

Received: 28.02.2023

Revised: 21.04.2023



Accepted: 28.04.2023



DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.049-064

ANALYTICAL AND NUMERICAL RADially SYMMETRIC SOLUTIONS TO A HEAT EQUATION WITH ARBITRARY NONLINEARITY

A. L. Kazakov^{a)} and L. F. Spevak^{b),*}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

^{a)}  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  a_kazakov@mail.ru;

^{b)}  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  ifs@imach.uran.ru

*Corresponding author. E-mail: ifs@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 362-3022; fax: +7 (343) 374-5330

The paper deals with the construction of radially symmetric heat waves, which are solutions to the heat conduction equation with an arbitrary form of nonlinearity under nonzero boundary condition specified on a moving manifold. The boundary value problem under study is a generalization of those solved by us earlier. Firstly, the class of the considered parabolic equations is extended; secondly, the boundary condition generating a heat wave in a space of arbitrary dimensionality has a more general form. A new theorem of the existence and uniqueness of the heat-wave-type analytical solution is proved for this problem. An approximate method of constructing solutions of the required form is proposed, which is based on expansion in radial basis functions combined with the collocation method. At each time step, the solution is constructed in two stages. The first stage is solving a problem in the region bounded by a specified moving manifold and a heat wave front, which is *a priori* unknown and evaluated during solving. Herewith, a special substitution is used, i.e. the required function and the spatial variable change their roles. In the second stage, the solution is completed in the region bounded by the positions of the specified moving manifold on a current step and at the initial time. The boundary conditions are defined from the first-step solution. In the test example, the solutions constructed by the developed algorithm are compared with the known exact solution. Calculations show a good accuracy of the numerical solutions at various values of the numerical parameters, including space dimensionality. The observed numerical convergence with respect to the time step shows the correctness of the proposed computational procedure.

Keywords: nonlinear heat equation, radially symmetric solution, heat wave, power series, collocation method, radial basis functions.

Acknowledgment

The study was carried out in accordance with state assignment No. AAAA-A18-118020790140-5 for the IES UB RAS.

References

1. Vazquez J.L. *The Porous Medium Equation: Mathematical Theory*, Oxford, Clarendon Press, 2007, 648 p. ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.

2. Samarskii A.A., Galaktionov V.A., Kurdyumov S.P., Mikhailov A.P. *Blow-Up in Quasilinear Parabolic Equations*, NY, Berlin, Walter de Gruyter, 1995, 534 p. ISBN 3-11-012754-7.
3. Zeldovich Ya.B., Kompaneets A.S. On the theory of heat propagation with temperature-dependent thermal conductivity. In: *Sbornik, posvyashchennyi 70-letiyu akademika A.F. Ioffe* [Collection Dedicated to the 70th Anniversary of Academician A.F. Ioffe]. Moscow, Izd-vo AN SSSR Publ., 1950, pp. 61–71. (In Russian).
4. Barenblatt G.I., Vishik I.M. On the final velocity of propagation in problems of non-stationary filtration of liquid and gas. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika*, 1956, vol. 20, No. 3, pp. 411–417. (In Russian).
5. Oleynik O.A., Kalashnikov A.S., Chzhou Y.-L. The Cauchy problem and boundary value problems for equations of the type of non-stationary filtration. *Izvestiya AN SSSR. Seriya Matematicheskaya*, 1958, vol. 22, No. 5, pp. 667–704. (In Russian).
6. Sidorov A.F. *Izbrannye trudy: matematika, mekhanika* [Selected Works: Mathematics, Mechanics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2001, 576 p. (In Russian). ISBN 5-9221-0103-X.
7. Kazakov A.L., Spevak L.F. Boundary elements method and power series method for one-dimensional nonlinear filtration problems. *Izvestiya IGU, Seriya Matematika*, 2012, vol. 5, No. 2, pp. 2–17. (In Russian).
8. Kazakov A.L., Spevak L.F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form. *Applied Mathematical Modelling*, 2013, vol. 37, iss. 10–11, pp. 6918–6928. DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
9. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A., Spevak L.F. On a degenerate boundary value problem for the porous medium equation in spherical coordinates. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2014, vol. 20, No. 1, pp. 119–129. (In Russian).
10. Kazakov A.L., Spevak L.F., Nefedova O.A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2018, iss. 6, pp. 100–116. DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. Available at: http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html
11. Kazakov A.L., Nefedova O.A., Spevak L.F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2019, vol. 59, No. 6, pp. 1015–1029. DOI: 10.1134/S0965542519060083.
12. Kazakov A.L., Spevak L.F., Nefedova O.A., Lempert A.A. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term. *Symmetry*, 2020, vol. 12, iss. 6, pp. 921 (3–15). DOI: 10.3390/sym12060921.
13. Kazakov A.L., Spevak L.F. On the construction of a heat wave generated by a boundary condition on a moving border. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2021, iss. 6, pp. 54–67. DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.054-067. Available at: http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6_350.html
14. Kazakov A.L. On exact solutions to a heat wave propagation boundary-value problem for a nonlinear heat equation. *Sibirskie Elektronnye Matematicheskie Izvestiya*, 2019, vol. 16, pp. 1057–1068. (In Russian). Available at: <http://semr.math.nsc.ru/v16>
15. Kazakov A.L., Spevak L.F. Approximate and exact solutions to the singular nonlinear heat equation with a common type of nonlinearity. *Izvestiya Irkutskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya Matematika*, 2020, vol. 34, pp. 18–34. (In Russian). DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.18.
16. Kazakov A.L., Spevak L.F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities. *Mathematics*, 2022, vol. 10, 1559. DOI: 10.3390/math10091559.

