Received: 17.02.2025
Revised: 17.04.2025
Accepted: 25.04.2025
DOI: 10.17804/2410-9908.2025.2.006-027

EXACT SOLUTIONS TO THE OBERBECK–BOUSSINESQ EQUATIONS FOR DESCRIBING MULTILAYER FLUID FLOWS IN THE STOKES APPROXIMATION

L. S. Goruleva[1, 2, a], I. I. Obabkov[2, b], and E. Yu. Prosviryakov[1, 2, c, *]

[1]*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*
[2]*Ural Federal University, 19 Mira St., Ekaterinburg, 620002, Russia*

[a] https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
[b] https://orcid.org/0009-0008-8729-529X iiobabkov@urfu.ru;
[c] https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Corresponding author. Email: evgen_pros@mail.ru
Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 375-3576; fax: +7 (343) 374-5330

The flow of viscous incompressible fluids in engineering devices, in technological and natural processes is characterized by the stratification of hydrodynamic fields. Conventionally, the stratification of the velocity field and the pressure field is studied for isothermal flows. If fluid motion occurs in a thermal field, temperature is an important characteristic of an incompressible fluid. Convective fluid flow has a very complex topological structure of hydrodynamic fields due to the temperature dependence of density. As is known, in the description of convection in the Boussinesq approximation, the dependence of density on the spatial coordinate and time is ignored in the continuity equation, which is then transformed into the incompressibility equation. Field and experimental observations of fluid flow allow us to identify flow regions with discrete density distribution along one of the coordinates. Such fluids are referred to as stratified fluids in the scientific literature. Their mathematical description is significantly complicated since it is necessary to solve the Oberbeck–Boussinesq equations for each layer and join the analytical or numerical solutions between the layers and the boundaries. For applied studies of convective flows, the Stokes approximation for the total derivative of a vector or scalar function is often introduced. The paper considers the construction of exact Lin–Sidorov–Aristov solutions for describing slow (creeping) flows of a non-uniformly heated stratified fluid. In this case, hydrodynamic fields are described by special polynomials with functional arbitrariness. It is shown how the calculations of unknown coefficients can be automated to form hydrodynamic fields (velocities and temperatures). For steady-state Stokes-type flows, an exact solution of the Oberbeck–Boussinesq system is written out explicitly (by means of formulas).

Keywords: exact solution, Navier–Stokes equation, Oberbeck–Boussinesq equation, Stokes approximation, convection, multilayer fluid, Lin–Sidorov–Aristov class

References

1. Ostroumov, G.A. Free convection under the condition of the internal problem. Technical Memorandum Ser., 1407, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, 1958.
2. Gershuni, G.Z. and Zhukhovitskii, E.M. *Convective Stability of Incompressible Liquid,* Wiley, Keter Press, Jerusalem, 1976.

3. Gershuni, G.Z., Zhukhovitskii, E.M., and Nepomnyashchii, A.A. *Ustoychivost konvektivnykh techeniy* [Stability of Convective Flows]. Nauka Publ., Moscow, 1989, 320 p. (In Russian).
4. Getling, A.V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection. *Soviet Physics Uspekhi*, 1991, 34 (9), 737–776. DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
5. Andreev, V.K., Gaponenko, Ya.A., Goncharova, O.N., and Pukhnachev, V.V. *Mathematical Models of Convection,* De Gruyter, Berlin, Boston, 2012, 417 p. DOI: 10.1515/9783110258592.
6. Aristov, S.N. and Schwarz, K.G. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Vortex Flows in Thin Layers of Liquid]. VyatGU Publ., Kirov, 2011, 206 p. (In Russian).
7. Birikh, R.V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1966, 7 (3), 43–44. DOI: 10.1007/bf00914697.
8. Shliomis, M.I. and Yakushin, V.I. The convection in a two-layer binary system with evaporation. *Uchenye Zapiski Permskogo Gosuniversiteta, Seriya Gidrodinamika*, 1972, 4, 129–140. (In Russian).
9. Gershuni, G.Z. On the stability of plane convective motion of a fluid. *Zh. Tekh. Fiz.,* 1953, 23 (10), 1838–1844. (In Russian).
10. Batchelor, G.K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures. *Quart. Appl. Math*., 1954, 12 (3), 209–233. DOI: 10.1090/qam/64563.
11. Schwarz, K.G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries. *Fluid Dynamics*, 2014, 49 (4), 438–442. DOI: 10.1134/S0015462814040036.
12. Knyazev, D.V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, 52 (2), 212–217. DOI: 10.1134/ S0021894411020088.
13. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On laminar flows of planar free convection. *Nelineynaya Dinamika*, 2013, 9 (4), 651–657. (In Russian).
14. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50 (2), 132–141. DOI: 10.1134/S0040579516020019.
15. Aristov, S.N., Prosviryakov, E.Yu., and Spevak, L.F. Nonstationary laminar thermal and solutal Marangoni convection of a viscous fluid. *Vychislitelnaya Mekhanika Sploshnykh Sred*, 2015, 8 (4), 445–456. (In Russian). DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
16. Lin, C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* 1957, 1, 391–395. DOI: 10.1007/BF00298016.
17. Sidorov, A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, 30 (2), 197–203. DOI: 10.1007/BF00852164.
18. Aristov, S.N. *Vikhrevye techeniya v tonkikh sloyakh zhidkosti* [Eddy Currents in Thin Liquid Layers: Synopsis of Doctoral Thesis]. Vladivostok, 1990, 303 p. (In Russian).
19. Aristov, S.N. and Shvarts, K.G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer. *Fluid Dynamics*, 2013, 48, 330–335. DOI: 10.1134/S001546281303006X.
20. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, 50, 286–293. DOI: 10.1134/S0040579516030027.
21. Baranovskii, E.S., Burmasheva, N.V., and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses. *Symmetry,* 2021, 13 (8), 1355. DOI: 10.3390/sym13081355.
22. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with allowance for internal heat release. *Optics and Spectroscopy*, 2022, 130 (6), 365–370. DOI: 10.1134/S0030400X22070037.

23. Burmasheva, N., Ershkov, S., Prosviryakov, E., and Leshchenko, D. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction. *Fluids*, 2023, 8 (4), 123. DOI: 10.3390/fluids8040123.
24. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids. *Rus. J. Nonlin. Dyn*., 2022, 18 (3), 397–410. DOI: 10.20537/nd220305.
25. Burmasheva, N.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki,* 2021, 25 (3), 491–507. DOI: 10.14498/vsgtu1860.
26. Prosviryakov, E.Yu. New class of exact solutions of Navier-Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2019, 53 (1), 107–114. DOI: 10.1134/S0040579518060088.
27. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2022, 56 (3), 331–338. DOI: 10.1134/S0040579522030113.
28. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer. *Technical Physics Letters*, 2022, 48, 258–262. DOI: 10.1134/S1063785022090024.
29. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. A new class of exact solutions for magnetohydrodynamics equations to describe convective flows of binary liquids. *Khimicheskaya Fizika i Mezoskopiya*, 2023, 25 (4), 447–462. (In Russian). DOI: 10.15350/17270529.2023.4.39.
30. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 1, 41–53. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. Available at: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html
31. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2022, 3, 47–60. DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. Available at: http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html
32. Goruleva, L.S. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for the description of nonuniform unidirectional flows of magnetic fluids in the Lin–Sidorov–Aristov class. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 5, 39–52. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052. Available at: http://dream-journal.org/issues/2023-5/2023-5_415.html
33. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Steady convective Coutte flow for quadratic heating of the lower boundary fluid layer. *Nelineynaya Dinamika*., 2018, 14 (1), 69–79. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1801007.
34. Vlasova, S.S. and Prosviryakov, E.Yu. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary. *Russian Aeronautics*, 2016, 59 (4), 529–535. DOI: 10.3103/S1068799816040140.
35. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Stationary nonisothermal Couette flow. Quadratic heating of the upper boundary of the fluid layer. *Nelineynaya Dinamika*, 2016, 12 (2), 167–178. (In Russian). DOI: 10.20537/nd1602001.
36. Aristov, S.N., Privalova, V.V., and Prosviryakov, E.Yu. Planar linear Bénard-Rayleigh convection under quadratic heating of the upper boundary of a viscous incompressible liquid layer. *Vestnik Kazanskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2015, 2, 6–13. (In Russian).
37. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions of thermocapillary convection during localized heating of a flat layer of viscous incompressible liquid. *Vestnik Kazanskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta im. A.N. Tupoleva*, 2014, 3, 7–12. (In Russian).

