

Received: 18.01.2026

Revised: 31.03.2026

Accepted: 24.04.2026

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.2.028-041

AN EXACT ANALYTICAL SOLUTION FOR THE COUETTE–POISEUILLE FLOW OF A DILATANT POWER-LAW FLUID IN A PLANE CHANNEL

K. V. Gubareva^{1, a, *}, E. Yu. Prosviryakov^{2, 3, b}, and A. V. Eremin^{1, c}

¹Samara State Technical University,



244 Molodogvardeyskaya St., Samara, 443100, Russia



²Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,



34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia

³Ural Federal University,

19 Mira St., Ekaterinburg, 620062, Russia

a)  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

b)  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

c)  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

Corresponding author. Email: r.kristina2017@mail.ru

Address for correspondence: ul. Molodogvardeyskaya, 244, Samara, 443100, Russia

Tel.: +7 (846) 332-4226

A study is presented of the steady flow of an incompressible dilatant fluid obeying a power-law model with a flow behavior index of two, in a plane channel. The flow is induced by a combination of the constant motion of the upper wall and a constant axial pressure gradient along the channel. A complete analytical solution to this nonlinear boundary value problem is derived for this nonlinear boundary value problem at all the values of the governing dimensionless parameter, which represents the ratio of the driving forces. It is shown that beyond a critical value of this parameter, the flow regime changes from monotonic to one featuring a region of backflow adjacent to the stationary wall. Closed-form expressions for the velocity and shear stress profiles are given for both regimes. The asymptotic analysis reveals that the flow reversal point approaches the channel centerline at large values of the governing parameter. The results contribute to the understanding of dilatant flow phenomena and provide a valuable benchmark for validating numerical methods.

Keywords: exact solution, Ostwald–de-Waele model, dilatant fluid, Couette–Poiseuille flow, flow reversal, non-Newtonian fluid

References

1. Skulsky, O.I. and Aristov, S.N. *Mekhanika anomalno vyazkikh zhidkostey* [The Anomalous-Viscous Fluid Dynamics]. RKhD Publ., Moscow, Izhevsk, 2004, 154 p. (In Russian).
2. Aristov, S.N. and Skulskii, O.I. Exact solution of the problem on a six- constant Jeffreys model of fluid in a plane channel. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2002, 43, 817–822. DOI: 10.1023/A:1020752101539.
3. Aristov, S.N. and Skulskiy, O.I. Viscoelastic effects of blood flow in nondeformable. *Russian Journal of Biomechanics*, 1999, 3 (4), 24–33.
4. Chhabra, R.P. and Richardson, J.F. *Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications*, 1st ed., Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 1999, 436 p.
5. Middleman, S. *Fundamentals of Polymer Processing*, McGraw-Hill, 1977, 525 p.

6. Bird, R.B., Armstrong, R.C., and Hassager, O. *Dynamics of Polymeric Liquids*, vol. 1: Fluid Mechanics, 2nd ed., Wiley, 1987, 672 p.
7. Tanner, R.I. *Engineering Rheology*, 2nd ed., OUP Oxford, 2000, 586 p.
8. Schowalter, W.R. *Mechanics of Non-Newtonian Fluids*, Pergamon Press, 1978, 300 p.
9. Hartnett, J.P. and Kostic, M. Heat transfer to a viscoelastic fluid in laminar flow through a rectangular channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 1985, 28 (6), 1147–1155. DOI: 10.1016/0017-9310(85)90122-X.
10. Aristov, S.N. and Keller, I.E. Beltrami stress fields in an elastic body. *Doklady Physics*, 2016, 61 (7), 343–346. DOI: 10.1134/S1028335816070065.
11. Gubareva, K.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact analytical solution to the problem of stationary convection in the Boussinesq approximation with account for viscous dissipation. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 6, 23–38. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-6/2025-6_528.html
12. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu, Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations. *Fluid Dynamics Research*, 2021, 53 (4), 044501. DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
13. Ershkov, S., Burmasheva, N., Leshchenko, D.D., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows. *Symmetry*, 2023, 15 (9), 1730. DOI: 10.3390/sym15091730.
14. Ershkov, S.V., Prosviryakov, E.Yu., Burmasheva, N.V., and Christianto, V. Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: a review. *Symmetry* 2023, 15, 1825. DOI: 10.3390/sym15101825.
15. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2025, 5, 66–86. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html
16. Chang, H.-C. and Demekhin, E.A. *Studies in Interface Science*, vol. 14: *Complex Wave Dynamics on Thin Films*, Elsevier, 2002, 412 p.
17. Kalliadasis, S., Ruyer-Quil, C., Scheid, B., and Velarde, M.G. *Falling Liquid Films*, series Applied Mathematical Sciences, Springer, London, 2012. DOI: 10.1007/978-1-84882-367-9.
18. Baranovskii, E.S. Prosviryakov, E.Yu., and Ershkov, S.V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2025, 84, 104294. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
19. Ershkov, S.V., Baranovskii, E.S., Prosviryakov, E.Yu., and Yudin, A.V. Non-Newtonian rivulet-flows on unsteady heated plane surface. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2025, 170, 104984. DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104984.
20. Gubareva, K.V., Prosviryakov, E.Yu., and Eremin, A.V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries. *Diagnosics, Resource and Mechanics of Materials and Structures*, 2025, 5, 6–28. DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. Available at: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html
21. Baranovskii, E.S. Analytical Solutions to the unsteady Poiseuille flow of a second grade fluid with slip boundary conditions. *Polymers*, 2024, 16 (2), 179. DOI: 10.3390/polym16020179.
22. Denier, J.P. and Dabrowski, P.P. On the boundary-layer equations for power-law fluids. In: *Proceedings of the Royal Society of London, Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2004, 460, 3143–3158. DOI: 10.1098/rspa.2004.1349.
23. Frigaard, I.A. and Ryan, D.P. Flow of a visco-plastic fluid in a channel of slowly varying width. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 2004, 123 (1), 67–83. DOI: 10.1016/j.jnnfm.2004.06.011.