17. Powell M.J.D. The theory of radial basis function approximation in 1990. In: *Advances in Numerical Analysis*, vol. 2: Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions, Light W.A., ed., 1992, Clarendon Press, Oxford, pp. 105–210.
18. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions. *Acta Numerica*, 2015, vol. 24, pp. 215–258. DOI: 10.1017/S0962492914000130.
19. Buhmann M.D. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, 2003, 272 p. ISBN 0521633389, 9780521633383.
20. Golberg M.A., Chen C.-S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 1999, vol. 23, pp. 285–296. DOI: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3.
21. Banerjee P.K., Butterfield R. *Boundary Element Methods in Engineering Science*, U.S., McGraw-Hill Inc., 1981, 452 p. ISBN-10: 0070841209, ISBN-13: 978-0070841208.
22. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C. *Boundary Element Techniques*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1984, 466 p. ISBN 978-3-642-48862-7. DOI: 10.1007/978-3-642-48860-3.
23. Nardini D., Brebbia C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements. *Applied Mathematical Modelling*, 1983, vol. 7, No. 3, pp. 157–162. DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
24. Wrobel L.C., Brebbia C.A., Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction. In: *Finite Elements in Water Resources VI*, Springer-Verlag, Berlin, 1986, pp. 801–811.
25. Wrobel L.C., Brebbia C.A. The dual reciprocity boundary element formulation for diffusion problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1987, vol. 65, iss. 2, pp. 147–164. DOI: 10.1016/0045-7825(87)90010-7.
26. Golberg M.A. Numerical evaluation of particular solutions in the BEM – A review. *Boundary Elements Communications*, 1995, vol. 6, pp. 99–106.
27. Golberg Michael A. Recent developments in the numerical evaluation of particular solutions in the boundary element method. *Applied Mathematics and Computation*, 1996, vol. 75, iss. 1, pp. 91–101. DOI: 10.1016/0096-3003(95)00123-9.
28. Chen Wen, Fu Zhuo-Jia, Chen C.S. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
29. Kazakov A.L., Kuznetsov P.A. On the analytic solutions of a special boundary value problem for a nonlinear heat equation in polar coordinates. *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, 2018, vol. 12, No. 2, pp. 255–263. DOI: 10.1134/S1990478918020060.
30. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*, Springer New York, 1993, 388 p. DOI: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
31. Bautin S.P., Kazakov A.L. *Obobshchennaya zadacha Koshi i ee prilozheniya* [Generalized Cauchy Problem and its Applications]. Novosibirsk, Nauka Publ., 2006, 397 p. (In Russian). ISBN 5-02-032540-6.
32. Kozlov V.V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person. *Russian Mathematical Surveys*, 2000, vol. 55, iss. 6, pp. 1175–1192. DOI: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000353.
33. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations*, New York, Interscience Publishers, Inc., 2008.