38. Aristov, S.N. and Prosviryakov, E.Yu. On one class of analytic solutions of the stationary axisymmetric convection Bénard–Maragoni viscous incompressible fluid. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki,* 2013, 3 (32), 110–118. (In Russian). DOI: 10.14498/vsgtu1205.
39. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, 2, 92–109. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. Available at: http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2_170.html
40. Privalova, V.V. and Prosviryakov, E.Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery. *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2018, 22 (3), 532–548. DOI: 10.14498/vsgtu1638.
41. Andreev, V.K. and Efimova, M.V. The structure of a two-layer flow in a channel with radial heating of the lower substrate for small Marangoni numbers. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2024, 18 (2), 179–191. DOI: 10.1134/S1990478924020017.
42. Andreev, V.K. Thermocapillary convection of immiscible liquid in a three-dimensional layer at low Marangoni numbers. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2024, 17 (2), 195–206.
43. Andreev, V.K. and Pianykh, A.A. Comparative analysis of the analytical and numerical solution of the problem of thermocapillary convection in a rectangular channel. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2023, 16 (1), 48–55.
44. Andreev, V.K. and Lemeshkova, E.N. Thermal convection of two immiscible fluids in a 3D channel with a velocity field of a special type. *Fluid Dynamics*, 2023, 58 (7), 1246–1254. DOI: 10.1134/s0015462823602176.
45. Andreev, V.K. and Uporova, A.I. Initial boundary value problem on the motion of a viscous heat-conducting liquid in a vertical pipe. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics,* 2023, 16 (1), 5–16.
46. Andreev, V.K. and Uporova, A.I. On a spectral problem for convection equations. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2022, 15 (1), 88–100. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-1-88-100.
47. Andreev, V.K. and Stepanova, I.V. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2021, 14 (4), 445–451. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451.
48. Andreev, V.K. and Sobachkina, N.L. Two-layer stationary flow in a cylindrical capillary taking into account changes in the internal energy of the interface. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2021, 14 (4), 507–518. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-507-518.
49. Lemeshkova, E. and Andreev, V. On the asymptotic behavior of inverse problems for parabolic equation. *Journal of Elliptic and Parabolic Equations*, 2021, 7 (2), 905–921. DOI: 10.1007/s41808-021-00127-8.
50. Andreev, V.K. Asymptotic behavior of small perturbations for unsteady motion an ideal fluid jet. *Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics*, 2021, 14 (2), 204–212. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-2-204-212.

Подана в журнал: 17.02.2025
УДК 517.958
DOI: 10.17804/2410-9908.2025.2.006-027

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ОБЕРБЕКА – БУССИНЕСКА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ТЕЧЕНИЙ МНОГОСЛОЙНЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ СТОКСА

Л. С. Горулева[1, 2, а], И. И. Обабков[2, б], Е. Ю. Просвиряков [1, 2, в, *]

[1]*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук, ул. Комсомольская, 34, г. Екатеринбург, 620049, Россия*
[2]*Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», ул. Мира, д. 19, г. Екатеринбург, 620062, Россия*

[а] https://orcid.org/0000-0001-8635-5213 sherlarisa@yandex.ru;
[б] https://orcid.org/0009-0008-8729-529X iiobabkov@urfu.ru;
[в] https://orcid.org/0000-0002-2349-7801 evgen_pros@mail.ru

*Ответственный автор. Электронная почта: evgen_pros@mail.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия
Тел.: +7 (343) 375-35-76; факс: 374-53-30

Течение вязких несжимаемых жидкостей в технологических и природных процессах, технических устройствах характеризуется стратификацией гидродинамических полей. Традиционно исследуют стратификацию поля скорости и поля давления для изотермических потоков. Если движение жидкости происходит в тепловом поле, то важной характеристикой несжимаемой жидкости является температура. Конвективное течение жидкости имеет очень сложную топологическую структуру гидродинамических полей из-за зависимости плотности от температуры. Как известно, при описании конвекции в приближении Буссинеска зависимость плотности от пространственных координат и от времени игнорируется в уравнении непрерывности, и оно трансформируется в уравнение несжимаемости. Натурные и экспериментальные наблюдения за течением жидкостей позволяют выделить области потока с дискретным распределением плотности по одной из координат. Такие жидкости в научной литературе называют многослойными жидкостями. Их математическое описание существенно усложняется, поскольку для каждого слоя необходимо решать систему уравнений Обербека – Буссинеска и «сшивать» аналитические или численные решения между слоями и границами. Для прикладных исследований конвективных потоков часто вводится аппроксимация Стокса для полной производной векторной или скалярной функции. В статье рассмотрено построение точных решений Линя – Сидорова – Аристова для описания медленных (ползущих) течений неоднородно нагретой многослойной жидкости. В этом случае гидродинамические поля описываются специальными полиномами с функциональным произволом. Показано, как можно автоматизировать вычисления неизвестных коэффициентов для формирования гидродинамических полей (скоростей и температуры). Для установившихся течений типа Стокса точное решение системы Обербека – Буссинеска выписано в явном виде (посредством формул).

Ключевые слова: точное решение, уравнение Навье – Стокса, уравнение Обербека – Буссинеска, аппроксимация Стокса, конвекция, многослойная жидкость, класс Линя – Сидорова – Аристова

1. Введение

Теоретическое исследование конвективных течений вязких несжимаемых жидкостей в неоднородном тепловом поле осуществляется посредством интегрирования уравнений Навье – Стокса, дополненных уравнением неразрывности (несжимаемости) и уравнением теплопроводности (уравнением энергии) [1–6]. В уравнениях Навье – Стокса и в уравнении неразрывности используется аппроксимация Буссинеска – линейная зависимость плотности жидкости от температуры [1–5].

Приближение Буссинеска для плотности жидкости позволило вывести систему Обербека – Буссинеска для описания конвективных потоков [1–5]. Известно, что система Обербека – Буссинеска является приближенной:

1) изменение плотности жидкости учитывается только в объемной силе Архимеда, а в силах инерции оно игнорируется [1–5];

2) в уравнении непрерывности линейное распределение плотности в зависимости от температуры заменяют на постоянную среднюю плотность, которую имеет жидкость до нагрева или охлаждения, поэтому оно трансформируется в уравнение несжимаемости [1–5]. Иными словами, осуществляется пренебрежение слабыми эффектами сжимаемости жидкости, обусловленными неоднородностями поля температуры, то есть жидкость предполагается несжимаемой [1–5].

