

**Received:** 31.03.2023

**Revised:** 22.05.2023



**Accepted:** 23.06.2023



**DOI:** 10.17804/2410-9908.2023.3.006-016



## THE IMPACT OF FLOW INDUCED BY ROTATING MAGNETIC FIELDS ON PROCESSES IN A MOLTEN CONDUCTIVE MEDIUM



R. I. Khalilov<sup>a)</sup>, A. D. Mamykin<sup>b)</sup>, R. S. Okatev<sup>c)</sup>, and I. V. Kolesnichenko<sup>d), \*</sup>

*Institute of Continuous Media Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
1 Ak. Koroleva St., Perm, 614068, Russia*

<sup>a)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-4244-4630>  [khalilov@icmm.ru](mailto:khalilov@icmm.ru);

<sup>b)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-8213-0260>  [mad@icmm.ru](mailto:mad@icmm.ru);

<sup>c)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2741-1531>  [okatev.r@icmm.ru](mailto:okatev.r@icmm.ru);

<sup>d)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-9378-5334>  [kiv@icmm.ru](mailto:kiv@icmm.ru)

\*Corresponding author. E-mail: [kiv@icmm.ru](mailto:kiv@icmm.ru)

Address for correspondence: ul. Ak. Koroleva, 1, Perm, 614068, Russia

Tel.: +7 (342) 237-8387; fax: +7 (342) 237-8487

This paper studies a method of stirring liquid metal by the action of rotating magnetic fields using two ring inductors placed next to each other. These inductors generate magnetic fields rotating in opposite directions. The aim of this study is numerical investigation of the generated fluid flow and its impact on the homogenization of a two-phase medium, as well as on the crystallization process. The impact of these electromagnetic forces proves to cause the generation of intense poloidal flow component. The arising flow is accompanied by oscillatory motion of vortex structures and their interaction resulting in effective mixing of the liquid metal. The moderate values of the force parameter have been found to lead to the most homogeneous medium under stirring. Under non-stationary action, the force parameter modulations in a certain frequency range have practically no effect on the homogeneity occurrence time and the homogeneity value. The positive effect of stirring by magnetic fields of complex topology on the rate and homogeneity of metal solidification is stated. The obtained results are relevant for improving the quality of foundry ingots.

**Keywords:** electrodynamics of continua, magnetohydrodynamics, rotating magnetic field, electromagnetic stirring, crystallization

### Acknowledgment

*The work was performed according to government budget plan No. 122030200191-9 and supported by grants from the RFBR and Perm Krai, project No. 20-48-596015.*

### References

1. Kolesnichenko I., Pavlinov A., Golbraikh E., Frick P., Kapusta A., Mikhailovich B. The study of turbulence in MHD flow generated by rotating and traveling magnetic fields. *Experiments in Fluids*, 2015, vol. 56 (88). DOI: 10.1007/s00348-015-1957-z.
2. Moffatt H.K. Electromagnetic stirring. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 1991, vol. 3 (5), pp. 1336–1343. DOI: 10.1063/1.858062.
3. Gelfgat Yu.M., Priede J. MHD flows in a rotating magnetic field (a review). *Magnetohydrodynamics*, 1995, vol. 31, Nos. 1–2, pp. 188–200.
4. Stiller J., Koal K., Nagel W., Pal J., Cramer A. Liquid metal flows driven by rotating and traveling magnetic fields. *European Physical Journal: Special Topics*, 2013, vol. 220, No. 1, pp. 111–122. DOI: 10.1140/epjst/e2013-01801-8.

5. Denisov S.A., Mann M.E., Khripchenko S.Y. MHD stirring of liquid metal in cylindrical mould with free surface. *Magnetohydrodynamics*, 1997, vol. 33, No. 3, pp. 306–314.
6. Nikrityuk P.A., Ungarish M., Eckert K., Grundmann R. Spin-up of a liquid metal flow driven by a rotating magnetic field in a finite cylinder: a numerical and an analytical study. *Physics of Fluids*, 2005, vol. 17 (6), pp. 067101. DOI: 10.1063/1.1897323.
7. Vogt T., Grants I., Räßiger D., Eckert S., Gerbeth G. On the formation of Taylor-Görtler vortices in RMF-driven spin-up flows. *Experiments in Fluids*, 2012, vol. 52, pp. 1–10. DOI: 10.1007/s00348-011-1196-x.
8. Brannover G.G., Tsynober A.B. *Magnitnaya gidrodinamika neszhimayemykh sred* [Magnetohydrodynamics of Incompressible Media]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 379 c. (In Russian).
9. Frick P., Mandrykin S., Eltishchev V., Kolesnichenko I. Electro-vortex flows in a cylindrical cell under axial magnetic field. *Journal of Fluid Mechanics*, 2022, vol. 949, pp. A-20. DOI: 10.1017/jfm.2022.746.
10. Voller V.R., Prakash C. A fixed-grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1987, vol. 30, iss. 8, pp. 1709–1719. DOI: 10.1016/0017-9310(87)90317-6.
11. Brent A.D., Voller V.R., Reid K.J. Enthalpy–porosity technique for modeling convection–diffusion phase change: application to the melting of a pure metal. *Numerical Heat Transfer*, 1988, vol. 13 (3), pp. 297–318. DOI: 10.1080/10407788808913615.