Подана в журнал: 28.02.2023



УДК 517.958:519.633



DOI: 10.17804/2410-9908.2023.2.049-064

АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ ОБЩЕГО ВИДА

А. Л. Казаков^{а)}, Л. Ф. Спевак^{б), *}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Российская Федерация*

^{а)}  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  a_kazakov@mail.ru;

^{б)}  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  lfs@imach.uran.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: lfs@imach.uran.ru

Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Россия

Тел.: +7 (343) 362-30-22; факс: +7 (343) 374-53-30

Статья посвящена построению радиально симметричных тепловых волн, которые являются решениями уравнения теплопроводности с произвольным видом нелинейности при заданном на подвижном многообразии ненулевом краевом режиме. Рассмотренная краевая задача является обобщением задач, решенных авторами ранее. Во-первых, расширяется класс исследуемых уравнений параболического типа; во-вторых, более общий вид имеет краевое условие, порождающее тепловую волну в пространстве произвольной размерности. Для данной задачи доказана новая теорема существования и единственности аналитического решения типа тепловой волны. Предложен приближенный метод построения решений искомого вида, основанный на разложении по радиальным базисным функциям в сочетании с методом коллокаций. Решение на каждом шаге по времени строится в два этапа. На первом этапе решается задача в области, ограниченной заданным подвижным многообразием и фронтом тепловой волны, который заранее неизвестен и определяется в процессе решения. При этом используется специальная замена – искомая функция и пространственная переменная меняются ролями. На втором этапе решение достраивается в области, ограниченной положениями заданного подвижного многообразия на текущем шаге и в начальный момент. При этом граничные условия определяются из решения на первом этапе. В рассмотренном тестовом примере решения, построенные по разработанному алгоритму, сравнивались с известным точным решением. Расчеты показали хорошую точность численных решений при различных значениях числовых параметров, в том числе размерности пространства. Наблюдаемая численная сходимости относительно шага по времени показывает корректность предложенной вычислительной процедуры.

Ключевые слова: нелинейное уравнение теплопроводности, радиально-симметричное решение, тепловая волна, степенной ряд, метод коллокаций, радиальные базисные функции.

1. Введение

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$T_t = \Delta P(T) + Q(T), \quad (1)$$

где $T(t, \mathbf{x})$ – искомая функция (температура); t – время; \mathbf{x} – вектор пространственных координат в рассматриваемом пространстве, нижним буквенным индексом здесь и далее обозначены частные производные; $P(0) = Q(0) = 0$, $Q(T)$ – функция источника (стока) [1, 2]. Помимо распространения тепла, уравнение (1) применяется для моделирования диффузии, фильтрации газов в пористом грунте и других процессов. В связи с этим, его иногда называют полным уравнением пористой среды (the complete porous medium equation [1]). В обзорной работе [1] описаны различные виды этого уравнения и подходы к его решению.

Уравнение (1) заменой искомой функции $u = P'(T)$ может быть приведено к виду

$$u_t = u\Delta u + p(u)(\nabla u)^2 + q(u), \quad (2)$$

где $p(u) = 1 - \frac{P'''(\varphi(u))}{[P''(\varphi(u))]^2}$, $q(u) = Q(\varphi(u))$, $T = \varphi(u)$ – функция, обратная к $u = P'(T)$.

При $u = 0$ в уравнении (2) имеет место вырождение параболического типа уравнения, вследствие чего для него существуют решения типа тепловой волны, распространяющейся с конечной скоростью по нулевому фону [3–6]. Тепловая волна является составной конструкцией, состоящей из двух частей: положительного решения и тривиального решения (нулевого фона), которые состыкованы вдоль некоторой гладкой гиперповерхности в рассматриваемом пространстве, называемой фронтом волны. Метод поиска таких решений определяется заданным краевым условием. Наиболее простой с точки зрения построения тепловой волны является задача для уравнения (2) при заданном уравнении движения фронта тепловой волны:

$$u|_{a(t, \mathbf{x})=0} = 0. \quad (3)$$

Здесь уравнение $a(t, \mathbf{x}) = 0$ задает в каждый момент времени нулевой фронт тепловой волны. Самой естественной постановкой является задача об иницировании тепловой волны, в которой краевым условием задается значение искомой функции в каждый момент времени на некотором неподвижном многообразии:

$$u|_{b(\mathbf{x})=0} = f(t, \mathbf{x}). \quad (4)$$

В данной работе мы рассмотрим краевой режим

$$u|_{G(t, \mathbf{x})=0} = F(t, \mathbf{x}), \quad (5)$$

задающий в каждый момент времени ненулевые, вообще говоря, значения искомой функции на некотором подвижном многообразии. Условие (5) принимает вид (4), если функция $G(t, \mathbf{x})$ не зависит от времени, и вид (3), если $F(t, \mathbf{x}) \equiv 0$. Таким образом, задача (2), (5) является постановкой, включающей в себя задачи (2), (3) и (2), (4).