24. Málek, J., Rajagopal, K.R., and Růžička, M. Existence and regularity of solutions and the stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 1995, 05 (06), 789–812. DOI: 10.1142/S0218202595000449.
25. Massoudi, M. and Phuoc, T.X. Fully developed flow of a modified second grade fluid with temperature dependent viscosity. *Acta Mechanica*, 2001, 150, 23–37. DOI: 10.1007/BF01178542.
26. Mekheimer, Kh.S. and El Kot, M.A. The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis. *Acta Mechanica Sinica*, 2008, 24, 637–644. DOI: 10.1007/s10409-008-0185-7.
27. Nádai, A. *Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter*, 4th ed., McGraw-Hill, 1931, 349 p.
28. Poole, R.J. The Deborah and Weissenberg numbers. In: The British Society of Rheology, *Rheology Bulletin*, 2012, 53 (2), 32–39.
29. Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to the Navier-Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing convective flows of multilayer fluids. *Fluid Dynamics*, 2020, 55 (6), 798–809.
30. Rajagopal, K.R. On boundary conditions for fluids of the differential type. In: Sequeira, A., ed., *Navier-Stokes equations and related nonlinear problems*, Springer, Boston, MA, 1995. DOI: 10.1007/978-1-4899-1415-6_22.
31. Rao, I.J. and Rajagopal, K.R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel. *Acta Mechanica*, 1999, 135, 113–126. DOI: 10.1007/BF01305747.
32. Sofonea, M. and Matei, A. *Variational Inequalities with Applications: A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*, Springer, 2009, 230 p.
33. Truesdell, C. and Noll, W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*, 3rd ed., Springer, 2004, 602 p.
34. Vinogradov, G.V. and Malkin, A.Y. *Rheology of Polymers: Viscoelasticity and Flow of Polymers*, Springer, 1980, 468 p.
35. Whiteman, J.R., ed. *The Mathematics of Finite Elements and Applications: Mafelap 1984*, Academic Press, 1985, 650 p.
36. Yih, C.-S. *Dynamics of Nonhomogeneous Fluids*, Macmillan, 1965, 306 p.
37. Wilson, S.D.R. The drag-out problem in film coating theory. *Journal of Engineering Mathematics*, 1982, 16, 209–221. DOI: 10.1007/BF00042717.
38. Prosviryakov, E.Yu., Ledyankina, O.A., and Goruleva, L.S. A class of exact solutions of magnetic hydrodynamics equations for describing convective flows of multilayer fluids. *Russian Aeronautics*, 2024, 67, 550–563. DOI: 10.3103/S1068799824030103.
39. Prosviryakov, E.Yu., Ledyankina, O.A., and Goruleva, L.S. Exact solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations for describing the creeping flows of multicomponent fluids. *Procedia Structural Integrity*, 2024, 65, 177–184. DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.028.

Подана в журнал: 18.01.2026

УДК 532.135

DOI: 10.17804/2410-9908.2026.2.028-041



ТОЧНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА – ПУАЗЕЙЛЯ ДИЛАТАНТНОЙ ЖИДКОСТИ СТЕПЕННОГО ЗАКОНА В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ



К. В. Губарева^{1,а,*}, Е. Ю. Просвирыков^{2,3,б}, А. В. Еремин^{1,в}



¹Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Самарский государственный технический университет,
ул. Молодогвардейская, д. 244, г. Самара, 443100, Россия

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, д. 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия

³Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»,
ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-9845-8372>  r.kristina2017@mail.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0002-2349-7801>  evgen_pros@mail.ru;

^{в)}  <https://orcid.org/0000-0002-2614-6329>  a.v.eremin@list.ru

Ответственный автор. Электронная почта: r.kristina2017@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Молодогвардейская, д. 244, Самара, 443100, Россия
Тел.: +7 (846) 332-42-26

Исследуется стационарное течение несжимаемой дилатантной жидкости, описываемой степенным законом с индексом течения, равным двум, в плоском канале. Течение возбуждается как движением верхней стенки с постоянной скоростью, так и постоянным градиентом давления вдоль канала. Для данной нелинейной краевой задачи получено полное аналитическое решение при всех значениях определяющего безразмерного параметра, который характеризует соотношение между движущими силами. Установлено, что при превышении критического значения этого параметра происходит смена режима течения: монотонное течение переходит в режим с образованием зоны обратного потока вблизи неподвижной стенки. Приведены замкнутые выражения для профилей скорости и касательного напряжения в каждом из режимов. Проведен асимптотический анализ, показавший, что при больших значениях параметра точка возвратного течения стремится к середине канала. Результаты важны для понимания физики течений дилатантных сред и могут служить базовым случаем для верификации численных методов.

Ключевые слова: точное решение, модель Оствальда – Вейля, дилатантная жидкость, течение Куэтта – Пуазейля, обратное течение, неньютоновская жидкость

1. Введение

Изучение течений неньютоновских жидкостей – одна из ключевых задач современной реологии и механики сплошных сред [1–3]. Поведение таких жидкостей, не подчиняющееся классическому закону вязкости Ньютона, широко распространено в природе и технологических процессах [4, 5]. К ним относятся переработка полимеров и композиционных материалов, транспортировка нефтяных суспензий, движение биологических жидкостей, а также различные процессы в пищевой, химической и горнодобывающей промышленности [6, 7]. Для адекватного описания течения неньютоновских жидкостей требуется использование более сложных реологических моделей, связывающих тензор напряжений и тензор скоростей деформации.