Несмотря на некоторую непоследовательность вывода системы уравнений Обербека – Буссинеска, эти уравнения с удовлетворительной степенью точности описывают конвективные потоки. Данный вывод многократно подтверждался экспериментально многочисленными исследователями [2, 3].

Таким образом, важно разрабатывать новые точные, аналитические, приближенные и численные методы для интегрирования уравнений Обербека – Буссинеска. Основным теоретическим подходом для исследования конвективных течений вязких несжимаемых жидкостей является построение классов точных решений.

Первым точным решением для уравнений Обербека – Буссинеска является класс Остроумова – Бириха и построенное на основе этого класса семейство Шлиомиса для описания однонаправленных потоков $\mathbf{V} = (V_x, 0, 0)$ [5–12]:

$$V_x = U(z,t),$$

$$P = P_0(z,t) + xP_1(z,t),$$

$$T = T_0(z,t) + xT_1(z,t).$$

Семейство Остроумова – Бириха – Шлиомиса описывает поперечную структуру вертикальной и горизонтальной конвекции. В статьях [13–15] была предложена модификация точного решения Остроумова – Бириха – Шлиомиса для сдвиговых движений $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$:

$$V_x = U(z,t),$$

$$V_y = V(z,t),$$

$$P = P_0(z,t) + xP_1(z,t) + yP_2(z,t),$$

$$T = T_0(z,t) + xT_1(z,t) + yT_2(z,t).$$

Для интегрирования трехмерных конвективных течений $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)$ был предложен класс точных решений Линя – Сидорова – Аристова [16–18]:

$$V_x(x,y,z,t)=U(z,t)+xu_1(z,t)+yu_2(z,t),$$

$$V_y(x,y,z,t)=V(z,t)+xv_1(z,t)+yv_2(z,t),$$

$$V_y=w(z,t),$$

$$P(x,y,z,t)=P_0(z,t)+xP_1(z,t)+yP_2(z,t)+\frac{x^2}{2}P_1(z,t)+xyP_{12}(z,t)+\frac{y^2}{2}P_{22}(z,t),$$

$$T(x,y,z,t)=T_0(z,t)+xT_1(z,t)+yT_2(z,t)+\frac{x^2}{2}T_1(z,t)+xyT_{12}(z,t)+\frac{y^2}{2}T_{22}(z,t).$$

Данный класс является автомодельным точным решением с пространственным ускорением [18–20]. Такое представление гидродинамических полей позволяет изучить поперечную структуру трехмерных потоков, для которых невозможны или затруднительны прямые экспериментальные исследования [4–6, 11, 12, 19].

При помощи класса точных решений Линя – Сидорова – Аристова были получены классы точных решений для описания конвективных течений жидкостей с термодиффузией с учетом магнитного поля для сложных капельных сред [20]. Кроме того, на его основе были предложены точные решения для микрополярных жидкостей, для несжимаемых текучих сред с учетом диссипативной функции Рэлея и для уравнений геофизической гидродинамики [21–23].

В последнее время стали строить методы для исследования течений многослойных жидкостей [24, 25]. Актуальность и важность исследований многослойных жидкостей основывается на экспериментальных и натурных наблюдениях [1–5, 24, 25]. В океанологии используется модель многослойного океана. Она строится на дискретной аппроксимации плотности жидкости по областям: слой жидкости заменяют несколькими подслоями, каждый из которых имеет разную плотность. Для каждого подслоя записывается система уравнений Обербека – Буссинеска, и после ее интегрирования осуществляется «сшивание» решений. Другим примером многослойных систем является двухслойная система «жидкость – газ», которая используется для охлаждающих устройств [4, 5, 24, 25]. В случае если характерная скорость течения газа много меньше скорости звука, можно сжимаемостью газа пренебречь и описывать его течение как течение капельной жидкости [4, 5, 24, 25].

В технических устройствах скорости конвективного потока, как правило, небольшие. Такие движения жидкости называются медленными (ползущими) течениями. Важную роль при изучении ползущих течений играет приближение Стокса [26–50], позволяющее линеаризовать нелинейную систему Обербека – Буссинеска. Построение точных решений для линейной системы Обербека – Буссинеска для описания многослойных жидкостей имеет самостоятельный интерес, поскольку полученные результаты можно использовать для проектирования технических устройств, в которых жидкости медленно движутся относительно друг друга и границ агрегата [33–50].

В данной статье рассматриваются точные решения системы Обербека – Буссинеска для течений Стокса многослойных жидкостей в полиномиальном классе точных решений Линя – Сидорова – Аристова, а для установившихся течений выписаны формулы гидродинамических полей в явном виде.

2. Уравнения движения

Система уравнений Обербека – Буссинеска для описания конвективных течений многослойных жидкостей в неоднородном поле температуры в векторной форме имеет следующий вид [2, 3, 24, 25]:

$$\frac{d\mathbf{V}^{(k)}}{dt} = -\nabla^{(k)}P^{(k)} + \nu^{(k)}\Delta^{(k)}\mathbf{V}^{(k)} + g^{(k)}\beta^{(k)}T^{(k)}\mathbf{i}_3,$$

$$\frac{dT^{(k)}}{dt} = \chi^{(k)}\Delta^{(k)}T^{(k)},$$

$$\nabla^{(k)}\cdot\mathbf{V}^{(k)} = 0. \qquad (1)$$

Дискретно стратифицированная по плотности жидкость состоит для определенности из n слоев, то есть индекс k принадлежит конечному подмножеству множества натуральных чисел:

$$k = \overline{1,n} = \{1, 2, 3, \ldots, n-1, n\}.$$

Для плотностей слоев справедлива здесь и далее следующая оценка в виде цепочки строгих неравенств:

$$\rho^{(1)} > \rho^{(2)} > \rho^{(3)} > \ldots > \rho^{(n-1)} > \rho^{(n)}.$$

При выполнении данных неравенств справедливо условие, что более тяжелая жидкость находится ниже менее плотной среды, то есть жидкость является устойчивой в гидростатическом состоянии.

В уравнениях (1) использована стандартная аппроксимация Буссинеска для плотности с линейной зависимостью от температуры:

$$\rho^{(k)} = \rho_0^{(k)}\left(1 - \beta^{(k)}T^{(k)}\right),$$

где $\rho_0^{(k)}$ – средняя плотность жидкости, $\beta^{(k)}$ – коэффициент теплового расширения, $T^{(k)}$ – отклонение температуры от равновесного значения.

Кроме того, в уравнениях (1) введены обозначения для описания многослойной жидкости: $\mathbf{V}\left(t, x^{(k)}, y^{(k)}, z^{(k)}\right) = \left(V_x^{(k)}, V_y^{(k)}, V_z^{(k)}\right)$ – вектор скорости слоя жидкости; $P^{(k)}$ – отклонение давления от гидростатического, деленное на $\rho_0^{(k)}$; $\nu^{(k)}$ – кинематическая вязкость; $g^{(k)}$ – ускорение свободного падения; $\chi^{(k)}$ – коэффициент температуропроводности; $\nabla^{(k)} = \mathbf{i}_1\frac{\partial}{\partial x^{(k)}} + \mathbf{i}_2\frac{\partial}{\partial y^{(k)}} + \mathbf{i}_3\frac{\partial}{\partial z^{(k)}}$ – оператор Гамильтона; $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ – орты декартовой прямоугольной системы координат; $\Delta^{(k)} = \frac{\partial^2}{\partial\left(x^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial\left(y^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}$ – оператор Лапласа; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^{(k)}\cdot\nabla^{(k)}$ – полная производная (индивидуальная производная, материальная производная, производная в частице, производная вдоль траектории), состоящая из суммы локальной производной (местной производной) и конвективной производной.