Подана в журнал: 31.03.2023



УДК 537.84



DOI: 10.17804/2410-9908.2023.3.006-016



## ВЛИЯНИЕ ТЕЧЕНИЯ, ВЫЗВАННОГО ДЕЙСТВИЕМ ВРАЩАЮЩИХСЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ, НА ПРОЦЕССЫ В РАСПЛАВЛЕННОЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОЙ СРЕДЕ



Р. И. Халилов<sup>а)</sup>, А. Д. Мамыкин<sup>б)</sup>, Р. С. Окатьев<sup>в)</sup>, И. В. Колесниченко<sup>г)</sup>, \*

*Институт механики сплошных сред Уральского отделения Российской академии наук,  
ул. Академика Королева, 1, Пермь, 614068, Россия*

<sup>а)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-4244-4630>  khalilov@icmm.ru;

<sup>б)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-8213-0260>  mad@icmm.ru;

<sup>в)</sup>  <https://orcid.org/0000-0003-2741-1531>  okatev.r@icmm.ru;

<sup>г)</sup>  <https://orcid.org/0000-0001-9378-5334>  kiv@icmm.ru

\* Ответственный автор. Электронная почта: kiv@icmm.ru

Адрес для переписки: ул. Академика Королева 1, Пермь, 614068, Россия

Тел.: +7 (342) 237–83–87; факс: +7 (342) 237–84–87

В работе изучается способ перемешивания жидкого металла, состоящий в воздействии вращающимися магнитными полями с помощью двух расположенных рядом кольцевых индукторов. Один из них генерирует магнитное поле, вращающееся в одном направлении, а другой – в противоположном. Целью является численное изучение возникающего течения и его влияния на гомогенизацию двухфазной среды, а также на процесс кристаллизации. Обнаружено, что действие таких электромагнитных сил приводит к возникновению развитой интенсивной полоидальной компоненты течения. Возникающее течение сопровождается колебательным движением вихревых структур и взаимодействием между ними, приводящим к эффективному перемешиванию жидкого металла. Обнаружено, что умеренные значения силового параметра приводят к наиболее гомогенизованному составу среды при перемешивании. Получено, что при нестационарном воздействии модуляции силового параметра в некотором диапазоне частот практически не влияют на время выхода на гомогенное состояние и степень гомогенности. Установлено положительное влияние перемешивания магнитными полями комплексной топологии на темп и однородность застывания металла. Полученные результаты актуальны для повышения качества слитков при их литейном производстве.

**Ключевые слова:** электродинамика сплошных сред, магнитная гидродинамика, вращающееся магнитное поле, электромагнитное перемешивание, кристаллизация

### 1. Введение

Вращающиеся магнитные поля широко используются в литейном производстве для положительного влияния на структуру и однородность цилиндрических слитков в процессе кристаллизации. Их действие приводит к генерации интенсивных тороидальных турбулентных течений [1]. При этом использование только вращающегося магнитного поля приводит к квазитвердотельному вращающемуся течению жидкого металла. Такое течение в ячейке с твердыми торцевыми границами приводит к возникновению вторичного полоидального течения за счет т. н. экмановской подкачки [2], [3]. Основной проблемой в случае использования только вращающегося магнитного поля является слабая интенсивность полоидального течения, что приводит к неоднородности перемешивания. Один из способов интенсификации полоидального течения и, соответственно, перемешивания, состоит в добавлении бегущего

магнитного поля [4]. Это приводит к генерации интенсивных полоидальных турбулентных течений [1], [5]. Однако это позволяет реализовать только два типа течения с ограниченными возможностями управления их топологией. Также данная схема увеличивает размер и массу индуктора и ограничивает возможности изготовления разборного (по секциям) индуктора.

Еще одним подходом к улучшению перемешивания расплава является управление электропитанием индуктора для варьирования амплитуды полей. При этом генерируются нестационарные магнитные поля, что достигается модуляцией, сменой направления движения поля, либо чередованием включения и отключения питания. При этом возникает чередование разгона и торможения течения [6], что позволяет генерировать дополнительные моды течения за счет неустойчивости Тейлора–Гертлера [7]. Тем не менее описанными выше способами можно генерировать только классическое бегущее либо вращающееся магнитные поля. Одновременная реализация стационарных бегущего и вращающегося магнитных полей приводит к генерации спирального магнитного поля и электромагнитной силы сложной топологии, управлять которыми гораздо сложнее, чем бегущим или вращающимся полями по отдельности.