Одной из фундаментальных и широко используемых реологических моделей является степенной закон, также известный как модель Оствальда – Вейля [8, 9]. Эта модель устанавливает степенную зависимость между скалярными инвариантами девиаторов напряжений и скоростей деформации [10]. В случае простого сдвига она сводится к соотношению, в котором касательное напряжение пропорционально скорости сдвига, возведенной в степень, равную индексу течения [11]. Жидкости с индексом течения меньше единицы называют псевдопластичными, а с индексом больше единицы – дилатантными [12, 13]. Дилатантное поведение, при котором эффективная вязкость растет с увеличением скорости деформации, характерно для концентрированных суспензий, некоторых паст, гелей и зернистых материалов [14, 15].

С точки зрения фундаментальной гидродинамики классической является задача о течении между двумя параллельными бесконечными пластинами – плоским каналом [16]. Если течение вызывается только движением одной из стенок, оно называется течением Куэтта, а если только перепадом давления вдоль канала – течением Пуазейля [17]. Для ньютоновской жидкости решения этих задач тривиальны и линейно суперпозируются в случае одновременного действия обоих факторов [18]. Однако для жидкости степенного закона уравнение движения становится нелинейным, и даже для такой простой геометрии получение общего аналитического решения представляет сложность [19]. Точное решение известно для чистого течения Пуазейля при любом индексе течения и для чистого течения Куэтта [20]. Однако комбинированное течение Куэтта – Пуазейля, которое часто встречается в реальных технических устройствах, изучено в значительно меньшей степени, особенно для дилатантных жидкостей [21, 22].

В литературе встречаются указания на то, что для дилатантных жидкостей при некоторых соотношениях между скоростью стенки и градиентом давления может не существовать стационарного решения с монотонным профилем скорости, удовлетворяющего условиям прилипания на обеих стенках [23]. Однако альтернативная возможность – существование решения с немонотонным профилем, содержащим зону обратного течения, – часто остается без внимания [24]. Для псевдопластичных жидкостей в канале с движущимися стенками возможность сложных профилей скорости с точками перегиба или экстремумов изучалась [25], в то время как для дилатантного случая такой анализ является нетривиальным и менее освещенным [26].

Целью настоящей работы является получение полного аналитического решения задачи о стационарном комбинированном течении жидкости степенного закона с индексом, равным двум, в плоском канале с движущейся верхней стенкой и постоянным градиентом давления [27]. Выбор именно этого значения индекса обусловлен тем, что, с одной стороны, оно является характерным для многих реальных дилатантных систем, а с другой – позволяет провести анализ до конца в замкнутой форме, выявив качественные особенности течения. Особое внимание уделяется плавному переходу между режимами, анализу распределения напряжений и асимптотическому поведению в предельных случаях [28, 29].

2. Постановка задачи

Рассмотрим стационарное, полностью развитое течение несжимаемой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами, находящимися на расстоянии h друг от друга [30, 31]. Декартову систему координат направим так, что ось x совпадает с направлением течения, ось y перпендикулярна стенкам, причем $y = 0$ соответствует неподвижной нижней пластине, а $y = h$ – верхней, движущейся с постоянной скоростью $U_0 > 0$ [32, 33]. Дополнительно предполагается наличие постоянного градиента давления $G = -dp/dx \geq 0$, способствующего течению в положительном направлении оси x . Поле скорости полагаем однонаправленным: $\mathbf{v} = (u(y), 0, 0)$.

Реологическое поведение жидкости описывается степенным законом (модель Оствальда – Вейля) с индексом течения $n = 2$ [8, 34]:

$$\tau_{xy} = K \left| \frac{du}{dy} \right| \frac{du}{dy}, \quad (1)$$

где $K > 0$ – коэффициент консистенции. Для $n = 2$ эффективная вязкость $\mu_{eff} = K \left| du/dy \right|$ возрастает с ростом скорости сдвига, что соответствует дилатантности [14].

В приближении пленки (малые числа Рейнольдса) уравнение баланса количества движения имеет вид [30, 35]

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = G. \quad (2)$$

Граничные условия выражают прилипание жидкости к стенкам:

$$u(0) = 0, u(h) = U_0. \quad (3)$$

3. Аналитическое решение

Интегрируя выражение (2), получаем линейное распределение касательного напряжения по высоте канала [36, 37]:

$$\tau_{xy}(y) = Gy + C, \quad (4)$$

где постоянная интегрирования $C = \tau_{xy}(0)$ есть напряжение на нижней стенке.

Подстановка выражения (4) в реологический закон (1) дает дифференциальное уравнение для поля скорости:

$$\frac{du}{dy} = \text{sign}(Gy + C) \sqrt{\frac{|Gy + C|}{K}}. \quad (5)$$

Анализ знака выражения $Gy + C$ позволяет выделить три случая:

1. $C \geq 0$, тогда $Gy + C \geq 0$ при всех $y \in [0, h]$, и производная скорости неотрицательна. Профиль скорости монотонно возрастает от 0 до U_0 .

2. $C \leq -Gh$, тогда $Gy + C \leq 0$ на всем интервале, и производная неположительна. Это привело бы к монотонному убыванию скорости от $u(0) = 0$ до $u(h) \leq 0$, что противоречит условию $u(h) = U_0 > 0$. Следовательно, этот случай физически не реализуем.

3. $-Gh < C < 0$. Существует точка $y_0 = -C/G \in (0, h)$, в которой напряжение обращается в ноль. При $y < y_0$ производная скорости отрицательна, при $y > y_0$ – положительна. Значит, в точке y_0 скорость имеет минимум, а профиль является немонотонным: вблизи нижней стенки возникает обратное течение [23, 24].

Таким образом, физически допустимыми являются только случаи 1 и 3. Их объединяет то, что величина $p = C + Gh = \tau_{xy}(h)$ (напряжение на верхней стенке) всегда положительна, поскольку движение верхней стенки в положительном направлении требует приложения положительного касательного усилия.

Проанализируем гидродинамическое поле, профиль которого, в зависимости от управляющих параметров, может иметь монотонный или немонотонный вид.