При изучении конвективных потоков многослойных жидкостей стратификация возможна не только при учете дискретного распределения плотности по толщине слоя

$$\rho^{(1)} > \rho^{(2)} > \rho^{(3)} > \ldots > \rho^{(n-1)} > \rho^{(n)},$$

но и для кинематической (молекулярной) вязкости $\nu^{(k)}$ и динамической вязкости $\eta^{(k)} = \nu^{(k)}\rho^{(k)}$, а также для коэффициента теплового расширения $\beta^{(k)}$.

Отметим, что систему уравнений (1) можно рассматривать в альтернативном виде, если вместо кинематической (молекулярной) вязкости $\nu^{(k)}$ использовать динамическую вязкость $\eta^{(k)} = \nu^{(k)}\rho^{(k)}$:

$$\rho^{(k)}\frac{d\mathbf{V}^{(k)}}{dt} = -\nabla^{(k)}p^{(k)} + \eta^{(k)}\Delta^{(k)}\mathbf{V}^{(k)} + g^{(k)}\beta^{(k)}T^{(k)}\mathbf{i}_3,$$

$$\frac{dT^{(k)}}{dt} = \chi^{(k)}\Delta^{(k)}T^{(k)},$$

$$\nabla^{(k)}\cdot\mathbf{V}^{(k)} = 0.$$

Здесь $p^{(k)}$ – отклонение давления от гидростатического значения, при котором начинается конвекция.

Рассмотрим далее приближение Стокса для системы (1) [33–50]. Полагаем в уравнениях Обербека – Буссинеска (1) выполнение равенств для конвективных слагаемых относительно вектора скорости

$$\left(\mathbf{V}^{(k)}\cdot\nabla^{(k)}\right)\mathbf{V}^{(k)} = 0$$

и относительно скалярного поля температуры

$$\left(\mathbf{V}^{(k)}\cdot\nabla^{(k)}\right)T^{(k)} = 0$$

в выражении полной производной для ускорения представительного объема многослойной жидкости, записанного в эйлеровых координатах:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^{(k)}\cdot\nabla^{(k)}.$$

После использования данной аппроксимации для уравнений переноса импульса и уравнения переноса энергии получим следующие линейные уравнения движения Обербека – Буссинеска в приближении Стокса [24, 25, 33–50]:

$$\frac{\partial\mathbf{V}^{(k)}}{\partial t} = -\nabla P^{(k)} + \nu^{(k)}\Delta^{(k)}\mathbf{V}^{(k)} + g^{(k)}\beta^{(k)}T^{(k)}\mathbf{i}_3,$$

$$\frac{\partial T^{(k)}}{\partial t} = \chi^{(k)}\Delta^{(k)}T^{(k)},$$

$$\nabla\cdot\mathbf{V}^{(k)} = 0. \qquad (2)$$

Приближение Стокса описывает с удовлетворительной степенью точности гидродинамические потоки с близкими к нулю значениями чисел Рейнольдса или Грасгофа [24–28, 33–50].

Линейную систему уравнений в частных производных (2) приведем в координатной форме в декартовой прямоугольной системе координат, которая после проецирования на оси записывается следующим образом:

$$\frac{\partial V_x^{(k)}}{\partial t} = -\frac{\partial P^{(k)}}{\partial x^{(k)}} + \nu^{(k)}\left(\frac{\partial^2 V_x^{(k)}}{\partial\left(x^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 V_x^{(k)}}{\partial\left(y^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 V_x^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_y^{(k)}}{\partial t} = -\frac{\partial P^{(k)}}{\partial y^{(k)}} + \nu^{(k)}\left(\frac{\partial^2 V_y^{(k)}}{\partial\left(x^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 V_y^{(k)}}{\partial\left(y^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 V_y^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_z^{(k)}}{\partial t} = -\frac{\partial P^{(k)}}{\partial z^{(k)}} + \nu^{(k)}\left(\frac{\partial^2 V_z^{(k)}}{\partial\left(x^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 V_z^{(k)}}{\partial\left(y^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 V_z^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}\right) + \mathrm{g}^{(k)}\beta^{(k)}T^{(k)},$$

$$\frac{\partial T^{(k)}}{\partial t} = \chi^{(k)}\left(\frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial\left(x^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial\left(y^{(k)}\right)^2} + \frac{\partial^2 T^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}\right),$$

$$\frac{\partial V_x^{(k)}}{\partial x^{(k)}} + \frac{\partial V_y^{(k)}}{\partial y^{(k)}} + \frac{\partial V_z^{(k)}}{\partial z^{(k)}} = 0. \tag{3}$$

Точное решение линейной системы (3), состоящей из простейших параболических уравнений размерности (3 + 1), будем определять в известном классе точных решений Линя – Сидорова – Аристова [16–18, 20, 24, 25]:

$$V_x^{(k)} = U^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + x^{(k)}u_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + y^{(k)}u_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right),$$

$$V_y^{(k)} = V^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + x^{(k)}v_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + y^{(k)}v_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right),$$

$$V_z^{(k)} = w^{(k)}\left(z^{(k)},t\right),$$

$$P^{(k)} = P_0^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + P_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)} + P_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)y^{(k)} +$$

$$+P_{11}^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2} + P_{12}^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)}y^{(k)} + P_{22}^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2},$$

$$T^{(k)} = T_0^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + T_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)} + T_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)y^{(k)} +$$

$$+T_{11}^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2} + T_{12}^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)}y^{(k)} + T_{22}^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2}. \tag{4}$$

Выражения (4) получены суперпозицией применения аддитивного и мультипликативного методов разделения переменных для определения гидродинамических полей скорости, давления и температуры [16–18, 20, 24, 25].

Точное решение (4) описывает поле скоростей $V_x^{(k)}$, $V_y^{(k)}$ и $V_z^{(k)}$ линейными формами относительно координат $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$, а поля давления $P^{(k)}$ и температуры $T^{(k)}$ – квадратичными формами этих же координат $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$. Коэффициенты линейных $V_x^{(k)}$, $V_y^{(k)}$, $V_z^{(k)}$ и квадратичных форм $P^{(k)}$, $T^{(k)}$ (4) зависят от третьей координаты $z^{(k)}$ и времени t. Вид семейства точного решения обеспечивает широкий функциональный произвол [30, 31].