В случае когда условие (5) обладает радиальной симметрией, задачу (2), (5) можно свести к следующей задаче с одной пространственной переменной:

$$u_t = uu_{\rho\rho} + p(u)u_{\rho}^2 + \frac{(n-1)uu_{\rho}}{\rho} + q(u), \quad (6)$$

$$u|_{\rho=g(t)} = f(t). \quad (7)$$

Здесь $u = u(t, \rho)$, $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$, $q(0) = 0$, x_i – декартовы координаты, n – размерность пространства, $g(t)$ и $f(t)$ – непрерывно дифференцируемые в окрестности нуля функции, $f'(0) > 0$, $g'(0) > 0$, $f(0) = 0$, $g(0) \geq 0$ при $n = 1$, $g(0) > 0$ при $n > 1$. Задача (6), (7) является основным объектом исследования настоящей статьи. Отметим существенное для дальнейшего изложения свойство уравнения (6) – существование тривиального решения $u \equiv 0$.

Подходы к исследованию поставленных выше задач диктуются стоящими перед исследователями целями. Например, метод специальных рядов [6] применяется при доказательстве теорем существования и единственности аналитического решения. Построенные при доказательстве решения являются локальными, причем область сходимости зачастую оценить невозможно. В связи с этим, для построения решений в заданном интервале времени применяются численные методы. Авторы настоящей статьи уже более десяти лет развивают собственный подход, сочетающий аналитические и численные методы решения.

Ранее авторами уравнение (6) рассматривалось только в случае $p(u) = const$, что соответствует степенному виду функции $P(T)$ [7–13]. В данной работе функция $p(u)$ может иметь произвольный вид при условии непрерывной дифференцируемости и выполнении неравенства $p'(0) > 0$. Для уравнения (6) такого вида с краевыми условиями, соответствующими (3) и (4), ранее были доказаны теоремы существования и единственности аналитического решения типа тепловой волны, а также разработаны численно-аналитические алгоритмы решения [14–16]. В численных алгоритмах использовались радиальные базисные функции (РБФ) [17–20] при реализации метода граничных элементов (МГЭ) [21–27] и метода коллокаций [28]. Краевое условие (7) для уравнения (6) ранее не рассматривалось.

Данное исследование является продолжением большого цикла работ авторов, однако в большинстве опубликованных ранее статей рассматривались условия (7) в частном случае, когда $f \equiv 0$ [14, 15]. В качестве непосредственно предшествующих настоящему исследованию укажем работы [13, 29], в которых рассмотрена задача (6), (7) при $n = 1, 2$ в частных случаях. Таким образом, новизна данной статьи состоит в рассмотрении более общего, чем ранее, вида уравнения (6) вкуче с краевым условием (7). Отметим, что в доступных источниках мы не нашли решений задач, подобных (6), (7). Для задачи (6), (7) в следующих разделах представлена теорема существования и единственности аналитического решения, разработан алгоритм численного решения, описан тестовый пример.

2. Теорема существования и единственности

Под аналитической функцией в окрестности точки мы понимаем функцию действительной переменной, которая совпадает в этой окрестности со своим разложением в ряд Тейлора. Сформулируем теорему, обеспечивающую существование и единственность аналитического решения задачи (6), (7). Поскольку случай $n=1$ рассматривался ранее, будем далее считать, что $n > 1$.

Теорема. Пусть в задаче (6), (7) функции $p(u)$, $q(u)$, $f(t)$ и $g(t)$ являются аналитическими в некоторой окрестности точек $u = 0$ и $t = 0$ соответственно, и справедливы соотношения $p'(0) > 0$, $q(0) = 0$, $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$, $g'(0) > 0$; $g(0) > 0$. Тогда задача (6), (7) при вы-

боре направления движения фронта тепловой волны имеет единственное аналитическое решение в точке $t = 0$, $\rho = g(0)$.