Рассмотрим монотонный режим. При $C \geq 0$ из уравнения (5) следует $du/dy = \sqrt{(Gy + C)/K}$. Интегрируя с учетом $u(0) = 0$, находим:

$$u(y) = \frac{2}{3G\sqrt{K}} \left[(Gy + C)^{\frac{3}{2}} - C^{3/2} \right]. \quad (6)$$

Константа C определяется из условия на верхней стенке $u(h) = U_0$, что дает уравнение

$$(Gh + C)^{3/2} - C^{3/2} = \frac{3}{2} G\sqrt{K} U_0. \quad (7)$$

Исследуем немонотонный режим ($-Gh < C < 0$). Введем положительную величину $D = -C > 0$. Точка минимума скорости $y_0 = D/G$. Интегрируя уравнение (5) на двух участках, получаем кусочно-заданное решение [29]:

$$u(y) = \begin{cases} -\frac{2}{3G\sqrt{K}} [D^{3/2} - (D - Gy)^{3/2}], & 0 \leq y \leq y_0, \\ \frac{2}{3G\sqrt{K}} [(Gy - D)^{3/2} - D^{3/2}], & y_0 \leq y \leq h. \end{cases} \quad (8)$$

Условие $u(h) = U_0$ приводит к следующему уравнению для D :

$$(Gh - D)^{3/2} - D^{3/2} = \frac{3}{2} G\sqrt{K} U_0. \quad (9)$$

Для компактности и выявления определяющих безразмерных параметров введем следующие переменные:

$$\eta = \frac{y}{h}, \tilde{u}(\eta) = \frac{u}{U_0}, \Pi = \frac{Gh^3}{KU_0^2}, C^* = \frac{Ch}{KU_0^2}.$$

Параметр Π характеризует соотношение между движущей силой от градиента давления и силой, связанной с движением стенки.

Представим монотонный режим. В безразмерных переменных уравнение (7) и профиль (6) принимают вид

$$(\Pi + C^*)^{3/2} - (C^*)^{3/2} = \frac{3}{2} \Pi, \quad (10)$$

$$\tilde{u}(\eta) = \frac{2}{3\Pi} [(\Pi\eta + C^*)^{3/2} - (C^*)^{3/2}]. \quad (11)$$

Функция в левой части (10) при фиксированном Π монотонно убывает по C^* . Решение с $C^* \geq 0$ существует, если минимальное значение левой части (при $C^* = 0$) не превосходит значение всей правой части:

$$\Pi^{3/2} \leq \frac{3}{2} \Pi \Rightarrow \Pi \leq \Pi_c = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2,25. \quad (12)$$

Таким образом, монотонный режим возможен только при $\Pi \leq \Pi_c$. При $\Pi = \Pi_c$ имеем $C^* = 0$, и профиль скорости становится особенно простым: $\tilde{u}(\eta) = \eta^{3/2}$.

Рассмотрим немонотонный режим. Положим $D^* = -C^* = Dh/(KU_0^2) > 0$. Тогда уравнение (9) и решение (8) преобразуются к виду [38]:

$$(\Pi - D^*)^{3/2} - (D^*)^{3/2} = \frac{3}{2} \Pi, \quad (13)$$

$$\tilde{u}(\eta) = \begin{cases} -\frac{2}{3\Pi} [(D^*)^{3/2} - (D^* - \Pi\eta)^{3/2}], & 0 \leq \eta \leq \eta_0 = \frac{D^*}{\Pi}, \\ \frac{2}{3\Pi} [(\Pi\eta - D^*)^{3/2} - (D^*)^{3/2}], & \eta_0 \leq \eta \leq 1. \end{cases} \quad (14)$$

Уравнение (13) имеет единственное решение $D^* \in (0, \Pi)$ для любого $\Pi > \Pi_c$. При $\Pi \rightarrow \Pi_c^+$ величина $D^* \rightarrow 0$, обеспечивая непрерывную сшивку с критическим профилем монотонного режима.

Изучим закономерность распределения касательного напряжения. В безразмерной форме распределение напряжения (4) линейно [32, 39]:

$$\tilde{\tau}(\eta) = \frac{\tau_{xy}}{K(U_0/h)^2} = \Pi\eta + C^*. \quad (15)$$

В монотонном режиме ($C^* \geq 0$) напряжение положительно во всем канале. В немонотонном режиме ($C^* = -D^* < 0$) напряжение отрицательно при $\eta < \eta_0$, равно нулю при $\eta = \eta_0$ и положительно при $\eta > \eta_0$.

Полученное общее решение содержит в себе два классических предела, которые служат важной проверкой его корректности.

Рассмотрим частный случай: редукцию классического течения Куэтта ($G = 0, \Pi = 0$).

При отсутствии градиента давления ($G = 0$) уравнение движения (2) дает $d\tau_{xy}/dy = 0$, откуда напряжение постоянно: $\tau_{xy}(y) = C$. Реологическое соотношение (1) принимает вид $C = K(du/dy)^2$ (поскольку при движении верхней стенки в положительном направлении $du/dy \geq 0$). Следовательно, градиент скорости постоянен:

$$\frac{du}{dy} = \sqrt{\frac{C}{K}}$$

Интегрируя с условием $u(0) = 0$, получаем линейный профиль $u(y) = \sqrt{C/K} y$. Из условия $u(h) = U_0$ находим константу: $\sqrt{C/K} = U_0/h$, то есть $C = K(U_0/h)^2$. Таким образом, профиль скорости для чистого течения Куэтта имеет вид

$$u(y) = U_0 \frac{y}{h}.$$

Этот результат также следует из общего решения (6) при $G \rightarrow 0$.