Отметим, что точное решение (4) может быть обобщено до представления гидродинамических полей следующими формами [26, 27]:

$$V_x^{(k)} = U^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + x^{(k)}u_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + y^{(k)}u_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) +$$

$$+u_3^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2} + u_4^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)}y^{(k)} + u_5^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2};$$

$$V_y^{(k)} = V^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + x^{(k)}v_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + y^{(k)}v_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) +$$

$$+v_3^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2} + v_4^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)}y^{(k)} + v_5^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2};$$

$$V_z^{(k)} = w^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + x^{(k)}w_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + y^{(k)}w_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right);$$

$$P^{(k)} = P_0^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + P_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)} + P_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)y^{(k)} +$$

$$+P_3^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2} + P_4^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)}y^{(k)} + P_5^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2} +$$

$$+P_6^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^3}{3!} + P_7^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2 y^{(k)}}{2} +$$

$$+P_8^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{x^{(k)}\left(y^{(k)}\right)^2}{2} + P_9^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^3}{3!};$$

$$T^{(k)} = T_0^{(k)}\left(z^{(k)},t\right) + T_1^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)} + T_2^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)y^{(k)} +$$

$$+T_3^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2} + T_4^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)x^{(k)}y^{(k)} + T_5^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2} +$$

$$+T_6^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^3}{3!} + T_7^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2 y^{(k)}}{2} +$$

$$+T_8^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{x^{(k)}\left(y^{(k)}\right)^2}{2} + T_9^{(k)}\left(z^{(k)},t\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^3}{3!}.$$

Изучение свойств данного решения не является целью данной статьи, в которой иллюстрируется возможность дальнейшего обобщения результатов до представления гидродинамических полей $V_x^{(k)}$, $V_y^{(k)}$, $V_z^{(k)}$, $P^{(k)}$, $T^{(k)}$ специальными многочленами произвольных степеней, согласующихся со структурой системы (3).

Подставим формулы для гидродинамических полей (4) в систему уравнений (3) и получим следующую систему:

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial t} = -\left(P_1^{(k)} + x^{(k)}P_{11}^{(k)} + y^{(k)}P_{12}^{(k)}\right) +$$

$$+\nu^{(k)}\left(\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+x^{(k)}\frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+y^{(k)}\frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}\right);$$

$$\frac{\partial V^{(k)}}{\partial t}=-\left(P_2^{(k)}+y^{(k)}P_{22}^{(k)}+x^{(k)}P_{12}^{(k)}\right)+$$

$$+\nu^{(k)}\left(\frac{\partial^2 V^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+x^{(k)}\frac{\partial^2 v_1^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+y^{(k)}\frac{\partial^2 v_2^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}\right);$$

$$\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t}=\nu^{(k)}\frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}-$$

$$-\left(\frac{\partial P_0^{(k)}}{\partial z^{(k)}}+x^{(k)}\frac{\partial P_1^{(k)}}{\partial z^{(k)}}+y^{(k)}\frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial z^{(k)}}+\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2}\frac{\partial P_{11}^{(k)}}{\partial z^{(k)}}+\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2}\frac{\partial P_{22}^{(k)}}{\partial z^{(k)}}+x^{(k)}y^{(k)}\frac{\partial P_{12}^{(k)}}{\partial z^{(k)}}\right)+$$

$$+g^{(k)}\beta^{(k)}\left(T_0^{(k)}+x^{(k)}T_1^{(k)}+y^{(k)}T_2^{(k)}+\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2}T_{11}^{(k)}+\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2}T_{22}^{(k)}+x^{(k)}y^{(k)}T_{12}^{(k)}\right),$$

$$\frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial t}=\chi^{(k)}\left(T_{11}^{(k)}+T_{22}^{(k)}+\frac{\partial^2 T_0^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+x^{(k)}\frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+y^{(k)}\frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2}\frac{\partial^2 T_{11}^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2}\frac{\partial^2 T_{22}^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}+x^{(k)}y^{(k)}\frac{\partial^2 T_{12}^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}\right),$$

$$\frac{\partial w^{(k)}}{\partial z^{(k)}}+u_1^{(k)}+v_2^{(k)}=0. \tag{5}$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$ в (5), получим следующую систему, состоящую из $19n$ нестационарных нелинейных уравнений в частных производных, для определения неизвестных $19n$ функций:

$$\frac{\partial U^{(k)}}{\partial t}=\nu^{(k)}\frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}-P_1^{(k)},$$

$$\frac{\partial u_1^{(k)}}{\partial t}=\nu^{(k)}\frac{\partial^2 u_1^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}-P_{11}^{(k)},$$

$$\frac{\partial u_2^{(k)}}{\partial t}=\nu^{(k)}\frac{\partial^2 u_2^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}-P_{12}^{(k)},$$

$$\frac{\partial V^{(k)}}{\partial t}=\nu^{(k)}\frac{\partial^2 V^{(k)}}{\partial\left(z^{(k)}\right)^2}-P_2^{(k)},$$

$$\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial t} = \nu^{(k)} \frac{\partial^2 v_1^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2} - P_{12}^{(k)},$$

$$\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial t} = \nu^{(k)} \frac{\partial^2 v_2^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2} - P_{22}^{(k)},$$

$$\frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} = \nu^{(k)} \frac{\partial^2 w^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2} - \frac{\partial P_0^{(k)}}{\partial z^{(k)}} - g^{(k)}\beta^{(k)}T_0^{(k)},$$

$$\frac{\partial P_1^{(k)}}{\partial z^{(k)}} = g^{(k)}\beta^{(k)}T_1^{(k)},$$

$$\frac{\partial P_2^{(k)}}{\partial z^{(k)}} = g^{(k)}\beta^{(k)}T_2^{(k)},$$

$$\frac{\partial P_{11}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} = g^{(k)}\beta^{(k)}T_{11}^{(k)},$$

$$\frac{\partial P_{12}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} = g^{(k)}\beta^{(k)}T_{12}^{(k)},$$

$$\frac{\partial P_{22}^{(k)}}{\partial z^{(k)}} = g^{(k)}\beta^{(k)}T_{22}^{(k)},$$

$$\frac{\partial T_0^{(k)}}{\partial t} = \chi^{(k)} \frac{\partial^2 T_0^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2} + \chi^{(k)}\left(T_{11}^{(k)} + T_{22}^{(k)}\right),$$

$$\frac{\partial T_1^{(k)}}{\partial t} = \chi^{(k)} \frac{\partial^2 T_1^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2},$$

$$\frac{\partial T_2^{(k)}}{\partial t} = \chi^{(k)} \frac{\partial^2 T_2^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2},$$

$$\frac{\partial T_{11}^{(k)}}{\partial t} = \chi^{(k)} \frac{\partial^2 T_{11}^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2},$$

$$\frac{\partial T_{12}^{(k)}}{\partial t} = \chi^{(k)} \frac{\partial^2 T_{12}^{(k)}}{\partial \left(z^{(k)}\right)^2}. \qquad (6)$$

Система (6) состоит из $14n$ однородных и неоднородных простейших уравнений типа теплопроводности и $5n$ уравнений градиентного типа.

