the third spatial coordinate. The resulting redefined system of equations is considered in a non-stationary formulation. The construction of a family of exact solutions for the resulting redefined equation system begins with the analysis of the homogeneous Couette-type solution as the simplest in this class. Further, the structure of the solution gradually becomes more complicated, i.e. the profile of the only non-zero component of the velocity vector is represented as a polynomial depending on one variable (horizontal coordinate). The polynomial coefficients functionally depend on the second (vertical) coordinate and time. It is shown that, due to the strong nonlinearity and heterogeneity of the equation under study, the sum of its individual solutions is not a solution. It is also shown that, in the linearly independent basis of the power functions of the horizontal coordinate, which determine the above-mentioned polynomial, the equation in question decomposes into a chain of the simplest homogeneous and inhomogeneous parabolic partial differential equations. These equations are integrated sequentially, the order of integration being described separately. The results reported in this study extend the family of previously presented exact solutions to describing unidirectional unsteady flows.

Keywords: exact solution, Navier–Stokes equation, inhomogeneous unidirectional flow, couple stresses, micropolar fluids

References

1. Couette, M. Etudes sur le frottement des liquides. *Ann. Chim. Phys.*, 1890, 21, 433–510.
2. Poiseuille, J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1840, 11, 961–967.
3. Poiseuille, J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres. *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1840, 11, 1041–1048.

4. Poiseuille, J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres (suite). *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1841, 12, 112–115.
5. Stokes, G.G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums. *Camb. Philo. Trans.*, 1851, 9, 8–106.
6. Nußelt, W. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge. *Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure*, 1910, 54, 1154–1158.
7. Nagel, Yu.A. Plane one-dimensional stationary flow of an ideal charged gas in its own electric field. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1971, 12, 19–26. DOI: 10.1007/BF00853977.
8. Faskheev, I.O. One-dimensional flow of a fluid through a porous skeleton with consideration of the Darcy and frontal pressure interaction forces. *Moscow University Mechanics Bulletin*, 2013, 68, 21–24. DOI: 10.3103/S0027133013010044.
9. Wallis, G. *One-Dimensional Two-Phase Flow*, McGraw-Hill, 1969, 408 p.
10. Borzenko, E.I. and Shrager, G.R. *Techeniya nenyutonovskoy zhidkosti so svobodnoy pov-erkhnostyu* [Flows of a Non-Newtonian Liquid With a Free Surface]. Izd-vo Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta Publ., Tomsk, 2022, 210 p. (In Russian).
11. Prokudin, S.V., Sofyin, A.S., and Agapov, A.A. Analytical solution of the problem of one-dimensional stationary flowing of the compressed liquid and gas. *Bezopasnost Truda v Promyshlennosti*, 2017, 5, 36–41. (In Russian). DOI: 10.24000/0409-2961-2017-5-36-41.
12. Valiyev, Kh.F., Kraiko, A.N., and Tillyayeva, N.I. Stability of one-dimensional steady flows with detonation wave in a channel of variable cross-sectional area. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, 60 (4), 697–710. DOI: 10.1134/S096554252004017X.
13. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. An exact solution to the description of a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Velocity field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2019, 5, 23–39. DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039. Available at: http://dream-journal.org/issues/2019-5/2019-5_259.html
14. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, iss. 2, pp. 61–75. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. Available at: http://dream-journal.org/issues/2020-2/2020-2_288.html
15. Bhaskar, B.S. and Chaudhary, S.K. Review of fluid flow and heat transfer through porous media heat exchangers. *International Journal of New Innovations in Engineering and Technology*, 2016, 6 (2), 28–42.
16. Singh, H. and Myong, R.S. Critical review of fluid flow physics at micro- to nano-scale porous media applications in the energy sector. *Advances in Materials Science and Engineering*, 2018, 2018, 9565240. DOI: 10.1155/2018/9565240.
17. Coussot, P. Yield stress fluid flows: a review of experimental data. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2014, 211, 31–49. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2014.05.006.
18. Kiselev, A. Diffusion and mixing in fluid flow: a review. In: Ed., V. Sidoravičius, *New Trends in Mathematical Physics*, Springer, Dordrecht, 2009. DOI: 10.1007/978-90-481-2810-5_24.
19. Taira, K., Brunton, S.L., Dawson, S.T.M., Rowley, C.W., Colonius, T., McKeon, B.J., Schmidt, O.T., Gordeyev, S., Theofilis, V., and Ukeiley, L.S. Modal analysis of fluid flows: an overview. *AIAA JOURNAL*, 2017, 55 (12), 4013–4041. DOI: 10.2514/1.J056060.
20. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu., Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.

21. Smagorinsky, J. History and progress. In: *The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program*, National Academy of Sciences, 1978, 4–12.
22. Smagorinsky, J. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: Early recollections. In: Ed., B. Zaltzman, *Advances in Geophysics, Theory of Climate*, vol. 25, Academic Press, 1983, 3–37.
23. Smagorinsky, J., Phillips, N.A. Scientific problems of the global weather experiment. In: *The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP)*, National Academy of Science, 1978, 13–21.
24. Burmasheva, N.V., Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of Navier–Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2020, 26 (2), 79–87. (In Russian). DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
25. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. A class of exact solutions for two–dimensional equations of geophysical hydrodynamics with two Coriolis parameters. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*, 2020, 32, 33–48. (In Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
26. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2020, 3, 29–46. DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046. Available at: http://dream-journal.org/issues/2020-3/2020-3_291.html
27. Zyryanov, V.N. *Teoriya ustanovivshikhsya okeanicheskikh techeniy* [The Theory of Steady Ocean Currents]. Gidrometeoizdat Publ., Leningrad, 1985, 248 p. (In Russian).
28. Korotaev, G.K., Mikhailova, E.N., and Shapiro, N.B. *Teoriya ekvatorialnykh protivotecheniy v Mirovom okeane* [Theory of Equatorial Countercurrents in the World's Oceans]. Naukova Dumka Publ., Kiev, 1986, 208 p. (In Russian).
29. Monin, A.S. *Teoreticheskie osnovy geofizicheskoy gidromekhaniki* [Fundamentals of Geophysical Fluid Dynamics]. Gidrometeoizdat Publ., Leningrad, 1988, 424 p. (In Russian).
30. Pedlosky, J. *Geophysical fluid dynamics*, Springer–Verlag, Berlin, New York, 1987, 710 p.
31. Ostroumov, G.A. Free convection under the condition of the internal problem, NACA Technical Memorandum 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1958.
32. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, 7 (3), 43–44. DOI: 10.1007/BF00914697.
33. Burmasheva, N.V., Larina, E.A., and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer. *AIP Conference Proceedings*, 2019, 2176, 030023. DOI: 10.1063/1.5135147.
34. Aristov, S.N. and Nycander, J. Convective flow in baroclinic vortices. *Journal Physical Oceanography*, 1994, 24 (9), 1841–1849. DOI: 10.1007/BF00914697.
35. Sidorov, A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, 30 (2), 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
36. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy Currents in Thin Liquid Layers: Doctoral Thesis]. Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
37. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2020, 54 (1), 230–239. DOI: 10.1134/S0040579519060034.
38. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, 23 (2), 341–360. DOI: 10.14498/vsgtu1670.