Случай неподвижных стенок ($U_0 = 0$) требует отдельного анализа. Возвращаясь к исходным размерным уравнениям (4) и (1) с граничными условиями $u(0) = u(h) = 0$, из симметрии задачи заключаем, что напряжение обращается в ноль на оси канала ($y = h/2$). Из уравнения (4) следует: $\tau_{xy}(h/2) = G(h/2) + C = 0$, откуда $C = -Gh/2$. Тогда $\tau_{xy}(y) = G(y - h/2)$. Для $n = 2$ реологический закон дает

$$\frac{du}{dy} = \text{sign}(y - h/2) \sqrt{\frac{G}{K} |y - h/2|}.$$

Интегрируя и учитывая условие $u(h/2) = u_{\max}$, находим

$$u(y) = u_{\max} - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{G}{K}} |y - h/2|^{3/2}.$$

Из условия $u(0) = 0$ определяем максимальную скорость: $u_{\max} = \frac{2}{3}\sqrt{G/K}(h/2)^{3/2}$. Окончательно:

$$u(y) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{G}{K}}\left[\left(\frac{h}{2}\right)^{3/2} - |y-h/2|^{3/2}\right].$$

Данное выражение может быть получено из общего решения (8) предельным переходом $U_0 \rightarrow 0$.

4. Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлены безразмерные профили скорости $\tilde{u}(\eta)$ для различных значений параметра Π . График разделен на две части: слева – монотонный режим ($\Pi \leq 2,25$), справа – немонотонный режим ($\Pi > 2,25$). При $\Pi \leq 2,25$ все профили монотонны и выпуклы вниз; с ростом Π кривизна увеличивается. При $\Pi > 2,25$ профили становятся немонотонными: вблизи нижней стенки ($\eta = 0$) возникает зона обратного течения, где скорость отрицательна. С ростом Π глубина этой зоны увеличивается, а положение минимума скорости η_0 смещается вверх. На обоих подграфиках четко виден переход через критическое значение $\Pi_c = 2,25$.

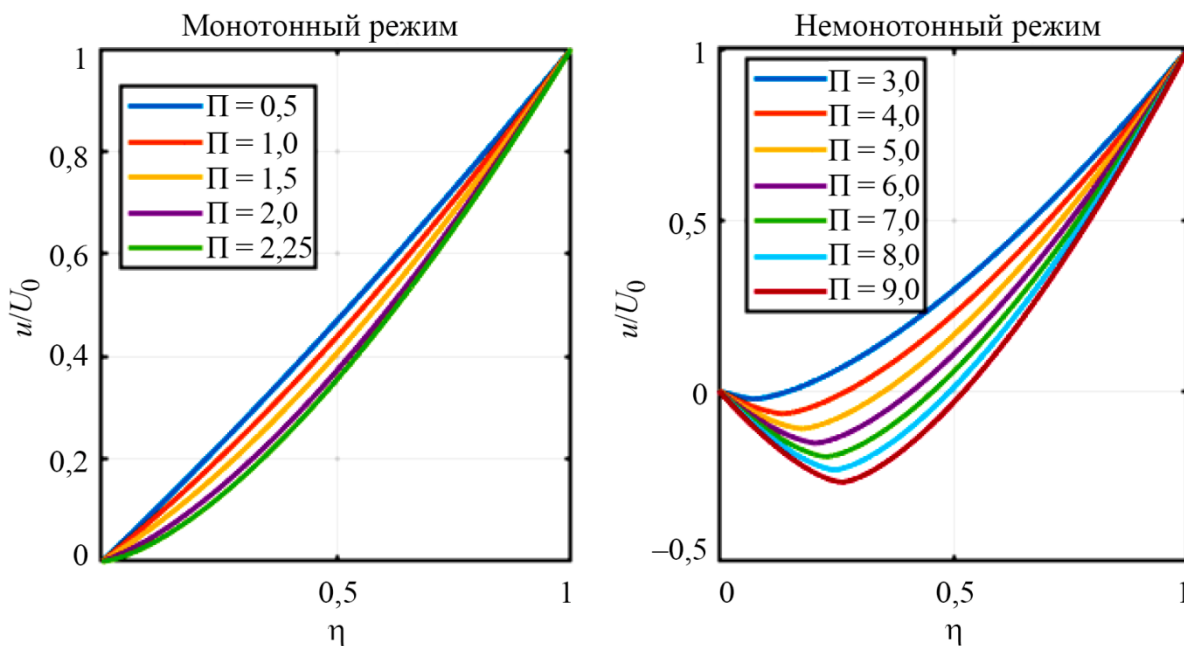


Рис. 1. Профили безразмерной скорости $\tilde{u}(\eta)$ в монотонном (слева) и немонотонном (справа) режимах для различных значений параметра Π

На рис. 2 показаны распределения безразмерного касательного напряжения $\tilde{\tau}(\eta)$ для выбранных значений Π . Напряжение линейно зависит от координаты согласно формуле (15). В монотонном режиме ($\Pi = 1,0; 2,25$) напряжение положительно во всем канале. В немонотонном режиме ($\Pi = 3,0; 5,0; 9,0$) напряжение отрицательно в области обратного течения ($\eta < \eta_0$) и положительно в области прямого течения ($\eta > \eta_0$), обращаясь в ноль в точке минимума скорости $\eta = \eta_0$. Это наглядно демонстрирует изменение направления силы, действующей на жидкость, при переходе от монотонного режима к немонотонному.