Доказательство. Предваряя доказательство, подчеркнем, что в условиях теоремы задача (6), (7) вырождается [30] в точке $t = 0$, $\rho = g(0)$, что препятствует применению классических теорем и приводит к необходимости доказательства специального утверждения, обеспечивающего существование и единственность решения. Обоснование теоремы проводится по схеме, ранее неоднократно использованной в аналогичных (более простых) случаях в работах авторов [9, 29], поэтому опишем его кратко, останавливаясь только на ключевых моментах.

Доказательство состоит из трех этапов: предварительного и двух основных. На предварительном этапе определяется направление движения тепловой волны. Для этого необходимо сделать в задаче (6), (7) замену $z = \rho - g(t)$, $y = t$ (несложно убедиться, что она невырожденная),

$$u_y - g'(y)u_z = uu_{zz} + p(u)u_z^2 + \frac{(n-1)uu_z}{z + g(y)} + q(u), \quad u|_{z=0} = f(y), \quad (8)$$

и положить $y = z = 0$. Получившееся квадратное уравнение $p(0)u_z^2(0,0) + q'(0)u_z(0,0) - f'(0) = 0$ в условиях теоремы имеет два действительных корня $u_z(0,0) = u_{\pm}$, выбор одного из них определяет направление тепловой волны: u_- – движение вправо; u_+ – движение влево, в сторону особой точки $\rho = 0$.

Первый основной этап посвящен построению решения в виде двойного ряда по степеням переменных y , z , коэффициенты которых определяются путем последовательного дифференцирования уравнения с учетом граничных условий. Фактически выполняется построение ряда Тейлора для функции $u(y, z)$, причем в условиях теоремы коэффициенты определяются однозначно при решении трехдиагональных невырожденных систем линейных алгебраических уравнений [31].

Второй основной этап состоит в доказательстве сходимости построенного ряда. С учетом особенностей параболических уравнений, в частности примера С. В. Ковалевской [32], это нетривиальная задача. Тем не менее, путем серии последовательных замен удастся свести задачу (8) к характеристической задаче Коши [33], которая подпадает под действие ранее доказанного аналога [9] теоремы Коши–Ковалевской [33], что и гарантирует существование аналитического решения, которое по построению при определенном выборе корня u_{\pm} является единственным.

Вернемся к физическим переменным. В силу аналитичности функции $g(t)$ построенное решение является аналитическим в некоторой окрестности точки $t = 0$, $\rho = g(0)$, причем $u(0,0) = 0$, $u_t^2(0,0) + u_{\rho}^2(0,0) > 0$. Отсюда по непрерывности имеем, что при $t \geq 0$ существует линия $\rho = a(t)$, на которой выполнено условие

$$u|_{\rho=a(t)} = 0. \quad (9)$$

Таким образом, построенное в ходе доказательства решение, стыкуясь с тривиальным $u \equiv 0$, образует тепловую волну с фронтом $\rho = a(t)$.

3. Алгоритм численного решения

Опираясь на разработанный ранее подход [7, 11, 13], задачу (6), (7) на заданном промежутке $t \in [0, T]$ будем решать по шагам, используя разностную аппроксимацию по времени. На каждом шаге $t_k = kh$ требуется найти функцию $u(t_k, \rho)$, удовлетворяющую уравнению (6) и условию (7), в области ее положительных значений. Эта область определяется движением нулевого фронта тепловой волны $\rho = a(t)$, где выполняется условие (9).

Отметим, что функция $a(t)$ в задаче (6), (7) не задана, поэтому область решения $\rho \in [a(0), a(t_k)]$ неизвестна. Укажем также, что в общем случае $g(t_k) \in (a(0), a(t_k))$.

Для корректной формулировки задачи на шаге t_k в известной области, по аналогии с работами [11, 13], сделаем специальную замену переменных. А именно, поменяем ролями пространственную переменную ρ и искомую функцию u , поскольку из условия (7) с учетом (9) следует, что $u \in [0, f(t_k)]$ (известная область) при $\rho \in [g(t_k), a(t_k)]$. Предположим при этом, что функция $f(t)$ монотонна при $t \in [0, T]$. Тогда уравнение (6) в новых переменных примет вид

$$\rho_t \rho_u^2 = u \rho_{uu} - p(u) \rho_u - \frac{(n-1)u \rho_u^2}{\rho} - q(u) \rho_u^3, \quad (10)$$

где $\rho = \rho(t_k, u)$ – функция, обратная к $u(t_k, \rho)$. Задачу (6), (7) в момент t_k будем далее решать в два этапа.