39. Aristov, S.N., Knyazev, D.V., and Polyandin, A.D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, 43 (5), 642. DOI: 10.1134/S0040579509050066.
40. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15, 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.
41. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Nusselt–Couette–Poiseuille flow. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2022, 56 (5), 662–668. DOI: 10.1134/S0040579522050207.
42. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solution of the Couette–Poiseuille type for steady concentration flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, 164 (4), 285–301. (In Russian). DOI: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301.
43. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows. *Dynamics*, 2022, 2 (4), 367–379. DOI: 10.3390/dynamics2040021.
44. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for steady convective layered flows with a spatial acceleration. *Russian Mathematics*, 2021, 65 (7), 8–16. DOI: 10.3103/S1066369X21070021.
45. Burmasheva, N.V., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition. *Sādhanā*, 2021, 46, 55. DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.
46. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect. *Journal of King Saud University – Science*, 2020, 32 (8), 3364–3371. DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
47. Bekezhanova, V.B. and Goncharova, O.N. Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation. *Journal of Physics: Conference Series*, 2017, 894, 012023. DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012023.
48. Bekezhanova, V. and Goncharova, O. Problems of evaporative convection (review). *Fluid Dynamics*, 2018, 53, S69–S102. DOI:10.1134/S001546281804016X.
49. Bekezhanova, V. and Goncharova, O. Theoretical analysis of the gravity impact on the parameters of flow regimes with inhomogeneous evaporation based on an exact solution of convection equations. *Microgravity Science and Technology*, 2022, 34, 88. DOI: 10.1007/s12217-022-10006-z.
50. Dikanskii, Yu.I., Bedzhanyan, M.A., Kolesnikova, A.A., Gora, A.Yu., and Chernyshev, A.V. Dynamic effects in a magnetic fluid with microdrops of concentrated phase in a rotating magnetic field. *Technical Physics*, 2019, 64 (3), 337–341. DOI: 10.1134/S1063784219030113.
51. Polunin, V.M., Ryapolov, P.A., Platonov, V.B., Sheldeshova, E.V., Karpova, G.V., and Arefev, I.M. Elasticity of a magnetic fluid in a strong magnetic field. *Acoustical Physics*, 2017, 63 (4), 416–423. DOI: 10.1134/S1063771017040108.
52. Pivovarov, D.E. Numerical investigation of natural convection in slope longitudinal air layer. *Trudy MAI*, 2013, 68. (In Russian). Available at: <http://www.mai.ru/science/trudy/>
53. Shablovsky, O.N. Spherical flow of an ideal fluid in a spatially nonuniform field of force. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2020, 64, 146–155. (In Russian). DOI 10.17223/19988621/64/11.
54. Kozlov, V.G., Kozlov, N.V., and Subbotin, S.V. Motion of fluid and a solid core in a spherical cavity rotating in an external force field. *Doklady Physics*, 2014, 59, 40–44. DOI: 10.1134/S1028335814010078.
55. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, 2, 30–51. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. Available at: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html

56. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional thermocapillary flows of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. *AIP Conference Proceedings*, 2019, 2176, 030002. DOI: 10.1063/1.5135126.
57. Burmasheva, N.V., Larina, E.A., and Prosviryakov, E.Yu. A layered unidirectional flow of a viscous incompressible fluid induced in a closed layer by a nonuniform distribution of temperature and pressure fields, with allowance for the perfect slip condition. *AIP Conference Proceedings*, 2020, 2315, 020011. DOI: 10.1063/5.0036715.
58. Burmasheva, N. and Prosviryakov, E. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow. *Dynamics*, 2022, 2 (2), 175–186. DOI: 10.3390/dynamics2020009.
59. Burmasheva, N.V., Dyachkova, A.V., and Prosviryakov, E.Yu. Inhomogeneous Poiseuille flow. *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2022, 77, 68–85. (In Russian). DOI: 10.17223/19988621/77/6.
60. Dinariyev, O.Yu. and Nikolayevskii, V.N. Defining relations for a viscoelastic medium with microrotation. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1997, 61 (6), 987–994. DOI: 10.1016/S0021-8928(97)00127-5.
61. DeSilva, C.N. and Kline, K.A. Nonlinear constitutive equations for directed viscoelastic materials with memory. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*, 1968, 19 (1), 128–139. DOI: 10.1007/BF0160328419.
62. Allen, S.J., DeSilva, C.N., and Kline, K.A. Theory of simple deformable directed fluids. *Phys. Fluids*, 1967, 10 (12), 2551–2555. DOI: 10.1063/1.1762075.
63. Eringen, A.C. Linear theory of micropolar viscoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, 5, 191–204, DOI: 10.1016/0020-7225(67)90004-3.
64. Stokes, V.K. Couple stresses in fluids. *Phys. Fluids*, 1966, 9 (9), 1709–1715. DOI: 10.1063/1.1761925.
65. Stokes, V.K. *Theories of Fluids with Microstructure. An Introduction*. Springer, Berlin, Heidelberg, 1984, 212 p. DOI: 10.1007/978-3-642-82351-0.
66. Stokes, V.K. Effects of couple stresses in fluids on hydromagnetic channel flows. *Physics of Fluids*, 1968, 11, 1131–1133. DOI: 10.1063/1.1692056.
67. Stokes, V.K. On some effects of couple stresses in fluids on heat transfer. *J. Heat Transfer*, 1969, 91 (1), 182–184. DOI: 10.1115/1.3580094.
68. Asibor, R.E., Omokhuale, E. Micropolar fluid behavior with constant pressure, permeability, heat and mass transfer. *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*, 2017, 6 (12), 36–43.
69. Bég, O.A., Zueco, J., Takhar, H.S. Unsteady magnetohydrodynamic Hartmann–Couette flow and heat transfer in a Darcian channel with Hall current, ionslip, viscous and Joule heating effects: network numerical solutions. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2009, 14 (4), 1082–1097. DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.03.015.
70. Kocić, M., Stamenković, Ž., Petrović, J., and Bogdanović-Jovanović, J. Control of MHD flow and heat transfer of a micropolar fluid through porous media in a horizontal channel. *Fluids*, 2023, 8 (3), 93 (1–19). DOI: 10.3390/fluids8030093.
71. El-Kabeir, S.M.M., Modather, M., Mansour, M.A. Effect of heat and mass transfer on free convection flow over a cone with uniform suction or injection in micropolar fluids. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*, 2006, 11 (1), 15–35.
72. Rafique, Kh., Ibrar, N., Munir, A., Khalid A., Ijaz, A., and Asghar, A. Numerical analysis for energy transfer analysis of micropolar nanofluid by Keller box scheme. *Acta Scientific Applied Physics*, 2023, 3 (3), 36–44.
73. Xu, Q., Zhong, X. Strong solutions to the three-dimensional barotropic compressible magneto-micropolar fluid equations with vacuum. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 2021, 73 (1), 14. DOI: 10.1007/s00033-021-01642-3.

74. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses. *Symmetry*, 2021, 13, 1355 (1–12). DOI: 10.3390/sym13081355.
75. Cosserat, E. and Cosserat, F. *Théorie des Corps déformables*, A. Hermann et Fils, Paris, 1909, 226.
76. Aero, E.L., Bulygin, A.N. and Kuvshinski, E.V. Asymmetric hydromechanics. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1965, 29, 333–346. DOI: 10.1016/0021-8928(65)90035-3.
77. Eringen, A.C. Theory of micropolar fluids. *J. Math. Mech.*, 1966, 16 (1), 1–18.
78. Korn, G.A. and Korn, T.M. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers: Definitions, Theorems, and Formulas for Reference and Review*, Courier Corporation, North Chelmsford, 2013, 1152 p.

Подана в журнал: 23.01.2024

УДК 517.958



DOI: 10.17804/2410-9908.2024.3.041-063



ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ – СТОКСА ОДНОНАПРАВЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ МИКРОПОЛЯРНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЕ МАССОВЫХ СИЛ

Н. В. Бурмашева^a, Е. Ю. Просвиряков^b, *

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия*

*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002, Россия*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0003-4711-1894>  nat_burm@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Россия
Тел.: +7 (343) 375-35-76; факс: +7 (343) 374-53-30

В статье представлено семейство точных решений системы уравнений Навье – Стокса, используемой для описания неоднородных однонаправленных течений вязкой жидкости с учетом моментных напряжений. Несмотря на наличие только одной ненулевой компоненты вектора скорости, эта самая компонента зависит от времени и двух пространственных координат. Зависимость от третьей пространственной координаты отсутствует ввиду уравнения несжимаемости, являющегося частным случаем закона сохранения массы. Получающаяся переопределенная система уравнений рассматривается в нестационарной постановке. Построение семейства точных решений полученной переопределенной системы начинается с анализа однородного решения типа Куэтта как наиболее простого в этом классе. Далее структура решения постепенно усложняется: профиль единственной ненулевой компоненты вектора скорости представлен в виде полинома, зависящего от одной переменной (горизонтальной координаты). Коэффициенты полинома функционально зависят от второй (вертикальной) координаты и времени. Показано, что, ввиду сильной нелинейности и неоднородности исследуемого уравнения, сумма отдельных его решений не является решением. Также показано, что в линейно независимом базисе степенных функций горизонтальной координаты, определяющих вышеупомянутый полином, рассматриваемое уравнение распадается на цепочку простейших однородных и неоднородных уравнений в частных производных параболического типа. Данные уравнения интегрируются последовательно, порядок интегрирования отдельно описан. Результаты, изложенные в данной статье, обобщают ранее представленное авторами семейство точных решений для описания однонаправленных нестационарных течений.

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье – Стокса, неоднородное однонаправленное течение, моментные напряжения, микрополярные жидкости

1. Введение

При изучении несжимаемых течений вязких жидкостей для первоначальных исследований используют одномерное представление потока [1–14]. К однонаправленным течениям относятся многочисленные движения жидкости, сформировавшие классическое гидродинамическое представление о поперечной структуре течения [15–20]. Точное решение Куэтта,

точное решение Пуазейля, первая и вторая задачи Стокса, точное решение Нуссельта и ряд других аналитических результатов одномерной гидродинамики описываются для понимания механизмов переноса импульса в жидкости при постоянной температуре [1–6].

Профиль скорости Куэтта – Стокса – Пуазейля – Нуссельта $\mathbf{V} = (V_x(z, t), 0, 0)$ был использован для построения точного решения Экмана $\mathbf{V} = (V_x(z, t), V_y(z, t), 0)$, являющегося базовым для исследований в геофизической гидродинамике [21–30]. Выражение для поля скорости $\mathbf{V} = (V_x(z, t), 0, 0)$ использовалось для построения первых точных решений для описания однонаправленных конвективных течений различной природы [31–36]. К первым семействам точных решений относятся классы Остроумова – Бириха и Шлиомиса. Эти два класса точных решений описывают конвекцию в тепловом, диффузионном и термодиффузионном полях [37–46], а также конвективный перенос жидкой фазы с учетом испарения [47–49]. Пионерские результаты, полученные для описания одномерных потоков ньютоновских жидкостей, были обобщены для двумерных, плоских, сдвиговых и трехмерных потоков жидкостей, движущихся в различных силовых полях [41, 50–54]. В последнее время были получены точные решения уравнений Навье – Стокса для описания неоднородных однонаправленных течений [55–59].

Заметим, что подавляющее большинство исследований течений диссипативных жидкостей основано на применении общепринятых уравнений Навье – Стокса, дополненных уравнением непрерывности (несжимаемости) [13, 14, 20, 27–30]. Вывод уравнений Навье – Стокса основан на постулатах (гипотезах) ньютоновской механики континуальных сред, где каждая жидкая частица рассматривается как материальная («жирная») точка. Заменяя представительный объем сплошной среды материальной точкой, по умолчанию считают, что он имеет три степени свободы (трансляционные степени свободы, описывающие поступательное движение).

Использование такого подхода накладывает ограничения на исследования изменений вязкости жидкости, коэффициентов трения и других поверхностных эффектов [60–63]. Упомянутые в пионерских статьях [64–67] отличия, полученные в экспериментальных и теоретических исследованиях, обусловлены игнорированием вращательных (ориентационных) степеней свободы представительного объема сплошной среды.

Учет дополнительных степеней свободы элементарного объема деформируемых сред (континуумов) приводит к тому, что напряжения Коши не уравниваются друг друга. В этом случае тензор вязких напряжений становится несимметричным, поскольку появляются добавочные напряжения из-за учета деформационных свойств скоростей завихренности элементарных объемов жидкости. В настоящее время такие среды называют микрополярными [68–74]. Применительно к упругим телам среды с дополнительными касательными напряжениями впервые были описаны в монографии [75]. Можно констатировать, что микрополярные жидкости начали изучать только с середины шестидесятых годов прошлого столетия [76, 77].