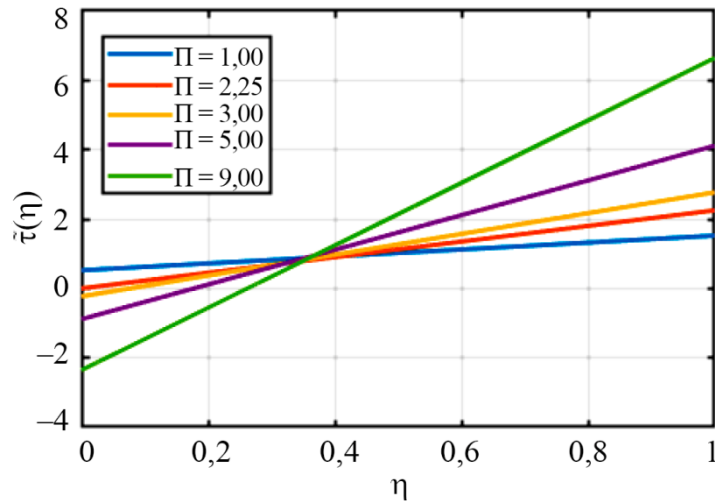


Рис. 2. Распределения безразмерного касательного напряжения $\tilde{\tau}(\eta)$ для различных значений параметра Π

На рис. 3 приведены зависимости ключевых параметров течения от Π : безразмерной постоянной D^* , координаты минимума скорости η_0 и модуля минимальной скорости $|\tilde{u}_{\min}|$. При $\Pi \leq \Pi_c$ $D^* = 0$. При $\Pi > \Pi_c$ величина D^* растет, приближаясь к асимптоте $D^* \sim \Pi/2$. Координата η_0 с ростом Π стремится к 0,5, а модуль минимальной скорости $|\tilde{u}_{\min}|$ растет как $\sqrt{\Pi}$. Асимптотические зависимости показаны пунктирными линиями и хорошо согласуются с точным решением при больших Π .

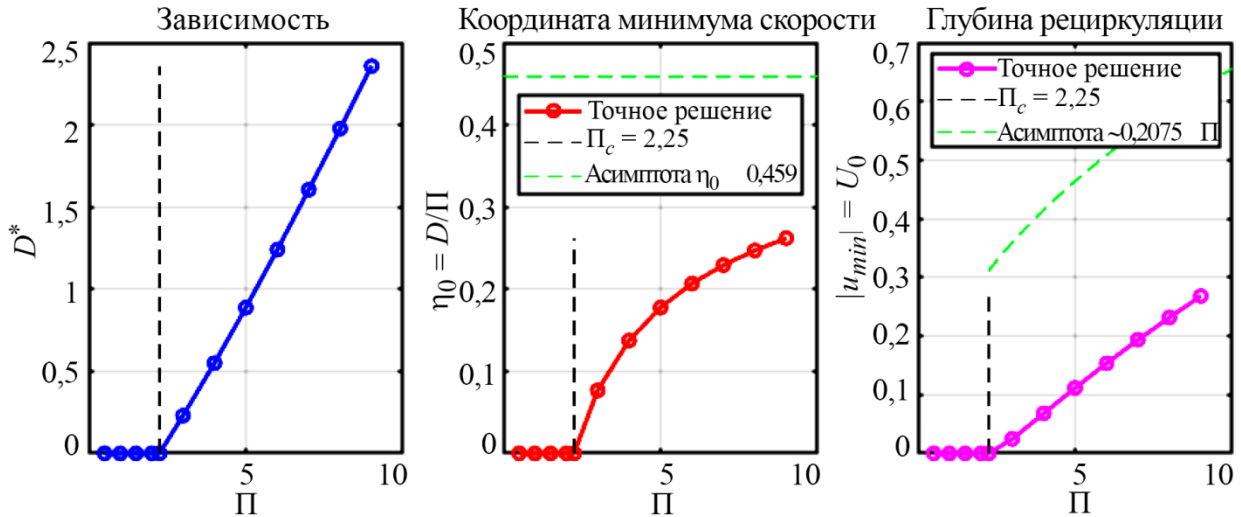


Рис. 3. Зависимости параметров D^* , η_0 и $|\tilde{u}_{\min}|$ от Π : точное решение (точки); критическое значение $\Pi_c = 2,25$ (вертикальная штриховая линия); асимптотические зависимости (пунктирные линии)

В таблице приведены рассчитанные значения ключевых параметров для различных значений параметра Π . Видно, как с ростом Π в монотонном режиме напряжение на нижней стенке $\tilde{\tau}(0) = C^*$ падает до нуля при Π_c , а затем становится отрицательным. Одновременно возникает и расширяется зона обратного течения (координата η_0 растет, а минимальная скорость \tilde{u}_{\min} становится отрицательной и увеличивается по модулю).

Таблица

Безразмерные параметры течения

Π	C*	D*	η ₀	ũ _{min}	Режим
0,5	0,697	–	–	0,000	МОНОТОННЫЙ
1,0	0,423	–	–	0,000	МОНОТОННЫЙ
1,5	0,299	–	–	0,000	МОНОТОННЫЙ
2,0	0,093	–	–	0,000	МОНОТОННЫЙ
2,25	0,000	0,000	0,000	0,000	критический
3,0	–0,230	0,230	0,077	–0,025	НЕМОНОТОННЫЙ
4,0	–0,550	0,550	0,138	–0,068	НЕМОНОТОННЫЙ
5,0	–0,888	0,888	0,178	–0,112	НЕМОНОТОННЫЙ
6,0	–1,241	1,241	0,207	–0,154	НЕМОНОТОННЫЙ
7,0	–1,605	1,605	0,229	–0,194	НЕМОНОТОННЫЙ
8,0	–1,977	1,977	0,247	–0,232	НЕМОНОТОННЫЙ
9,0	–2,358	2,358	0,262	–0,268	НЕМОНОТОННЫЙ

Для исследования предельного поведения при $\Pi \gg 1$ удобно переписать уравнение (13) в терминах $\beta = D^*/\Pi$:

$$(1 - \beta)^{3/2} - \beta^{3/2} = \frac{3}{2} \Pi^{-1/2}. \quad (16)$$

При $\Pi \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю, откуда следует $\beta \rightarrow 1/2$. Разлагая левую часть в ряд Тейлора вблизи $\beta = 1/2$, находим поправку:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Pi^{-1/2} + O(\Pi^{-1}). \quad (17)$$

Отсюда получаем асимптотические выражения

$$\begin{aligned} D^* &= \frac{\Pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\Pi} + O(1), \\ \eta_0 &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \Pi^{-1/2} + O(\Pi^{-1}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\tilde{u}_{\min} = -\frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{\Pi} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \Pi^{-1/2} + O(\Pi^{-1}).$$

Таким образом, при очень больших градиентах давления точка возвратного течения располагается примерно посередине канала ($\eta_0 \rightarrow 1/2$), а скорость обратного потока неограниченно растет как $\sqrt{\Pi}$.