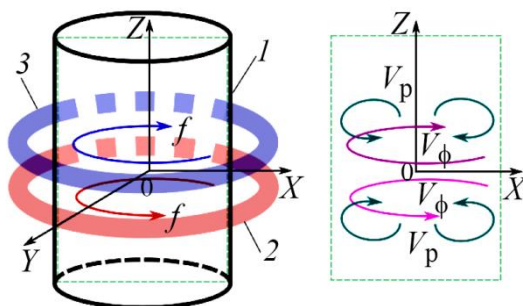


Рис. 1. Схематическое изображение конфигурации ячейки (слева) и генерируемого течения (справа): 1 – ячейка; 2, 3 – индукторы

Таким образом, проблема нахождения других способов усложнения топологии переменного магнитного поля и, как следствие, течения для достижения еще более эффективного перемешивания жидкого металла в цилиндрической ячейке является актуальной. В работе изучается способ перемешивания жидкого металла, состоящий в воздействии вращающимися магнитными полями с помощью двух расположенных рядом кольцевых индукторов (рис. 1). Один из них генерирует магнитное поле, вращающееся в одном направлении, а другой – в противоположном. Предполагается, что возникающие электромагнитные силы такой конфигурации будут создавать интенсивное сдвиговое течение с развитой турбулизацией потока. Преимуществом конструкции, которая реализует такие силы, является ее компактность по сравнению с традиционными аппаратами подобного типа. Она является разборной и состоит из секций. Такая структура позволяет интегрировать индукторы в существующие производственные процессы и аппараты без необходимости их модернизации и даже остановки. Целью работы является численное изучение возникающего течения и его влияния на гомогенизацию двухфазной среды, а также на процесс кристаллизации.

## 2. Материал и методика. Постановка задачи и методы решения

Математическая модель основана на уравнениях электродинамики сплошных сред, которые описывают процесс взаимодействия электрических и магнитных полей с движущимися электропроводными средами [8]. Электродинамическая часть математической модели основана на уравнениях Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}_c, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0. \quad (4)$$

Закон Ампера (1) описывает генерацию исходного магнитного поля с помощью обмоток индуктора. Здесь  $\mathbf{j}_c$  – переменная плотность тока, который течет по обмоткам,  $\mathbf{H}$  – напряженность переменного магнитного поля, созданного током обмоток. Плотность тока меняется во времени с частотой  $f$ . Действие магнитного поля  $\mathbf{H}$  на объемы со средами, имеющими разные значения магнитной проницаемости  $\mu$ , приводит к появлению в них намагниченности, что учитывается в выражении связи магнитной индукции и напряженности магнитного поля  $\mathbf{B} = \mu\mu_0\mathbf{H}$ . Для всех объемов, кроме ферромагнетиков, значение магнитной проницаемости  $\mu$  слабо отличается от единицы. Магнитная проницаемость ферромагнетика является константой, равной  $\mu = 3 \cdot 10^3$  Гн/м. Магнитные свойства внутри объемов являются однородными.

Переменное магнитное поле генерирует вихревое электрическое поле напряженностью  $\mathbf{E}$ , что описывается уравнением электромагнитной индукции (2). Уравнения (3) и (4) выражают условие соленоидальности электрического и магнитного полей. Ферромагнитные части индуктора изготовлены из тонких листов электротехнической стали, покрытых электроизолирующим лаком, а обмотки выполнены из тонкого провода, также имеющего электроизоляцию. Поэтому в работе пренебрегается генерацией вихревых токов в ферромагнетиках и обмотках. В объемах с жидким металлом и трубами этот процесс описывается законом Ома

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \quad (5)$$

Наличие электрического тока и магнитного поля в электропроводной среде приводит к появлению объемной электромагнитной силы

$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (6)$$

которую имеет смысл учитывать только в жидком металле. На границе между областями, в которых содержатся расплавленный металл и электропроводящие стенки каналов, ставятся граничные условия для нормальной и тангенциальной компонент плотности электрического тока:

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \sigma_2 j_{\tau 1} = \sigma_1 j_{\tau 2}, \quad (7)$$

где  $\sigma_i$  – электропроводность соответствующей среды. На границе между областями, в которых содержатся вещества, имеющие разные значения магнитной проницаемости, ставятся граничные условия для магнитной индукции:

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mu_2 B_{\tau 1} = \mu_1 B_{\tau 2} \quad (8)$$

Течение электропроводящей среды в рамках принятого безындукционного приближения описывается уравнением Навье–Стокса с учетом действия электромагнитной силы (9), а также уравнением неразрывности (10):

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{V} + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}, \quad (9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\nu$  – кинематическая вязкость, а  $\rho$  – плотность жидкого металла. Для описания турбулентности используется стандартная  $k-\omega$  модель. Выбор этой модели турбулентности обоснован ее успешным применением для решения задачи магнитной гидродинамики [9]. В ходе этих исследований выполнялась верификация по результатам экспериментов. В расчетах жидкость содержится в объеме, который представляет собой цилиндрический канал. На стенках канала ставится условие прилипания  $\mathbf{V} = 0$ . В качестве базового характерного значения действующих электромагнитных сил  $F_0$  взято такое, которое обеспечивается питанием обмоток индуктора током в 1 А с частотой 50 Гц.

Для реализации вычислений электродинамической части задачи использовался модуль Emag конечно-элементного программного комплекса Ansys. С помощью данного подхода с использованием языка APDL реализованы многовариантные расчеты, в ходе которых для заданной частоты и силы тока на обмотках индуктора по выражениям (1)–(4) определялись вихревые электрическое и магнитное поля, поля плотности тока и электромагнитной силы по (5) и (6) при учете граничных условий (7) и (8). Для реализации вычислений гидродинамической части задачи использовался пакет Fluent программного комплекса Ansys. Вычисления гидродинамической части задачи проводились на основе уравнений (9) и (10) с помощью метода конечных объемов. Для количественного сравнения интенсивности полоидальной и азимутальной компонент поля скорости на каждом временном шаге вычисляется кинетическая энергия этих компонент:

$$E_{\text{pol}} = \int_V (v_r^2 + v_z^2) dV, E_{\text{az}} = \int_V v_\varphi dV,$$

где  $v_r$  и  $v_z$  – радиальная и аксиальная компоненты поля скорости, составляющие полоидальную компоненту, а  $v_\varphi$  – азимутальная компонента. Общая кинетическая энергия равна сумме энергий компонент  $E_k = E_{\text{pol}} + E_{\text{az}}$ .