В работе [76] были не только выведены уравнения Навье – Стокса для описания жидкостей с представительным объемом, имеющим шесть степеней свободы, но и построены и исследованы первые точные решения. С момента публикации работы [76] исследовались установившиеся и неустановившиеся течения микрополярных вязких несжимаемых жидкостей в точной постановке для однонаправленных потоков. Обобщение точных решений для ньютоновских жидкостей на микрополярные среды было проведено для течения Куэтта, первой и второй задач Стокса, течения Пуазейля и их комбинаций и модификаций.

В данной статье осуществляется построение классов точных решений для неоднородных однонаправленных течений жидкостей типа Коссера в трехмерном силовом поле. Показана важность учета нелинейных слагаемых по части координат для профиля скорости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим трехмерное установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости в поле сил $\rho \mathbf{f}$. Согласно теореме Гельмгольца, векторное поле $\rho \mathbf{f}$ может быть представлено в виде аддитивной комбинации соленоидального и потенциального полей: $\rho \mathbf{f} = \rho \mathbf{F} - \nabla \Phi$ [78]. Система определяющих соотношений для описания движения сплошной среды состоит из векторного уравнения Навье – Стокса, в котором элементарная жидкая частица описывается симметричным и антисимметричным тензорами касательных напряжений, и уравнения несжимаемости (непрерывности):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} - \mu \Delta \Delta \mathbf{V} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0.$$

Здесь в системе уравнений (1) введены обозначения: $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ – вектор скорости, $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ – вектор массовых сил, нормированных на постоянную плотность; P – нормированное на плотность жидкости давление, к которому добавлен потенциал консервативных сил; ν – кинематическая вязкость; μ – вязкость, обусловленная наличием моментных напряжений для представительного объема среды; $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ – трехмерный оператор Гамильтона;

$\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – трехмерный оператор Лапласа; $\operatorname{div} = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}$ – дивергенция вектора; $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2}$ – бигармонический оператор.

Перепишем систему уравнений (1) в координатной форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x - \\ &- \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_x + F_x, \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_y - \\ &- \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_y + F_y, \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_z - \\ &- \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_z + F_z, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (2)$$

В случае однонаправленных течений $\mathbf{V} = (V_x(x, y, z, t), 0, 0)$ система (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} = & -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x - \\ & -\mu \left(\frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial z^2} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_x + F_x, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = F_y, \quad (4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = F_z, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} = 0. \quad (6)$$

Требование, предъявляемое уравнением (6), приводит к уточнению структуры искомого решения:

$$V_x = V_x(y, z, t). \quad (7)$$

Учет вида (7) искомой скорости позволяет упростить уравнение (3):

$$\frac{\partial V_x}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x - \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} \right) V_x + F_x. \quad (8)$$

Частный случай системы (4)–(8) – изобарические течения без учета массовых сил в бесконечном горизонтальном слое – был рассмотрен ранее [55].

3. Точное решение

Одна из наиболее простых форм, отвечающих условию (7), – это представление скорости в форме нестационарного однородного течения Куэтта [1]:

$$V_x = U(z, t). \quad (9)$$

Учет выражения (9) в уравнении (8) приводит к следующей редукции:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + F_x. \quad (10)$$

Уравнение (10) для определения скорости течения представляет собой неоднородное линейное уравнение в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x. \quad (11)$$

Помимо этого, течение Куэтта подразумевает отсутствие перепада давления в слое жидкости, поэтому давление описывается следующей зависимостью:

$$P = P_0(z, t). \quad (12)$$

Подстановка выражения (12) в уравнение (11) приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} - \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = F_x. \quad (13)$$

При этом заметим, что решение уравнения (13) имеет место, только если проекция вектора массовых сил не зависит от продольных координат:

$$F_x = F_x(z, t).$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{d^4 U}{dz^4} - \frac{\nu}{\mu} \frac{d^2 U}{dz^2} = 0. \quad (14)$$

Данное уравнение является частным случаем уравнения (13), который имеет место при описании установившихся течений с массовыми силами, действующими перпендикулярно к направлению оси Ox (например, строго вертикально).

Характеристическое уравнение, отвечающее однородному обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка с постоянными коэффициентами (14), имеет вид

$$\left(\lambda^2 - \frac{\nu}{\mu} \right) \lambda^2 = 0.$$

Значит, общее решение представимо в виде

$$U = c_1 z + c_2 + c_3 \exp\left(z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + c_4 \exp\left(-z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right). \quad (15)$$

Заметим, что так просто получить решение, как это было при выводе выражения (15), не получится, если в жидкости присутствует горизонтальный перепад давления, то есть когда структура давления не отвечает представлению (12). Другими словами, при учете перепада давления при рассмотрении поля скорости (9) (то есть течения Куэтта – Пуазейля) необходимо знать распределение градиента давления, чтобы построить точное решение для поля скорости.

Рассмотрим теперь другое частное решение уравнения (8) для поля скорости:

$$V_x = u_1(z, t). \quad (16)$$

С учетом того факта, что скорость (16) линейно зависит от переменной y , а в уравнении (8) присутствуют производные минимум второго порядка по этой переменной, несложно показать, что для решения (16) уравнение (8) сводится к уравнению вида (10):

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4} + F_x. \quad (17)$$

Очевидно, что вид решения уравнения (17) зависит от функционального представления силы и давления, определяющих структуру неоднородности в уравнении (17).

Рассмотрим сумму решений (9) и (16), т. е. решение вида

$$V_x = U(z, t) + yu_1(z, t). \quad (18)$$

Решение вида (18) описывает течение типа неоднородного течения Куэтта. Ввиду линейной зависимости выражения (18) от продольной координаты y , уравнение (8) для выражения (17), так же как и для выражений (9) и (16), сводится к виду (10) или (17):

$$\frac{\partial(U + yu_1)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2(U + yu_1)}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4(U + yu_1)}{\partial z^4} + F_x. \quad (19)$$

Но сама сумма (17) как решение уравнения (19) не является суммой решений вида (9) и (16) ввиду неоднородности самого уравнения, к которому сводится уравнение (8) (т. е. к уравнению вида (10), (17) или (19)).

Рассмотрим еще более сложное по структуре решение уравнения (8):

$$V_x = \frac{y^2}{2} u_2(z, t). \quad (20)$$

Подставим решение (20) в уравнение (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\left(\frac{y^2}{2} u_2\right)}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \left(\frac{y^2}{2} u_2\right) - \mu \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2}\right) \left(\frac{y^2}{2} u_2\right) + F_x, \\ \frac{y^2}{2} \frac{\partial u_2}{\partial t} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(u_2 + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}\right) - \mu \left(2\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{y^2}{2} \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4}\right) + F_x. \end{aligned} \quad (21)$$

Очевидно, что уравнение (21) имеет структуру, отличную от уравнений вида (10):

$$\frac{\partial\left(\frac{y^2}{2} u_2\right)}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2\left(\frac{y^2}{2} u_2\right)}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4\left(\frac{y^2}{2} u_2\right)}{\partial z^4} + F_x + \nu u_2 - 2\mu \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2}.$$

Соответственно, подстановка в уравнение (8) суммы вида

$$V_x = U(z, t) + yu_1(z, t) + \frac{y^2}{2} u_2(z, t) \quad (22)$$

будет приводить к необходимости решения уравнения вида, отличного от уравнения типа (10). Та же тенденция будет сохраняться и при повышении степени полинома.