3. Установившееся течение

Система уравнений (6) при установившемся течении редуцируется к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2T_1^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=0,$$

$$\frac{d^2T_2^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=0,$$

$$\frac{d^2T_{11}^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=0,$$

$$\frac{d^2T_{22\ \ 22}^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=0,$$

$$\frac{d^2T_{12}^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=0,$$

$$\frac{d^2T_0^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=-\left(T_{11}^{(k)}+T_{22}^{(k)}\right),$$

$$\frac{dP_1^{(k)}}{dz^{(k)}}=\mathrm{g}^{(k)}\beta^{(k)}T_1^{(k)},$$

$$\frac{dP_2^{(k)}}{dz^{(k)}}=\mathrm{g}^{(k)}\beta^{(k)}T_2^{(k)},$$

$$\frac{dP_{11}^{(k)}}{dz^{(k)}}=\mathrm{g}^{(k)}\beta^{(k)}T_{11}^{(k)},$$

$$\frac{dP_{12}^{(k)}}{dz^{(k)}}=\mathrm{g}^{(k)}\beta^{(k)}T_{12}^{(k)},$$

$$\frac{dP_{22}^{(k)}}{dz^{(k)}}=\mathrm{g}^{(k)}\beta^{(k)}T_{22}^{(k)},$$

$$\nu^{(k)}\frac{d^2U^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=P_1^{(k)},$$

$$\nu^{(k)}\frac{d^2u_1^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=P_{11}^{(k)},$$

$$\nu^{(k)}\frac{d^2u_2^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=P_{12}^{(k)},$$

$$\nu^{(k)}\frac{d^2V^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=P_2^{(k)},$$

$$\nu^{(k)}\frac{d^2v_1^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2}=P_{12}^{(k)},$$

$$\nu^{(k)} \frac{d^2 v_2^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2} = P_{22}^{(k)},$$

$$\frac{dw^{(k)}}{dz^{(k)}} + u_1^{(k)} + v_2^{(k)} = 0,$$

$$\frac{dP_0^{(k)}}{dz^{(k)}} = \nu^{(k)} \frac{d^2 w^{(k)}}{d\left(z^{(k)}\right)^2} + g^{(k)}\beta^{(k)} T_0^{(k)}. \tag{7}$$

Уравнения системы (7) выписаны в том порядке, в котором далее осуществляется аналитическое интегрирование.

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений тридцать первого порядка (7) начнем с определения коэффициентов квадратичной формы для поля температуры:

$$T_1^{(k)} = c_1^{(k)} z^{(k)} + c_2^{(k)},$$

$$T_2^{(k)} = c_3^{(k)} z^{(k)} + c_4^{(k)},$$

$$T_{11}^{(k)} = c_5^{(k)} z^{(k)} + c_6^{(k)},$$

$$T_{12}^{(k)} = c_7^{(k)} z^{(k)} + c_8^{(k)},$$

$$T_{22}^{(k)} = c_9^{(k)} z^{(k)} + c_{10}^{(k)},$$

$$T_0^{(k)} = -\left(c_5^{(k)} + c_9^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} - \left(c_6^{(k)} + c_{10}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2!} + c_{11}^{(k)} z^{(k)} + c_{12}^{(k)}.$$

Таким образом, поле температуры для установившегося конвективного течения Стокса описывается следующим многочленом от трех переменных:

$$T = -\left(c_5^{(k)} + c_9^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} - \left(c_6^{(k)} + c_{10}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2!} + c_{11}^{(k)} z^{(k)} + c_{12}^{(k)} +$$

$$+\left(c_1^{(k)} z^{(k)} + c_2^{(k)}\right)x^{(k)} + \left(c_3^{(k)} z^{(k)} + c_4^{(k)}\right)y^{(k)} +$$

$$+\left(c_5^{(k)} z^{(k)} + c_6^{(k)}\right)\frac{\left(x^{(k)}\right)^2}{2} + \left(c_7^{(k)} z^{(k)} + c_8^{(k)}\right)x^{(k)} y^{(k)} + \left(c_9^{(k)} z^{(k)} + c_{10}^{(k)}\right)\frac{\left(y^{(k)}\right)^2}{2}.$$

Далее определим горизонтальные градиенты давления $P_1^{(k)}$, $P_2^{(k)}$ и коэффициенты $P_{11}^{(k)}$, $P_{12}^{(k)}$, $P_{22}^{(k)}$, стоящие перед квадратичными мономами:

$$P_1^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_1^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_2^{(k)} z^{(k)}\right) + c_{13}^{(k)},$$

$$P_2^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_3^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_4^{(k)} z^{(k)}\right) + c_{14}^{(k)},$$

$$P_{11}^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_5^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_6^{(k)} z^{(k)}\right) + c_{15}^{(k)},$$

$$P_{12}^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_8^{(k)} z^{(k)}\right) + c_{16}^{(k)},$$

$$P_{22}^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_9^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{10}^{(k)} z^{(k)}\right) + c_{17}^{(k)}.$$

Для удобства коэффициенты $P_1^{(k)}$, $P_2^{(k)}$, $P_{11}^{(k)}$, $P_{12}^{(k)}$, $P_{22}^{(k)}$ для квадратичной формы, описывающей поле давления, можно записать следующим образом:

$$P_1^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_1^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_2^{(k)} z^{(k)} + c_{13}^{(k)}\right),$$

$$P_2^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_3^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_4^{(k)} z^{(k)} + c_{14}^{(k)}\right),$$

$$P_{11}^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_5^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_6^{(k)} z^{(k)} + c_{15}^{(k)}\right),$$

$$P_{12}^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_8^{(k)} z^{(k)} + c_{16}^{(k)}\right),$$

$$P_{22}^{(k)} = g^{(k)}\beta^{(k)}\left(c_9^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{10}^{(k)} z^{(k)} + c_{17}^{(k)}\right).$$

Перейдем к интегрированию уравнений для определения фоновых скоростей $U^{(k)}$, $V^{(k)}$, $w^{(k)}$, горизонтальных градиентов скоростей $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, $v_1^{(k)}$, $v_2^{(k)}$ (компонент пространственного ускорения):

$$U^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_1^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_2^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}\right) + \frac{c_{13}^{(k)}}{\nu^{(k)}}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{18}^{(k)} z^{(k)} + c_{19}^{(k)},$$

$$V^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_3^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_4^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}\right) + \frac{c_{13}^{(k)}}{\nu^{(k)}}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{20}^{(k)} z^{(k)} + c_{21}^{(k)},$$

$$u_1^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_5^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_6^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}\right) + \frac{c_{15}^{(k)}}{\nu^{(k)}}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{22}^{(k)} z^{(k)} + c_{23}^{(k)},$$

$$u_2^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_8^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}\right) + \frac{c_{16}^{(k)}}{\nu^{(k)}}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{24}^{(k)} z^{(k)} + c_{25}^{(k)},$$

$$v_1^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_8^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}\right) + \frac{c_{16}^{(k)}}{\nu^{(k)}}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{26}^{(k)} z^{(k)} + c_{27}^{(k)}$$

$$v_2^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_9^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_{10}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}\right) + \frac{c_{29}^{(k)}}{\nu^{(k)}}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{28}^{(k)} z^{(k)} + c_{29}^{(k)},$$

$$w^{(k)} = -\frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_5^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^5}{5!} + c_9^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^5}{5!} + c_6^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_{10}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}\right) -$$

$$-\left(c_{15}^{(k)} + c_{17}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!\nu^{(k)}} - \left(c_{26}^{(k)} + c_{28}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} - \left(c_{27}^{(k)} + c_{29}^{(k)}\right) z^{(k)} + c_{30}^{(k)}.$$