### 3. Результаты и обсуждение

Расчеты показали, что во всем диапазоне силовых параметров, для которых проводились исследования, сценарий развития течения следующий. Вначале формируется азимутально симметричное поле скорости, при этом интенсивность его кинетической энергии нарастает (рис. 2 а). Затем кинетическая энергия достигает стационарного значения, которое при большой величине силового параметра  $F = F_0$  сопровождается пульсациями, заметными на графиках эволюции кинетической энергии (рис. 2 б). Поля для малой величины силового параметра  $F = 0,01F_0$  позволяют ясно различить картину полоидальной и азимутальной компонент формирующегося течения. При большом значении силового параметра  $F = F_0$  вначале формируется набор вихрей, масштаб которых соответствует размеру каждого кольца обмоток вращающегося поля. Затем формируется нестационарное колебательное течение сложной формы. Таким образом, использование встречных вращающихся магнитных полей существенно усложняет вид азимутального и полоидального течений в цилиндрическом объеме электропроводной среды. Возникающее течение сопровождается колебательным движением вихревых структур и взаимодействием между ними. Это приводит к эффективному перемешиванию жидкого металла.

Исследовано влияние процесса электромагнитного перемешивания на поведение неэлектропроводной пассивной примеси. В каждом расчете задавалась сферическая область с примесью в центральной части цилиндрического канала (рис. 3). Электромагнитное пере-

мешивание в той или иной степени гомогенизирует состав этой двухфазной среды. В исследуемом диапазоне значений силового параметра  $F$  интенсивность перемешивающего течения была такова, что на процесс гомогенизации диффузия не оказывала существенного влияния. Степень гомогенности определялась через интегральный параметр однородности

$$T = \int_V (C - C^*) dV,$$

который показывает отклонение текущего состояния поля примеси  $C$  от однородного  $C^*$  в объеме со средой  $V$ . Чем меньше этот критерий, тем однороднее двухфазная среда. Обнаружено, что умеренные значения силового параметра приводят к наиболее гомогенизированному составу среды при перемешивании (рис. 4). Время выхода на стационарное значение степени гомогенности среды снижается с увеличением силового параметра  $F$ .