Рассмотрим более общее решение [55, 74]:

$$V_x = U(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} u_k(z, t). \quad (23)$$

В формуле (23) $k!$ обозначает взятие факториала от натурального числа k .

Посчитаем отдельно частные производные, необходимые для подстановки в уравнение (8):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial t} &= \frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} &= \sum_{k=2}^n \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} u_k = u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} u_{k+2}, \\ \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) V_x &= u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2}, \\ 2 \frac{\partial^4 V_x}{\partial y^2 \partial z^2} &= 2 \sum_{k=2}^n \frac{y^{k-2}}{(k-2)!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} = 2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^4 V_x}{\partial z^4} &= \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4}, \\ \frac{\partial^4 V_x}{\partial y^4} &= \sum_{k=4}^n \frac{y^{k-4}}{(k-4)!} u_k = u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} u_{k+4}, \\ \left(\frac{\partial^4}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4}{\partial z^4} \right) V_x &= u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} u_{k+4} + 2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} = \\ &= \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} \left(u_{k+4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} \right) + \\ &+ \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4}. \end{aligned}$$

Подставим вычисленные производные в уравнение (8):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} \left(u_{k+4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} \right). \quad (24)$$

В частности, для решения системы (20) уравнение (24) принимает вид

$$\frac{y^2}{2!} \frac{\partial u_2}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x + v \left(u_2 + \frac{y^2}{2!} \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} \right) - \mu \left(2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + \frac{y^2}{2!} \frac{\partial^4 u_2}{\partial z^4} \right),$$

что явно совпадает с ранее полученным уравнением (21).

Также заметим, что ввиду линейной независимости базисных функций y, y^2, \dots, y^n уравнение (24) можно было бы разделить на систему уравнений, если структура функций $\left(-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x \right)$ подразумевала подобное деление по степеням переменной y .

Пусть разность $\left(-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x \right)$ в соответствии с решением (23) представима в виде полинома n -ой степени по переменной y :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x = S(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k(z, t). \quad (25)$$

Подставим выражение (25) в полученное уравнение (24):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} \frac{\partial u_k}{\partial t} = S + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 + \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{y^k}{k!} u_{k+2} + \frac{y^k}{k!} \frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 + \sum_{k=1}^{n-4} \frac{y^k}{k!} \left(u_{k+4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} \right) \right) - \mu \left(\frac{y^{n-3}}{(n-3)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} \left(2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} + \frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} \right) + \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4} + \frac{y^n}{n!} \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4} \right).$$

Данное уравнение распадается на систему уравнений, полученных путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной y в левой и правой частях данного уравнения:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S + v \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + u_2 \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} + u_4 \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_k}{\partial t} &= s_k + v \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2} + u_{k+2} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 u_k}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_{k+2}}{\partial z^2} + u_{k+4} \right), \quad k = 1, \dots, n-4, \\ \frac{\partial u_{n-3}}{\partial t} &= s_{n-3} + v \left(\frac{\partial^2 u_{n-3}}{\partial z^2} + u_{n-1} \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 u_{n-3}}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_{n-2}}{\partial t} &= s_{n-2} + v \left(\frac{\partial^2 u_{n-2}}{\partial z^2} + u_n \right) - \mu \left(\frac{\partial^4 u_{n-2}}{\partial z^4} + 2 \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial u_{n-1}}{\partial t} &= s_{n-1} + v \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_{n-1}}{\partial z^4}, \\ \frac{\partial u_n}{\partial t} &= s_n + v \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_n}{\partial z^4}. \end{aligned} \quad (26)$$

Посмотрим теперь на структуру выражения (25) как на дифференциальное уравнение для определения давления:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial P}{\partial x} + F_x &= S(z, t) + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k(z, t), \\ \frac{\partial P}{\partial x} &= F_x - S(z, t) - \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k(z, t), \\ P &= \int F_x dx - \left(S + \sum_{k=1}^n \frac{y^k}{k!} s_k \right) x. \end{aligned} \quad (27)$$

Строго говоря, функция F_x может зависеть от всех пространственных координат:

$$F_x = F_x(x, y, z, t). \quad (28)$$

Поэтому при вычислении неопределенного интеграла в правой части выражения (27) в качестве констант интегрирования появится некоторая функция $\varphi(y, z, t)$, не зависящая от координаты x . Для определения структуры функции φ подставим выражение (27) в уравнения (4), (5):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = F_y, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = F_z.$$

Таким образом, по заданному распределению объемных сил F находим решение рассматриваемой системы.

4. Течение жидкости по наклонной поверхности

В качестве примера рассмотрим однонаправленное течение Нуссельта (рис. 1) [41].

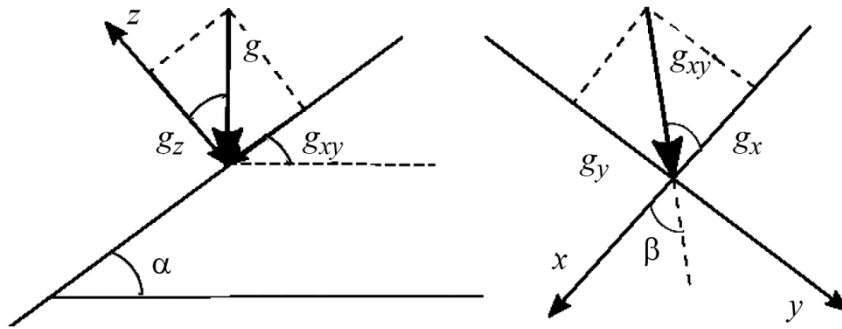


Рис. 1. Схема течения жидкости

Распределение объемных сил в этом случае имеет вид

$$F_x = g \sin \alpha \cos \beta, \quad F_y = g \sin \alpha \sin \beta, \quad F_z = g \cos \alpha. \quad (29)$$

Поле скоростей будем искать в виде полинома первой степени:

$$V_x = U(z) + u_1(z)y. \quad (30)$$

Для решения типа (30) система (26) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = S + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = s_1 + \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4}. \quad (31)$$

Для решения системы (31) нужно найти компоненты S, s_1 . Для их нахождения используем сначала формулу (25) и ее следствие (27):

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + F_x = S + s_1 y, \quad (32)$$

$$P = \int F_x dx - (S + s_1 y)x = g \sin \alpha \cos \beta x - (S + s_1 y)x + \varphi(y, z, t). \quad (33)$$