При малых Π (доминирование движения стенки) жидкость увлекается верхней пластиной, и течение направлено везде вдоль ее движения. Касательное напряжение положительно по всему сечению, градиент давления лишь слегка искажает линейный профиль Куэтта.

При достижении Π_c напряжение на нижней стенке становится нулевым. При дальнейшем увеличении Π градиент давления, стремящийся вызвать течение Пуазейля с максимальной скоростью в центре, начинает преобладать вблизи дна. Это приводит к тому, что результирующая сила на нижних слоях жидкости меняет направление, и возникает обратное течение. В точке y_0 , где напряжение равно нулю, скорость минимальна. Выше этой точки доминирующим становится влияние движущейся стенки, и скорость снова становится положительной.

Важно отметить, что решение непрерывно и гладко зависит от параметра Π . Изменение при Π_c не связано с потерей существования решения, а связано лишь с изменением его качественной структуры – появлением экстремума в профиле скорости.

5. Заключение

В работе получено и исследовано точное аналитическое решение задачи о стационарном комбинированном течении (Куэтта – Пуазейля) для дилатантной жидкости степенного закона с индексом течения, равным двум. Показано, что решение существует для всех значений безразмерного параметра Π , характеризующего отношение движущих сил градиента давления и движущейся стенки.

Установлено критическое значение $\Pi_c = 9/4 = 2,25$. При $\Pi \leq \Pi_c$ реализуется режим с монотонным профилем скорости, описываемым формулой (11). При $\Pi > \Pi_c$ течение становится немонотонным: вблизи неподвижной стенки возникает зона обратного течения, а профиль скорости определяется кусочно-аналитическими выражениями (14).

Получены простые выражения для распределения касательного напряжения (15), которое меняет знак в точке возвратного течения в немонотонном режиме. Проанализированы предельные случаи чистого течения Куэтта (линейный профиль) и Пуазейля (степенной профиль $\sim |y - h/2|^{3/2}$), которые корректно следуют из общего решения и подтверждают его полноту.

Проведенный асимптотический анализ для $\Pi \gg 1$ показал, что координата точки минимальной скорости стремится к середине канала, а модуль этой скорости растет пропорционально $\sqrt{\Pi}$.

Полученное решение не только отвечает на вопрос о существовании стационарных течений дилатантной жидкости в канале при произвольных соотношениях движущих сил, но и демонстрирует механизм плавного качественного перехода между режимами. Эти результаты важны для фундаментального понимания реологии дилатантных сред и могут быть использованы в качестве контрольного примера для проверки вычислительных алгоритмов, моделирующих течения неньютоновских жидкостей.

Литература

1. Скульский О. И., Аристов С. Н. Механика аномально вязких – М. ; Ижевск : РХД, 2004. – 154 с.
2. Aristov S. N., Skulskii O. I. Exact solution of the problem on a six- constant Jeffreys model of fluid in a plane channel // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2002. – Vol. 43. – P. 817–822. – DOI: 10.1023/A:1020752101539.

3. Aristov S. N., Skulskiy O. I. Viscoelastic effects of blood flow in nondeformable // Russian Journal of Biomechanics. – 1999. – Vol. 3 (4). – P. 24–33.
4. Chhabra R. P., Richardson J. F. Non-Newtonian Flow in the Process Industries: Fundamentals and Engineering Applications. – 1st ed. – Oxford, UK : Butterworth-Heinemann, 1999. – 436 p.
5. Middleman S. Fundamentals of Polymer Processing. – McGraw-Hill, 1977. – 525 p.
6. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of Polymeric Liquids. Vol. 1. Fluid Mechanics. – 2nd ed. – Wiley, 1987. – 672 p.
7. Tanner R. I. Engineering Rheology. – 2nd ed. – OUP Oxford University Press, 2000. – 586 p.
8. Schowalter W. R. Mechanics of Non-Newtonian Fluids. – Pergamon Press, 1978. – 300 p.
9. Hartnett J. P., Kostic M. Heat transfer to a viscoelastic fluid in laminar flow through a rectangular channel // International Journal of Heat and Mass Transfer. – 1985. – Vol. 28 (6). – P. 1147–1155. – DOI: 10.1016/0017-9310(85)90122-X.
10. Aristov S. N., Keller I. E. Beltrami stress fields in an elastic body // Doklady Physics. – 2016. – Vol. 61 (7). – P. 343–346. – DOI: 10.1134/S1028335816070065.
11. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu. Exact analytical solution to the problem of stationary convection in the Boussinesq approximation with account for viscous dissipation // Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 6. – P. 23–38. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.6.023-038. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-6/2025-6_528.html
12. Towards understanding the algorithms for solving the Navier-Stokes equations / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // Fluid Dynamics Research. – 2021. – Vol. 53 (4). – P. 044501. – DOI: 10.1088/1873-7005/ac10f0.
13. Exact solutions of the Oberbeck-Boussinesq equations for the description of shear thermal diffusion of Newtonian fluid flows / S. Ershkov, N. Burmasheva, D. D. Leshchenko, E. Yu. Prosviryakov // Symmetry. – 2023. – Vol. 15 (9). – P. 1730. – DOI: 10.3390/sym15091730.
14. Solving the hydrodynamical system of equations of inhomogeneous fluid flows with thermal diffusion: a review / S. V. Ershkov, E. Yu. Prosviryakov, N. V. Burmasheva, V. Christianto // Symmetry. – 2023. – Vol. 15. – P. 1825. – DOI: 10.3390/sym15101825.
15. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. An exact solution with inhomogeneous boundary conditions for a steady non-uniform Couette flow between permeable plates // Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 5. – P. 66–86. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.066-086. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_522.html
16. Chang H.-C., Demekhin E. A. Studies in Interface Science. Vol. 14. Complex Wave Dynamics on Thin Films. – Elsevier, 2002. – 412 p.
17. Falling Liquid Films / S. Kalliadasis, C. Ruyer-Quil, B. Scheid, M. G. Velarde. Series Applied Mathematical Sciences. – London : Springer, 2012. – DOI: 10.1007/978-1-84882-367-9.
18. Baranovskii E. S., Prosviryakov E. Yu., Ershkov S. V. Mathematical analysis of steady non-isothermal flows of a micropolar fluid // Nonlinear Analysis: Real World Applications. – 2025. – Vol. 84. – P. 104294. – DOI: 10.1016/j.nonrwa.2024.104294.
19. Non-Newtonian rivulet-flows on unsteady heated plane surface / S. V. Ershkov, E. S. Baranovskii, E. Yu. Prosviryakov, A. V. Yudin // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2025. – Vol. 170. – P. 104984. – DOI: 10.1016/j.ijnonlinmec.2024.104984.
20. Gubareva K. V., Prosviryakov E. Yu., Eremin A. V. Inhomogeneous Couette–Poiseuille flow of a viscous incompressible fluid in an infinite horizontal layer with permeable boundaries // Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2025. – Iss. 5. – P. 6–28. – DOI: 10.17804/2410-9908.2025.5.006-028. – URL: http://dream-journal.org/issues/2025-5/2025-5_523.html