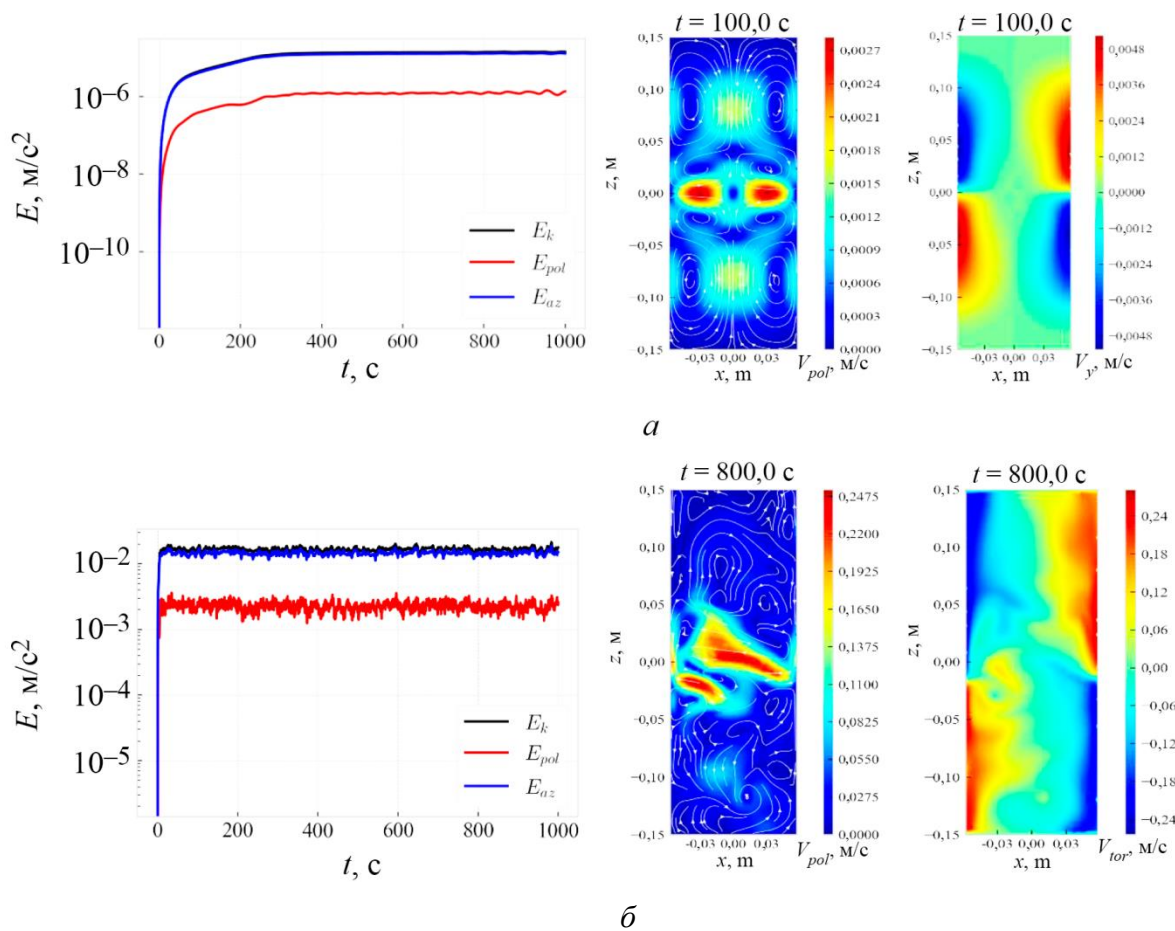


Рис. 2. Эволюция энергии (слева), распределение полоидальной (в центре) и тороидальной (справа) компонент скорости: а – малая величина силового параметра ( $F = 0,01 F_0$ ), б – большая величина силового параметра ( $F = F_0$ )

Исследовано влияние нестационарности силового воздействия на поведение пассивной примеси. Обнаружено, что при нестационарном воздействии модуляции силового параметра в некотором диапазоне частот практически не влияют на время выхода на гомогенное состояние и степень гомогенности (рис. 5, 6). Модуляции питания не улучшают процесс перемешивания, но и не ухудшают его. Тем не менее этот результат является чрезвычайно важным. Он показывает, что использование модуляции позволяет существенно экономить

энергию, необходимую для питания индуктора при применении технологии на металлургическом производстве.

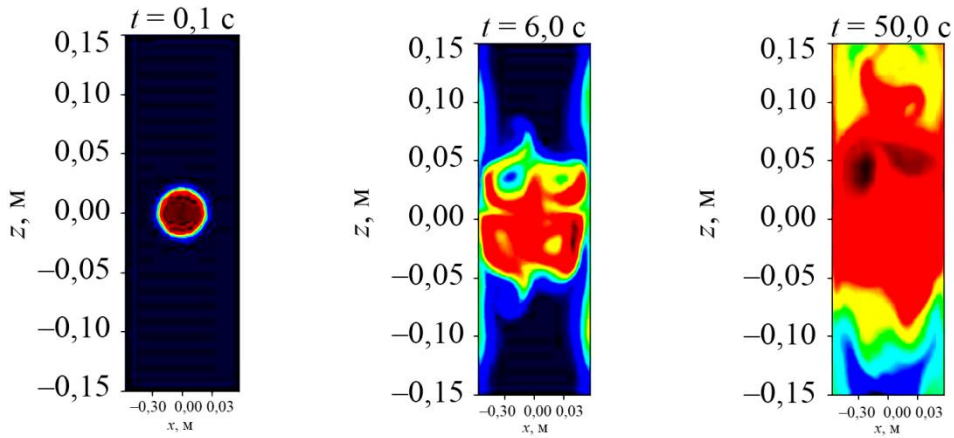


Рис. 3. Эволюция поля концентрации пассивной примеси в вертикальном аксиальном сечении при  $F = F_0$

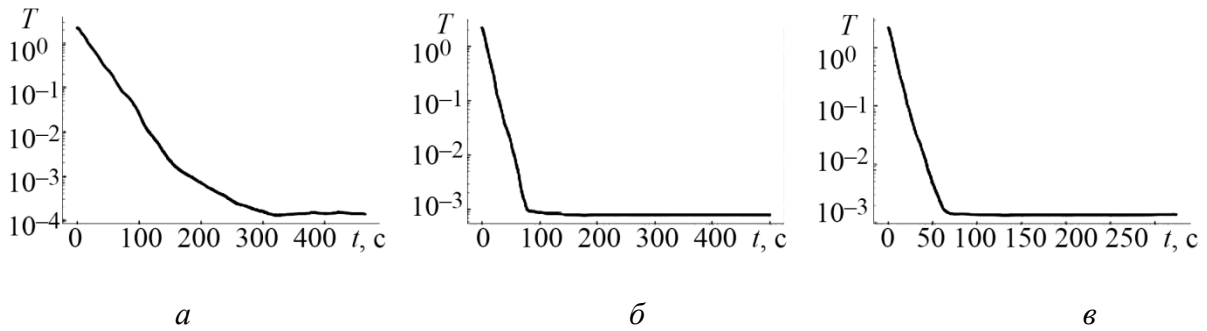


Рис. 4. Зависимости параметра однородности от времени для разных значений силового параметра:  $F = 0,1F_0$  (а);  $F = 0,5F_0$  (б);  $F = F_0$  (в)