Далее подставим выражение (33) для давления сначала в уравнение (4):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \sin \alpha \cos \beta x - (S + s_1 y)x + \varphi(y, z, t))}{\partial y} &= g \sin \alpha \sin \beta, \\ -s_1 x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= g \sin \alpha \sin \beta, \\ \varphi &= s_1 xy + g \sin \alpha \sin \beta y + \psi(z, t). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставим выражение (34) в формулу (33) для давления:

$$P = g \sin \alpha \cos \beta x - (S + s_1 y)x + s_1 xy + g \sin \alpha \sin \beta y + \psi(z, t),$$

$$P = g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y - Sx + \psi(z, t). \quad (35)$$

Теперь подставим уточненную структуру поля давления (35) в оставшееся уравнение (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial (g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y - Sx + \psi(z, t))}{\partial z} &= g \cos \alpha, \\ -\frac{\partial S}{\partial z} x + \frac{\partial \psi}{\partial z} &= g \cos \alpha, \\ \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial S}{\partial z} x + g \cos \alpha, \\ \psi &= Sx + g \cos \alpha z + \zeta(t). \end{aligned} \quad (36)$$

Перепишем выражение решение (35) с учетом полученной связи (36):

$$\begin{aligned} P &= g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y - Sx + (Sx + g \cos \alpha z + \zeta(t)), \\ P &= g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y + g \cos \alpha z + \zeta(t). \end{aligned} \quad (37)$$

Осталось определить структуру функций S, s_1 , чтобы решить систему (31) и найти тем самым решение для поля скорости. Для этого подставим в выражение (32) найденное решение (37) и выражения (29):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial (g \sin \alpha \cos \beta x + g \sin \alpha \sin \beta y + g \cos \alpha z + \zeta(t))}{\partial x} + g \sin \alpha \cos \beta &= S + s_1 y, \\ S + s_1 y &= 0. \end{aligned}$$

Значит, $S = s_1 = 0$. Тогда система (31) принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 U}{\partial z^4}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 u_1}{\partial z^4}. \quad (38)$$

Заметим, что если отбросить дополнительную степень свободы, связанную с возможностью вращения элементарного объема жидкости (положить $\mu = 0$), то в случае установившихся течений система (38) примет вид системы (9), приведенной в работе [41].

Уравнения системы (38) имеют одинаковую структуру:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \mu \frac{\partial^4 f}{\partial z^4}. \quad (39)$$

Найдем решение уравнения (39) в классе функций вида $f = Z(z) \cdot T(t)$. В этом случае уравнение (39) примет вид

$$ZT' = (\nu Z'' - \mu Z^{(4)})T. \quad (40)$$

Получилось уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{T'}{T} = \frac{\nu Z'' - \mu Z^{(4)}}{Z}. \quad (41)$$

Отметим что переход от уравнения (40) к уравнению (41) справедлив только при $Z(z) \cdot T(t) \neq 0$. В противном случае имеем тривиальное (нулевое) решение, удовлетворяющее уравнению (40).

Уравнение (41) распадается на два независимых уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} = 0, \quad \frac{\nu Z'' - \mu Z^{(4)}}{Z} = 0, \\ T' = 0, \quad Z^{(4)} - \frac{\nu}{\mu} Z'' = 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы (с применением характеристического уравнения) имеет вид

$$T = \text{const}, \quad Z = c_1 z + c_2 + c_3 \exp\left(z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + c_4 \exp\left(-z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right).$$

Следовательно, решение уравнения (39) описывается следующей функцией:

$$Z = \bar{c}_1 z + \bar{c}_2 + \bar{c}_3 \exp\left(z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + \bar{c}_4 \exp\left(-z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right).$$

На основе полученного выражения легко строится решение для компонент поля скорости:

$$\begin{aligned} U &= A_1 z + A_2 + A_3 \exp\left(z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + A_4 \exp\left(-z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right), \\ u_1 &= B_1 z + B_2 + B_3 \exp\left(z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right) + B_4 \exp\left(-z \sqrt{\frac{\nu}{\mu}}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, полностью построено решение для описания однонаправленных течений в наклонном слое в классе скоростей, линейных по части координат.

5. Заключение

В работе построены классы точных решений для описания неоднородных однонаправленных течений жидкости с учетом моментных напряжений (течений типа Коссера) в трехмерном силовом поле произвольной структуры. Показано, насколько важно учитывать нелинейные слагаемые в представлении профиля скорости, поскольку в большинстве случаев они влияют на структуру определяющих уравнений модели течения. Показана связь с ранее опубликованными результатами, в том числе с решениями конкретных прикладных задач типа течения вязких жидкостей в наклонном протяженном слое в консервативном поле массовых сил.

Литература

1. Couette M. Etudes sur le frottement des liquids // Ann. Chim. Phys. – 1890. – Vol. 21. – P. 433–510.
2. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres // Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. – 1840. – Vol. 11. – P. 961–967.
3. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres // Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. – 1840. – Vol. 11. – P. 1041–1048.
4. Poiseuille J. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très-petits diamètres (suite) // Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. – 1841. – Vol. 12. – P. 112–115.
5. Stokes G. G. On the effect of the internal friction of fluid on the motion of pendulums // Camb. Philo. Trans. – 1851. – Vol. 9. – P. 8–106.
6. Nußelt W. Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge // Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure. – 1910. – Vol. 54. – P. 1154–1158.
7. Nagel Yu. A. Plane one-dimensional stationary flow of an ideal charged gas in its own electric field // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1971. – Vol. 12. – P. 19–26. – DOI: 10.1007/BF00853977.
8. Faskheev I. O. One-dimensional flow of a fluid through a porous skeleton with consideration of the Darcy and frontal pressure interaction forces // Moscow University Mechanics Bulletin. – 2013. – Vol. 68. – P. 21–24. – DOI: 10.3103/S0027133013010044.
9. Уоллис Г. Одномерные двухфазные течения / пер. с англ. – М. : Мир, 1972. – 440 с.
10. Борзенко Е. И., Шрагер Г. Р. Течения неньютоновской жидкости со свободной поверхностью. – Томск : Издательство Томского государственного университета, 2022. – 210 с.
11. Прокудин С. В., Софьин А. С., Агапов А. А. Аналитическое решение задачи одномерного стационарного течения сжимаемой жидкости и газа // Безопасность труда в промышленности. – 2017. – № 5. – С. 36–41. – DOI: 10.24000/0409-2961-2017-5-36-41.
12. Valiyev Kh. F., Kraiko A. N., Tillyayeva N. I. Stability of one-dimensional steady flows with detonation wave in a channel of variable cross-sectional area // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2020. – Vol. 60 (4). – P. 697–710. – DOI: 10.1134/S096554252004017X.
13. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. An exact solution to the description of a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Velocity field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2019. – Iss. 5. – P. 23–39. – DOI: 10.17804/2410-9908.2019.5.023-039. – URL: http://dream-journal.org/issues/2019-5/2019-5_259.html
14. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solution for describing a unidirectional Marangoni flow of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition. Pressure field investigation // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 2. – P. 61–75. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.2.061-075. – URL: http://dream-journal.org/issues/2020-2/2020-2_288.html
15. Bhaskar B. S., Chaudhary S. K. Review of fluid flow and heat transfer through porous media heat exchangers // International Journal of New Innovations in Engineering and Technology. – 2016. – Vol. 6 (2). – P. 28–42.
16. Singh H., Myong R. S. Critical review of fluid flow physics at micro- to nano-scale porous media applications in the energy sector // Advances in Materials Science and Engineering. – 2018. – Vol. 2018. – P. 9565240. – DOI: 10.1155/2018/9565240.
17. Coussot P. Yield stress fluid flows: a review of experimental data // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. – 2014. – Vol. 211. – P. 31–49. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2014.05.006.