Очевидно, что при соответствующей нормировке постоянных интегрирования выражения для компонент поля скоростей можно переписать следующим образом:

$$U^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_1^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_2^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} + c_{13}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{18}^{(k)} z^{(k)} + c_{19}^{(k)}\right),$$

$$V^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_3^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_4^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} + c_{13}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{20}^{(k)} z^{(k)} + c_{21}^{(k)}\right),$$

$$u_1^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_5^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_6^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} + c_{15}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{22}^{(k)} z^{(k)} + c_{23}^{(k)}\right),$$

$$u_2^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_8^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} + c_{16}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{24}^{(k)} z^{(k)} + c_{25}^{(k)}\right),$$

$$v_1^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_8^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} + c_{16}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{26}^{(k)} z^{(k)} + c_{27}^{(k)}\right),$$

$$v_2^{(k)} = \frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu^{(k)}}\left(c_9^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!} + c_{10}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!} + c_{17}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2} + c_{28}^{(k)} z^{(k)} + c_{29}^{(k)}\right),$$

$$w^{(k)}=V_z^{(k)}=-\frac{g^{(k)}\beta^{(k)}}{\nu}\left(c_5^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^5}{5!}+c_9^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^5}{5!}+c_6^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+c_{10}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+\right.$$

$$\left.+\left(c_{15}^{(k)}+c_{17}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+\left(c_{26}^{(k)}+c_{28}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+\left(c_{27}^{(k)}+c_{29}^{(k)}\right)z^{(k)}+c_{30}^{(k)}\right).$$

Линейные формы, описывающие горизонтальные скорости $U^{(k)}$ и $V^{(k)}$, в силу найденных решений являются многочленами от трех переменных:

$$\frac{\nu^{(k)}}{g^{(k)}\beta^{(k)}}V_x^{(k)}=\left(c_1^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+c_2^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+c_{13}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+c_{18}^{(k)}z^{(k)}+c_{19}^{(k)}\right)+$$

$$+x^{(k)}\left(c_5^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+c_6^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+c_{15}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+c_{22}^{(k)}z^{(k)}+c_{23}^{(k)}\right)+$$

$$+y^{(k)}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+c_8^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+c_{16}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+c_{24}^{(k)}z^{(k)}+c_{25}^{(k)}\right),$$

$$\frac{\nu^{(k)}}{g^{(k)}\beta^{(k)}}V_y^{(k)}=\left(c_3^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+c_4^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+c_{13}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+c_{20}^{(k)}z^{(k)}+c_{21}^{(k)}\right)+$$

$$+x^{(k)}\left(c_7^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+c_8^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+c_{16}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+c_{26}^{(k)}z^{(k)}+c_{27}^{(k)}\right)+$$

$$+y^{(k)}\left(c_9^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}+c_{10}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+c_{17}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+c_{28}^{(k)}z^{(k)}+c_{29}^{(k)}\right).$$

Выражение для фонового давления после интегрирования имеет вид:

$$P_0^{(k)}=g^{(k)}\beta^{(k)}\left(-2\left(c_5^{(k)}+c_9^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^4}{4!}-2\left(c_6^{(k)}+c_{10}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^3}{3!}+c_{11}^{(k)}\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2}+c_{12}^{(k)}z^{(k)}\right)-$$

$$-\nu^{(k)}\left(-\left(c_{15}^{(k)}+c_{17}^{(k)}\right)\frac{\left(z^{(k)}\right)^2}{2!\nu}-\left(c_{26}^{(k)}+c_{28}^{(k)}\right)z^{(k)}-\left(c_{27}^{(k)}+c_{29}^{(k)}\right)\right)+c_{31}^{(k)}.$$

Здесь $c_i^{(k)}$, где $i=\overline{1;31}$, $k=\overline{1;n}$, – постоянные интегрирования точного решения системы уравнений (7). Отметим, что частные случаи краевых задач (двумерная, плоская конвекция) были рассмотрены в статьях [33–50], где была показана возможность стратификации гидродинамических полей скорости, давления и температуры.

4. Заключение

В статье представлено семейство точных решений для неустановившихся и установившихся медленных (ползущих) конвективных течений многослойной вязкой несжимаемой жидкости. Аппроксимация конвективной производной выполнена по правилу Стокса. Она полагается тождественно равной нулю в уравнениях Навье – Стокса и в уравнении теплопроводности. В этом случае квадратично нелинейная система Обербека – Буссинеска редуцируется к линейной системе уравнений в частных производных. Показано, что для установившихся течений поле скорости, поле давления и поле температуры в классе Линя – Сидорова – Аристова описываются многочленами от трех переменных. Эти многочлены иллюстрируют сложную стратификацию гидродинамических полей для широкого класса граничных условий.

Литература

1. Ostroumov G. A. Free convection under the condition of the internal problem. Ser. Technical Memorandum. – No. 1407. – Washington : National Advisory Committee for Aeronautics, 1958. – DOI: 10.1007/s11003-015-9815-y.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. – М. : Наука, 1972. – 392 с.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Непомнящий А. А. Устойчивость конвективных течений. – М. : Наука, 1989. – 320 с.
4. Getling A. V. Formation of spatial structures in Rayleigh–Bénard convection // Soviet Physics Uspekhi. – 1991. – 34 (9). – P. 737–776. – DOI: 10.1070/PU1991v034n09ABEH002470.
5. Mathematical Models of Convection / V. K. Andreev, Ya. A. Gaponenko, O. N. Goncharova, V. V. Pukhnachev. – Berlin, Boston : De Gruyter, 2012. – 417 p. – DOI: 10.1515/9783110258592.
6. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения в тонких слоях жидкости. – Киров : ВятГУ, 2011. – 206 с.
7. Birikh R. V. Thermocapillary convection in a horizontal layer of liquid // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1966. – Vol. 7 (3). – P. 43–44. – DOI: 10.1007/bf00914697.
8. Шлиомис М. И., Якушин В. И. Конвекция в двухслойной бинарной системе с испарением // Ученые записки Пермского госуниверситета. Сер. Гидродинамика. – 1972. – № 4. – С. 129–140.
9. Гершуни Г. З. Об устойчивости плоского конвективного течения жидкости // Журнал технической физики. – 1953. – Т. 23 (10). – С. 1838–1844.
10. Batchelor G. K. Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures // Quart. Appl. Math. – 1954. – Vol. 12 (3). – P. 209–233. – DOI: 10.1090/qam/64563.
11. Schwarz K. G. Plane-parallel advective flow in a horizontal incompressible fluid layer with rigid boundaries // Fluid Dynamics. – 2014. – Vol. 49 (4). – P. 438–442. – DOI: 10.1134/S0015462814040036.
12. Knyazev D. V. Two-dimensional flows of a viscous binary fluid between moving solid boundaries // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2011. – Vol. 52 (2). – P. 212–217. – DOI: 10.1134/ S0021894411020088.
13. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. О слоистых течениях плоской свободной конвекции // Нелинейная динамика. – 2013. – Т. 9 (4). – С. 651–657.
14. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu., Spevak L. F. Unsteady-state Bénard–Marangoni convection in layered viscous incompressible flows // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50 (2). – P. 132–141. – DOI: 10.1134/S0040579516020019.

15. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю., Спевак Л. Ф. Нестационарная слоистая тепловая и концентрационная конвекция Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2015. – Т. 8 (4). – С. 445–456. – DOI: 10.7242/1999-6691/2015.8.4.38.
16. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1957. – Vol. 1. – P. 391–395. – DOI: 10.1007/BF00298016.
17. Sidorov A. F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1989. – Vol. 30 (2). – P. 197–203. – DOI: 10.1007/BF00852164.
18. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : автореф. дис. … д-ра физ.-мат. наук : 01.02.05. – Владивосток, 1990. – 303 с.
19. Aristov S. N., Shvarts K. G. Convective heat transfer in a locally heated plane incompressible fluid layer // Fluid Dynamics. – 2013. – Vol. 48. – P. 330–335. – DOI: 10.1134/S001546281303006X.
20. Aristov S. N., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions for three-dimensional thermal diffusion equations // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2016. – Vol. 50. – P. 286–293. – DOI: 10.1134/S0040579516030027.
21. Baranovskii E. S., Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations with couple stresses // Symmetry. – 2021. – Vol. 13 (8). – P. 1355. – DOI: 10.3390/sym13081355.
22. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions to the Navier–Stokes equations with allowance for internal heat release // Optics and Spectroscopy. – 2022. – Vol. 130 (6). – P. 365–370. – DOI: 10.1134/S0030400X22070037.
23. Exact solutions of Navier–Stokes equations for quasi-two-dimensional flows with Rayleigh friction / N. Burmasheva, S. Ershkov, E. Prosviryakov, D. Leshchenko // Fluids. – 2023. – Vol. 8 (4). – P. 123. – DOI: 10.3390/fluids8040123.
24. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations for describing the convective flows of multilayer fluids // Rus. J. Nonlin. Dyn. – 2022. – Vol. 18 (3). – P. 397–410. – DOI: 10.20537/nd220305.
25. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions to the Navier–Stokes equations describing stratified fluid flows // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2021. – Vol. 25 (3). – P. 491–507. – DOI: 10.14498/vsgtu1860.
26. Prosviryakov E. Yu. New class of exact solutions of Navier-Stokes equations with exponential dependence of velocity on two spatial coordinates // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2019. – Vol. 53 (1). – P. 107–114. – DOI: 10.1134/S0040579518060088.
27. Privalova V. V, Prosviryakov E. Yu. A new class of exact solutions of the Oberbeck–Boussinesq equations describing an incompressible fluid // Theoretical Foundations of Chemical Engineering. – 2022. – Vol. 56 (3). – P. 331–338. – DOI: 10.1134/S0040579522030113.
28. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Nonuniform Couette–Poiseuille shear flow with a moving lower boundary of a horizontal layer // Technical Physics Letters. – 2022. – Vol. 48. – P. 258–262. – DOI: 10.1134/S1063785022090024.
29. Горулева Л. С., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений уравнений магнитной гидродинамики для описания конвективных течений бинарных жидкостей // Химическая физика и мезоскопия. – 2023. – Т. 25 (4). – С. 447–462. – DOI: 10.15350/17270529.2023.4.39.
30. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact Solutions to the Navier–Stokes equations for describing inhomogeneous isobaric vertical vortex fluid flows in regions with permeable boundaries // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 1. – P. 41–53. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.041-053. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-1/2023-1_393.html

31. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional steady-state inhomogeneous Couette flow with a quadratic velocity profile along a horizontal coordinate // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2022. – Iss. 3. – P. 47–60. – DOI: 10.17804/2410-9908.2022.3.047-060. – URL: http://dream-journal.org/issues/2022-3/2022-3_367.html
32. Goruleva L. S., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for the description of nonuniform unidirectional flows of magnetic fluids in the Lin–Sidorov–Aristov class // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2023. – Iss. 5. – P. 39–52. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.039-052. – URL: http://dream-journal.org/issues/2023-5/2023-5_415.html
33. Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное конвективное течение Куэтта-Хименца при квадратичном нагреве нижней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2018. – Т. 14 (1). – С. 69–79. – DOI: 10.20537/nd1801007.
34. Vlasova, S. S., Prosviryakov E. Yu. Parabolic convective motion of a fluid cooled from below with the heat exchange at the free boundary // Russian Aeronautics. – 2016. – Vol. 59 (4). – P. 529–535. – DOI: 10.3103/S1068799816040140.
35. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Стационарное неизотермическое течение Куэтта. Квадратичный нагрев верхней границы слоя жидкости // Нелинейная динамика. – 2016. – Т. 12 (2). – С. 167–178. – DOI: 10.20537/nd1602001.
36. Аристов С. Н., Привалова В. В., Просвиряков Е. Ю. Плоская линейная конвекция Бенара–Рэлея при квадратичном нагреве верхней границы слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2015. – № 2. – С. 6–13.
37. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Точные решения термокапиллярной конвекции при локализованном нагреве плоского слоя вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Казанского государственного технического университета им. А. Н. Туполева. – 2014. –№ 3. – С. 7–12.
38. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Об одном классе аналитических решений стационарной осесимметричной конвекции Бенара–Марангони вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физ.-мат. науки». – 2013. – № 3 (32). – С. 110–118. – DOI: 10.14498/vsgtu1205.
39. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Exact solutions for a Couette–Hiemenz creeping convective flow with linear temperature distribution on the upper boundary // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 2. – P. 92–109. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.2.092-109. – URL: http://dream-journal.org/issues/2018-2/2018-2_170.html
40. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu. Couette–Hiemenz exact solutions for the steady creeping convective flow of a viscous incompressible fluid, with allowance made for heat recovery // Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Tekhnicheskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2018. – Vol. 22 (3). – P. 532–548. – DOI: 10.14498/vsgtu1638.
41. Andreev V. K., Efimova M. V. The structure of a two-layer flow in a channel with radial heating of the lower substrate for small Marangoni numbers // Journal of Applied and Industrial Mathematics. – 2024. – Vol. 18 (2). – P. 179–191. – DOI: 10.1134/S1990478924020017.
42. Andreev V. K. Thermocapillary convection of immiscible liquid in a three-dimensional layer at low Marangoni numbers // Journal of Siberian Federal Universit. Mathematics and Physics. – 2024. – Vol. 17 (2). – P. 195–206.
43. Andreev V. K., Pianykh A. A. Comparative analysis of the analytical and numerical solution of the problem of thermocapillary convection in a rectangular channel // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2023. – Vol. 16 (1). – P. 48–55.
44. Andreev V. K., Lemeshkova E. N. Thermal convection of two immiscible fluids in a 3D channel with a velocity field of a special type // Fluid Dynamics. – 2023. – Vol. 58 (7). – P. 1246–1254. – DOI: 10.1134/s0015462823602176.

45. Andreev V. K., Uporova A. I. Initial boundary value problem on the motion of a viscous heat-conducting liquid in a vertical pipe // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2023. – Vol. 16 (1). – P. 5–16.
46. Andreev V. K., Uporova A. I. On a spectral problem for convection equations // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2022. – Vol. 15 (1). – P. 88–100. – DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-1-88-100.
47. Andreev V. K., Stepanova I. V. Inverse problem for source function in parabolic equation at Neumann boundary conditions // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 14 (4). – P. 445–451. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-445-451.
48. Andreev V. K., Sobachkina N. L. Two-layer stationary flow in a cylindrical capillary taking into account changes in the internal energy of the interface // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 14 (4). – P. 507–518. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-507-518.
49. Lemeshkova E., Andreev V. On the asymptotic behavior of inverse problems for parabolic equation // Journal of Elliptic and Parabolic Equations. – 2021. – Vol. 7 (2). – P. 905–921. – DOI: 10.1007/s41808-021-00127-8.
50. Andreev V. K. Asymptotic behavior of small perturbations for unsteady motion an ideal fluid jet // Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol. 14 (2). – P. 204–212. – DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-2-204-212.