21. Baranovskii E. S. Analytical Solutions to the unsteady Poiseuille flow of a second grade fluid with slip boundary conditions // *Polymers*. – 2024. – Vol. 16 (2). – P. 179. – DOI: 10.3390/polym16020179.
22. Denier J. P., Dabrowski P. P. On the boundary-layer equations for power-law fluids // *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 2004. – Vol. 460. – P. 3143–3158. – DOI: 10.1098/rspa.2004.1349.
23. Frigaard I. A., Ryan D. P. Flow of a viscoplastic fluid in a channel of slowly varying width // *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*. – 2004. – Vol. 123 (1). – P. 67–83. – DOI: 10.1016/j.jnnfm.2004.06.011.
24. Málek J., Rajagopal K. R., Růžička M. Existence and regularity of solutions and the stability of the rest state for fluids with shear dependent viscosity // *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*. – 1995. – Vol. 05 (06). – P. 789–812. – DOI: 10.1142/S0218202595000449.
25. Massoudi M., Phuoc T. X. Fully developed flow of a modified second grade fluid with temperature dependent viscosity // *Acta Mechanica*. – 2001. – Vol. 150. – P. 23–37. – DOI: 10.1007/BF01178542.
26. Mekheimer Kh. S., El Kot M. A. The micropolar fluid model for blood flow through a tapered artery with a stenosis // *Acta Mechanica Sinica*. – 2008. – Vol. 24. – P. 637–644. – DOI: 10.1007/s10409-008-0185-7.
27. Nádai A. *Plasticity: A Mechanics of the Plastic State of Matter*. – 4th ed. – McGraw-Hill, 1931. – 349 p.
28. Poole R. J. The Deborah and Weissenberg numbers // *Rheology Bulletin*. – 2012. – 53 (2). – P. 32–39.
29. Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions to the Navier-Stokes equations with the Boussinesq approximation for describing convective flows of multilayer fluids // *Fluid Dynamics*. – 2020. – Vol. 55 (6). – P. 798–809.
30. Rajagopal K. R. On boundary conditions for fluids of the differential type // *Navier-Stokes equations and related nonlinear problems* / ed. by A. Sequeira. – Boston, MA : Springer, 1995. – P. 273–278. – DOI: 10.1007/978-1-4899-1415-6_22.
31. Rao I. J., Rajagopal K. R. The effect of the slip boundary condition on the flow of fluids in a channel // *Acta Mechanica*. – 1999. – Vol. 135. – P. 113–126. – DOI: 10.1007/BF01305747.
32. Sofonea M., Matei A. *Variational Inequalities with Applications: A Study of Antiplane Frictional Contact Problems*. – Springer, 2009. – 230 p.
33. Truesdell C., Noll W. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. – 3rd ed. – Springer, 2004. – 602 p.
34. Vinogradov G. V., Malkin A. Y. *Rheology of Polymers. Viscoelasticity and Flow of Polymers*. – Springer, 1980. – 468 p.
35. *The Mathematics of Finite Elements and Applications: Mafelap 1984* / ed. by J. R. Whiteman. – Academic Press, 1985. – 650 p.
36. Yih, C.-S. *Dynamics of Nonhomogeneous Fluids*. – Macmillan, 1965. – 306 p.
37. Wilson S. D. R. The drag-out problem in film coating theory // *Journal of Engineering Mathematics*. – 1982. – Vol. 16. – P. 209–221. – DOI: 10.1007/BF00042717.
38. Prosviryakov E. Yu., Ledyankina O. A., Goruleva L. S. A class of exact solutions of magnetic hydrodynamics equations for describing convective flows of multilayer fluids // *Russian Aeronautics*. – 2024. – Vol. 67. – P. 550–563. – DOI: 10.3103/S1068799824030103.
39. Prosviryakov E. Yu., Ledyankina O. A., Goruleva L. S. Exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations for describing the creeping flows of multicomponent fluids // *Procedia Structural Integrity*. – 2024. – Vol. 65. – P. 177–184. – DOI: 10.1016/j.prostr.2024.11.028.