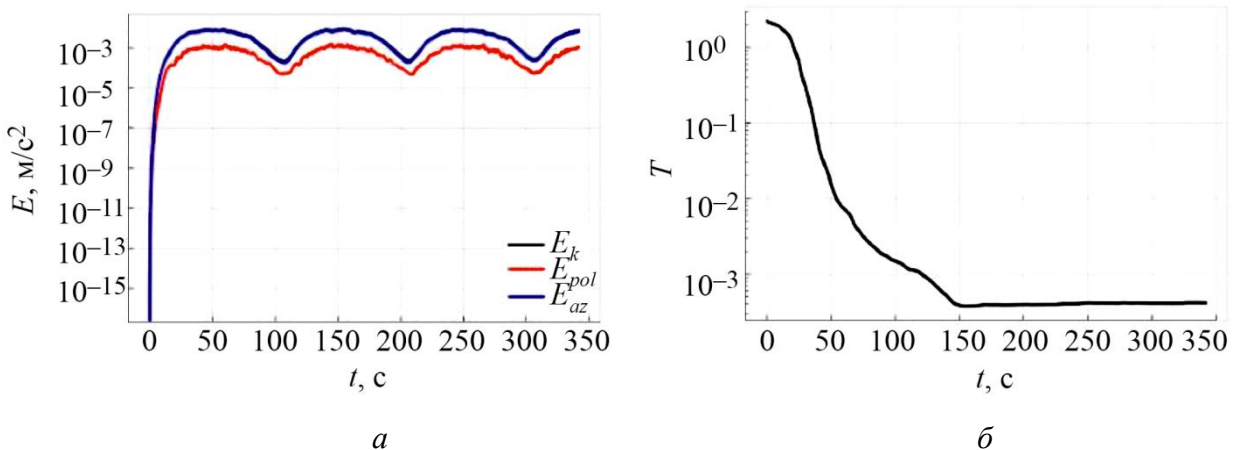


Рис. 5. Эволюция кинетической энергии (а) и зависимость параметра однородности от времени (б); период модуляции 100 с

Исследовано влияние описанного выше течения на процесс кристаллизации жидкого металла. Для моделирования процесса кристаллизации использована методика, в которой твердожидкая фаза моделируется с помощью пористой среды [10, 11]. Обнаружено, что при увеличении интенсивности перемешивания, т. е. при увеличении величины силового пара-



метра, происходит снижение темпа кристаллизации за счет более интенсивного выравнивания поля температуры (рис. 7). На этой диаграмме синий цвет соответствует твердой фазе. Анализ диаграмм показывает, что глубина промерзания (расстояние, на котором граница будет стабилизирована) также определяется интенсивностью перемешивания и уменьшается с ростом этой интенсивности. В случае слабой интенсивности перемешивания обнаружено наличие длинноволнового колебательного режима, при котором общая кинетическая энергия, а также граница раздела фаз колеблется вблизи равновесного положения (рис. 8–11).

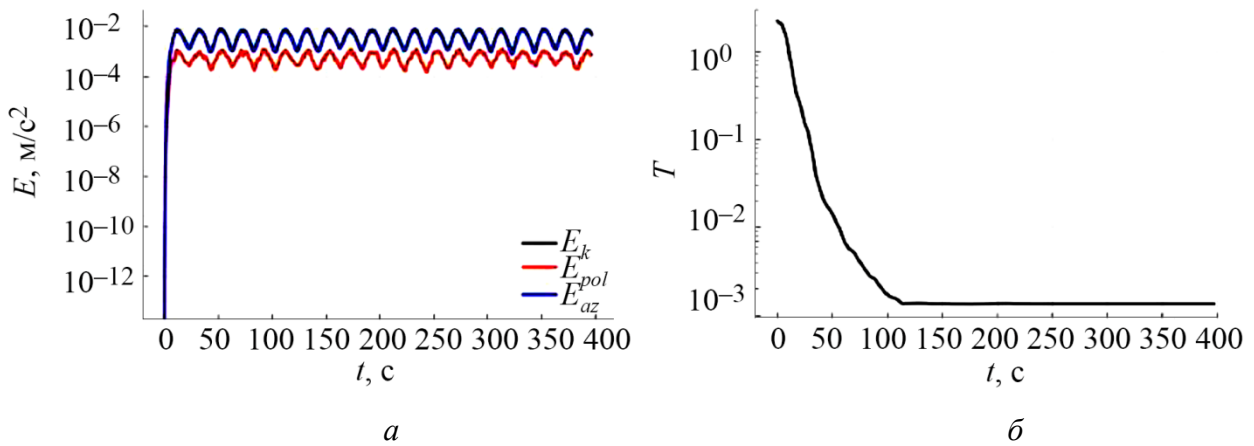


Рис. 6. Эволюция кинетической энергии (а) и зависимость параметра однородности от времени (б); период модуляции 20 с