18. Kiselev A. Diffusion and mixing in fluid flow: a review // *New Trends in Mathematical Physics* / ed by V. Sidoravičius. – Dordrecht : Springer, 2009. – DOI: 10.1007/978-90-481-2810-5_24.
19. Modal analysis of fluid flows: an overview / K. Taira, S. L. Brunton, S. T. M. Dawson, C. W. Rowley, T. Colonius, B. J. McKeon, O. T. Schmidt, S. Gordeyev, V. Theofilis, L. S. Ukeiley // *AIAA JOURNAL*. – 2017. – Vol. 55 (12). – P. 4013–4041. – DOI: 10.2514/1.J056060.
20. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // *Fluid Dynamics Research*. – 2021. – Vol. 53 (4). – P. 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
21. Smagorinsky J. History and progress // *The Global Weather Experiment—Perspective on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP)*. – National Academy of Science, 1978. – P. 4–12.
22. Smagorinsky, J. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: early recollections // *Advances in Geophysics*. Vol. 25 : *Theory of Climate* / ed. by B. Zaltzman. – Academic Press, 1983. – P. 3–37.
23. Smagorinsky J., Phillips N. A. Scientific problems of the global weather experiment // *The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP)*. – National Academy of Science, 1978. – P. 13–21.
24. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. – 2020. – Т. 26, № 2. – С. 79–87. – DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-79-87.
25. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса // *Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика»*. – 2020. – Т. 32. – С. 33–48. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.32.33.
26. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Isothermal layered flows of a viscous incompressible fluid with spatial acceleration in the case of three Coriolis parameters // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2020. – Iss. 3. – P. 29–46. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.3.029-046. – URL: http://dream-journal.org/issues/2020-3/2020-3_291.html
27. Зырянов В. Н. Теория установившихся океанических течений: Сращиваемые асимптотич. разложения: основы теории и приложения к задачам динамики океана. – Ленинград : Гидрометеиздат, 1985. – 248 с.
28. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. – Киев : Наукова думка, 1986. – 208 с.
29. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Ленинград : Гидрометеиздат, 1988. – 424 с.
30. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика : в 2 т. – М. : Мир, 1984. – 398 с.
31. Остроумов Г. А. Свободная конвекция в условиях внутренней задачи. – Москва ; Ленинград : Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1952. – 256 с.
32. Бирих Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // *Прикладная механика и техническая физика*. – 1966. – № 3. – С. 69–72.
33. Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer. – *AIP Conference Proceedings*. – 2019. – Vol. 2176. – P. 030023. – DOI: 10.1063/1.5135147.
34. Aristov S. N., Nycander J. Convective flow in baroclinic vortices // *Journal Physical Oceanography*. – 1994. – Vol. 24, No. 9. – С. 1841–1849.

35. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics.* – 1989. – Vol. 30 (2). – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
36. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости: дис. ... докт. физ.-мат. наук. – Владивосток, 1990.
37. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* – 2020. – Vol. 54 (1). – P. 230–239. – DOI: 10.1134/S0040579519060034.
38. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki.* – 2019. – Vol. 23 (2). – P. 341–360. – DOI: 10.14498/vsgtu1670.
39. Aristov S. N., Knyazev D. V., Polyanin A. D. Exact solutions of the Navier–Stokes equations with the linear dependence of velocity components on two space variables // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* – 2009. – Vol. 43 (5). – P. 642. – DOI: 10.1134/S0040579509050066.
40. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // *Symmetry.* – 2023. – Vol. 15. – P. 1730. – DOI: 10.3390/sym15091730.
41. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Inhomogeneous Nusselt–Couette–Poiseuille flow // *Theoretical Foundations of Chemical Engineering.* – 2022. – Vol. 56 (5). – P. 662–668. – DOI: 10.1134/S0040579522050207.
42. Бурмашева Н. В., Просвирыков Е. Ю. Точное решение типа Куэтта–Пуазейля для установившихся концентрационных течений // *Ученые записки Казанского университета. Серия «Физико-математические науки».* – 2022. – Т. 164, кн. 4. – С. 285–301. – DOI: 10.26907/2541-7746.2022.4.285-301.
43. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Influence of the Dufour effect on shear thermal diffusion flows // *Dynamics.* – 2022. – Vol. 2, No. 4. – P. 367–379. – DOI: 10.3390/dynamics2040021.
44. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for steady convective layered flows with a spatial // *Russian Mathematics.* – 2021. – Vol. 65 (7). – P. 8–16. – DOI: 10.3103/S1066369X21070021.
45. Burmasheva N. V., Privalova V. V., Prosviryakov, E. Yu. Layered Marangoni convection with the Navier slip condition // *Sādhanā.* – 2021. – Vol. 46. – Art. No. 55. – DOI: 10.1007/s12046-021-01585-5.
46. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. On Marangoni shear convective flows of inhomogeneous viscous incompressible fluids in view of the Soret effect // *Journal of King Saud University – Science.* – 2020. – Vol. 32, iss. 8. – P. 3364–3371. – DOI: 10.1016/j.jksus.2020.09.023.
47. Bekezhanova V. B., Goncharova O. N. Three-dimensional thermocapillary flow regimes with evaporation // *Journal of Physics: Conference Series.* – 2017. – Vol. 894. – DOI: 10.1088/1742-6596/894/1/012023.
48. Bekezhanova V., Goncharova O. Problems of evaporative convection (review) // *Fluid Dynamics.* – 2018. – Vol. 53. – P. S69–S102. – DOI: 10.1134/S001546281804016X.
49. Bekezhanova V., Goncharova O. Theoretical analysis of the gravity impact on the parameters of flow regimes with inhomogeneous evaporation based on an exact solution of convection equations // *Microgravity Science and Technology.* – 2022. – Vol. 34. – P. 88. – DOI: 10.1007/s12217-022-10006-z.
50. Dynamic effects in a magnetic fluid with microdrops of concentrated phase in a rotating magnetic field / Y. I. Dikanskii, M. A. Bedzhanyan, A. A. Kolesnikova, A. Yu. Gora, A. V. Chernyshev // *Technical Physics.* – 2019. – Vol. 64 (3). – P. 337–341. – DOI: 10.1134/S1063784219030113.
51. Elasticity of a magnetic fluid in a strong magnetic field / V. M. Polunin, P. A. Ryapolov, V. B. Platonov, E. V. Sheldeshova, G. V. Karpova, I. M. Arefyev // *Acoustical Physics.* – 2017. – Vol. 63 (4). – P. 416–423. – DOI: 10.1134/S1063771017040108.