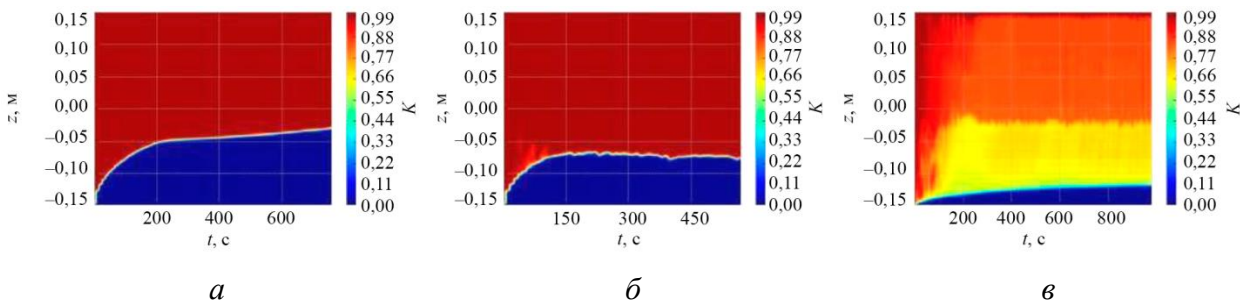


Рис. 7. Эволюционная диаграмма аксиального профиля, характеризующего фазу, для разных значений силового параметра:  $F = 0,01F_0$  (а);  $F = 0,1F_0$  (б);  $F = F_0$  (в)

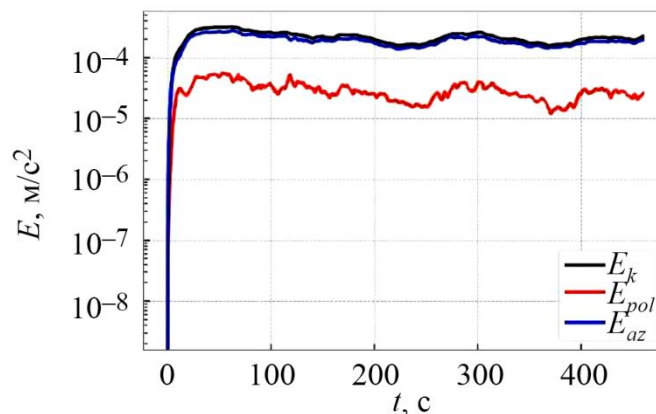


Рис. 8. Эволюция кинетической энергии в длинноволновом колебательном режиме

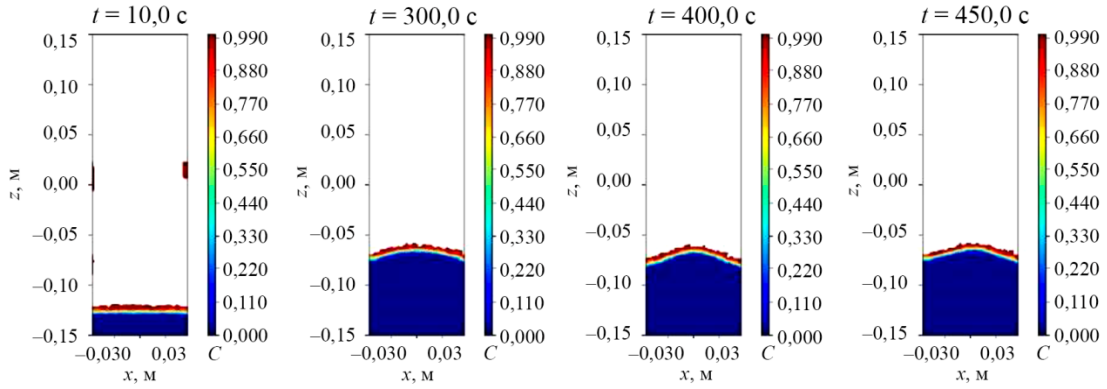


Рис. 9. Пример эволюции межфазной границы в вертикальном аксиальном сечении

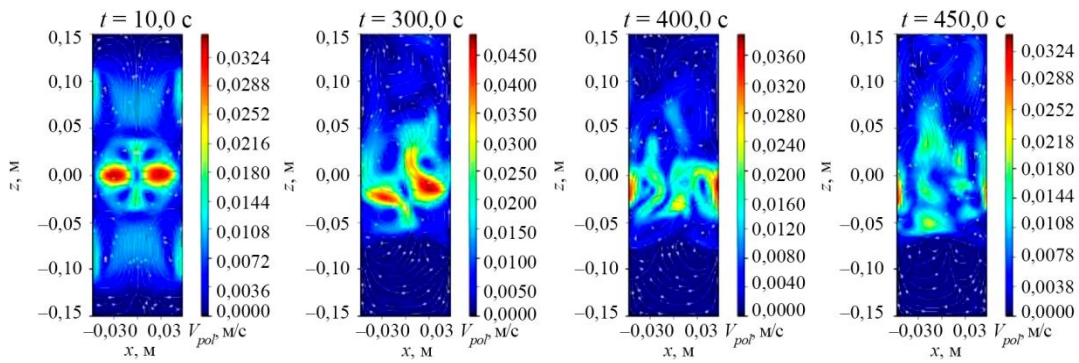


Рис. 10. Пример эволюции полоидальной компоненты скорости в вертикальном аксиальном сечении