52. Пивоваров Д. Е. Численное исследование конвективного теплообмена в наклонном продольном слое воздуха // Труды МАИ. – 2013. – № 68. – URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/>
53. Шабловский О. Н. Сферическое течение идеальной жидкости в пространственно-неоднородном силовом поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2020. – № 64. – С. 146–155. – DOI 10.17223/19988621/64/11.
54. Kozlov V. G., Kozlov N. V., Subbotin S. V. Motion of fluid and a solid core in a spherical cavity rotating in an external force field // *Doklady Physics*. – 2014. – Vol. 59. – P. 40–44. – DOI: 10.1134/S1028335814010078.
55. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions of the Navier–Stokes equations for describing an isobaric one-directional vertical vortex flow of a fluid // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2021. – Iss. 2. – P. 30–51. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.2.030-051. – URL: http://dream-journal.org/issues/2021-2/2021-2_316.html
56. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional thermocapillary flows of a viscous incompressible fluid with the Navier boundary condition // *AIP Conference Proceedings*. – 2019. – Vol. 2176. – 030002. – DOI: 10.1063/1.5135126.
57. Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. A layered unidirectional flow of a viscous incompressible fluid induced in a closed layer by a nonuniform distribution of temperature and pressure fields, with allowance for the perfect slip condition // *AIP Conference Proceedings*. – 2020. – Vol. 2315. – 020011. – DOI: 10.1063/5.0036715.
58. Burmasheva N., Prosviryakov E. Exact solutions to Navier–Stokes equations describing a gradient nonuniform unidirectional vertical vortex fluid flow // *Dynamics*. – 2022. – Vol. 2, No. 2. – P. 175–186. – DOI: 10.3390/dynamics2020009.
59. Бурмашева Н. В., Дьячкова А. В., Просвирыков Е. Ю. Неоднородное течение Пуазейля // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2022. – Т. 77. – С. 68–85. – DOI: 10.17223/19988621/77/6.
60. Динариев О. Ю., Николаевский В. Н. Определяющие соотношения для вязкоупругой среды с микровращениями // *Прикладная математика и механика*. – 1997. – Т. 61, № 6. – С. 1023–1030.
61. DeSilva C. N., Kline K. A. Nonlinear constitutive equations for directed viscoelastic materials with memory // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP*. – 1968. – Vol. 19 (1). – P. 128–139. – DOI: 10.1007/BF0160328419.
62. Allen S. J., DeSilva C. N., Kline K. A. Theory of simple deformable directed fluids // *Phys. Fluids*. – 1967. – Vol. 10 (12). – P. 551–2555. – DOI: 10.1063/1.1762075.
63. Eringen A. C. Linear theory of micropolar viscoelasticity // *International Journal of Engineering Science*. – Vol. 5. – P. 191–204. – DOI: 10.1016/0020-7225(67)90004-3.
64. Stokes V. K. Couple stresses in fluids // *Phys. Fluids*. – 1966. – Vol. 9, iss. 9. – P. 1709–1715. DOI: 10.1063/1.1761925.
65. Stokes V. K. *Theories of Fluids with Microstructure. An Introduction*. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1984. – 212 p. – DOI: 10.1007/978-3-642-82351-0.
66. Stokes V. K. Effects of couple stresses in fluids on hydromagnetic channel flows // *Physics of Fluids*. – 1968. – Vol. 11. – P. 1131–1133. – DOI: 10.1063/1.1692056.
67. Stokes V. K. On some effects of couple stresses in fluids on heat transfer // *J. Heat Transfer*. – 1969. – Vol. 91 (1). – P. 182–184. – DOI: 10.1115/1.3580094.
68. Asibor R. E., Omokhuale E. Micropolar fluid behavior with constant pressure, permeability, heat and mass transfer // *International Journal of Innovative Technology and Exploring Engineering*. – 2017. – Vol. 6 (12). – P. 36–43.
69. Bég O. A., Zueco J., Takhar H. S. Unsteady magnetohydrodynamic Hartmann–Couette flow and heat transfer in a Darcian channel with Hall current, ionslip, viscous and Joule heating effects: network numerical solutions // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. – 2009. – Vol. 14 (4). – P. 1082–1097. – DOI: 10.1016/j.cnsns.2008.03.015.

70. Control of MHD Flow and heat transfer of a micropolar fluid through porous media in a horizontal channel / M. Kocić, Ž. Stamenković, J. Petrović, J. Bogdanović-Jovanović // *Fluids*. – 2023. – Vol. 8, iss. 3. – P. 93. – DOI: 10.3390/fluids8030093.
71. El-Kabeir S. M. M., Modather M., Mansour M. A. Effect of heat and mass transfer on free convection flow over a cone with uniform suction or injection in micropolar fluids // *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. – 2006. – Vol. 11, No.1. – P. 15–35.
72. Numerical analysis for energy transfer analysis of micropolar nanofluid by Keller box scheme / Kh. Rafique, N. Ibrar, A. Munir, A. Khalid, A. Ijaz, A. Asghar // *Acta Scientific Applied Physics*. – 2023. – Vol. 3 (3). – P. 36–44.
73. Xu Q., Zhong X. Strong solutions to the three-dimensional barotropic compressible magneto-micropolar fluid equations with vacuum // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*. – 2021. – Vol. 73 (1). – Art. No. 14. – DOI: 10.1007/s00033-021-01642-3.
74. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // *Symmetry*. – 2021. – Vol. 13. – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
75. Cosserat E., Cosserat F. *Théorie des Corps déformables*. – Paris : A. Hermann et Fils, 1909. – P. 226.
76. Aero E. L., Bulygin A. N., Kuvshinski E. V. Asymmetric hydromechanics // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – 1965. – Vol. 29. – P. 333–346. – DOI: 10.1016/0021-8928(65)90035-3.
77. Eringen A. C. Theory of micropolar fluids // *J. Math. Mech.* – 1966. – Vol. 16 (1). – P. 1–18.
78. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения. Теоремы. Формулы / пер. с англ. – 6-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2003. – 831 с.