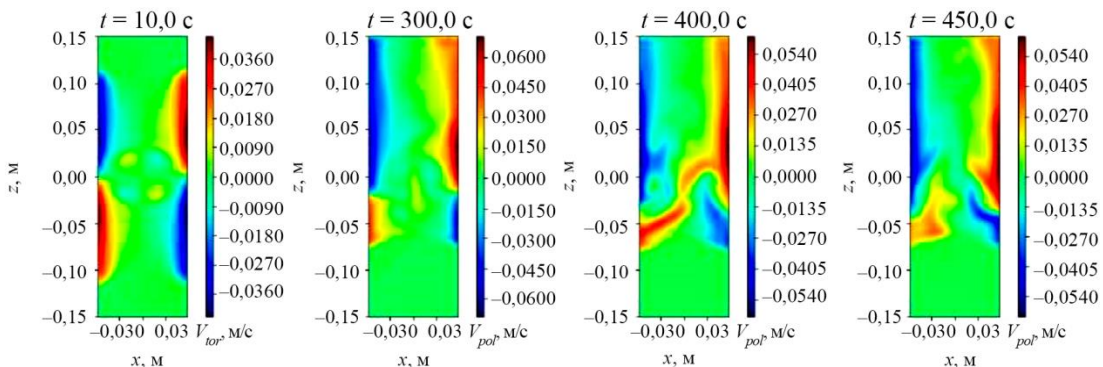


Рис. 11. Пример эволюции азимутальной компоненты скорости в вертикальном аксиальном сечении

#### 4. Заключение

Исследования показали, что режим с аксиальным чередованием направления вращения магнитного поля существенно усложняет вид азимутального и полоидального течений. Это приводит к возникновению развитой интенсивной полоидальной компоненты течения. Возникающее течение сопровождается колебательным движением вихревых структур и взаимодействием между ними. Это приводит к эффективному перемешиванию жидкого металла. Обнаружено, что умеренные значения силового параметра приводят к наиболее гомогенизированному составу среды при перемешивании. Время выхода на стационарное значение степени гомогенности среды снижается с увеличением силового параметра. Обнаружено, что при нестационарном воздействии модуляции силового параметра в некотором диапазоне ча-

стот практически не влияют на время выхода на гомогенное состояние и степень гомогенности. Найдены характеристики процесса в зависимости от режима перемешивания. Установлено положительное влияние перемешивания магнитными полями данного вида на скорость кристаллизации жидкого металла.

### Благодарность

*Работа выполнена в соответствии с госбюджетным планом № 122030200191-9 при поддержке гранта Российского Фонда Фундаментальных Исследований и Пермского края (проект р\_НОЦ\_Пермский край № 20-48-596015).*

### Литература

1. The study of turbulence in MHD flow generated by rotating and traveling magnetic fields / I. Kolesnichenko, A. Pavlinov, E. Golbraikh, P. Frick, A. Kapusta, B. Mikhailovich // Experiments in Fluids. – 2015. – Vol. 56 (88). – DOI: 10.1007/s00348-015-1957-z.
2. Moffatt H. K. Electromagnetic stirring // Physics of Fluids A: Fluid Dynamics. – 1991. – Vol. 3 (5). – P. 1336–1343. – DOI: 10.1063/1.858062.
3. Gelfgat Yu. M., Priede J. MHD flows in a rotating magnetic field (a review) // Magnetohydrodynamics. – 1995. – Vol. 31, Nos. 1–2. – P. 188–200.
4. Liquid metal flows driven by rotating and traveling magnetic fields / J. Stiller, K. Koal, W. Nagel, J. Pal, A. Cramer // European Physical Journal: Special Topics. – 2013. – Vol. 220, No. 1. – P. 111–122. – DOI: 10.1140/epjst/e2013-01801-8.
5. Denisov S. A., Mann M. E., Khripchenko S. Y. MHD stirring of liquid metal in cylindrical mould with free surface // Magnetohydrodynamics. – 1997. – Vol. 33, No 3. – P. 306–314.
6. Spin-up of a liquid metal flow driven by a rotating magnetic field in a finite cylinder: a numerical and an analytical study / P. A. Nikrityuk, M. Ungarish, K. Eckert, R. Grundmann // Physics of Fluids. – 2005. – Vol. 17 (6). – P. 067101. – DOI: 10.1063/1.1897323.
7. On the formation of Taylor-Görtler vortices in RMF-driven spin-up flows / T. Vogt, I. Grants, D. Rübiger, S. Eckert, G. Gerbeth // Experiments in Fluids. – 2012. – Vol. 52. – P. 1–10. – DOI: 10.1007/s00348-011-1196-x.
8. Брановер Г. Г., Цинобер А. Б. Магнитная гидродинамика несжимаемых сред. – М.: Наука, 1970. – 379 с.
9. Electro-vortex flows in a cylindrical cell under axial magnetic field / P. Frick, S. Mandrykin, V. Eltishchev, I. Kolesnichenko // Journal of Fluid Mechanics. – 2022. – Vol. 949. – P. A-20. – DOI: 10.1017/jfm.2022.746.
10. Voller V. R., Prakash C. A fixed-grid numerical modeling methodology for convection-diffusion mushy region phase-change problems // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1987. – Vol. 30, iss. 8. – P. 1709–1719. – DOI: 10.1016/0017-9310(87)90317-6.
11. Brent A. D., Voller V. R., Reid K. J. Enthalpy-porosity technique for modeling convection-diffusion phase change: application to the melting of a pure metal // Numerical Heat Transfer. – 1988. – Vol. 13 (3). – P. 297–318. – DOI: 10.1080/10407788808913615.