Этап 1. Рассмотрим задачу (6), (7) на отрезке $\rho \in [r, R]$, где $r = g(t_k)$, $R = a(t_k)$. После замены переменных ей будет соответствовать следующая задача в известной области $u \in [0, U]$, $U = f(t_k)$:

$$\rho_{uu} = \frac{1}{u} \left(\rho_t \rho_u^2 + p(u) \rho_u + \frac{(n-1)u \rho_u^2}{\rho} + q(u) \rho_u^3 \right), \quad (11)$$

$$\rho|_{u=U} = r. \quad (12)$$

Фактически уравнение (11) является обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ) второго порядка, и для решения задачи (11), (12) необходимо сформулировать дополнительное граничное условие. Отметим, что значение новой искомой функции ρ при $u = 0$ соответствует неизвестному положению нулевого фронта в рассматриваемый момент,

$$\rho|_{u=0} = a(t_k). \quad (13)$$

Можно показать [7], что из (13) следует условие для производной:

$$\rho_u|_{u=0} = -\frac{p(0)}{a'(t_k)}. \quad (14)$$

Функция $a(t)$ неизвестна, поэтому использовать в исходном виде условие (14) невозможно. Построим его приближенный вид, для выполнения которого достаточно исходных данных. Используя квадратичную аппроксимацию функции $\rho(0,t)=a(t)$ на промежутке $t \in [t_{k-1}, t_k]$, уравнение (14) можно привести к следующему разностному виду [11]:

$$\frac{2(\rho(t_k,0)-\rho(t_{k-1},0))}{h} = -\frac{p(0)}{\rho_u(t_k,0)} - \frac{p(0)}{\rho_u(t_{k-1},0)}. \quad (15)$$

Равенство (15) связывает значения искомой функции и ее производной на текущем шаге t_k и предыдущем шаге t_{k-1} . Для использования этого уравнения на первом шаге ($t=t_1=h$) необходимо знать эти значения в начальный момент $t=0$. Очевидно, что $\rho(0,0)=0$. Для нахождения $\rho_u(0,0)$ возьмем полную производную по времени в условии (12), записанном в произвольный момент времени:

$$(\rho_t + \rho_u f'(t))|_{u=f(t)} = g'(t). \quad (16)$$

Из (16) следует, что при $u = f(t)$

$$\rho_t = -\rho_u f'(t) + g'(t). \quad (17)$$

Подстановка (17) в уравнение (10) приводит к соотношению

$$(-\rho_u f'(t) + g'(t))\rho_u^2 = u\rho_{uu} - p(u)\rho_u - \frac{(n-1)u\rho_u^2}{\rho} - q(u)\rho_u^3. \quad (18)$$

Тогда при $t=0$, $u=f(0)=0$ имеем

$$f'(0)\rho_u^2(0,0) - g'(0)\rho_u(0,0) - p(0) = 0. \quad (19)$$

В принятых предположениях квадратное уравнение (19) имеет два действительных корня разных знаков, которые соответствуют корням u_{\pm} из предыдущего раздела. Примем для определенности, что $\rho_u < 0$ (при другом выборе выкладки абсолютно аналогичны), тогда

$$\rho_u(0,0) = \frac{g'(0) - \sqrt{[g'(0)]^2 + 4f'(0)p(0)}}{2f'(0)}. \quad (20)$$

Учитывая (20), можно утверждать, что условие (15) связывает граничные значения искомой функции и ее производной для уравнения (11) в момент t_k с помощью известных значений на предыдущем шаге:

$$\left(\frac{2\rho(t_k, u)}{h} + \frac{p(0)}{\rho_u(t_k, u)} \right) \Big|_{u=0} = \frac{2\rho(t_{k-1}, 0)}{h} - \frac{p(0)}{\rho_u(t_{k-1}, 0)} = v^*. \quad (21)$$

Таким образом, мы имеем второе граничное условие для уравнения (11). Решение задачи (11), (12), (21) будем искать в виде

$$\rho(t_k, u) = \lambda(u) + \mu(u), \quad (22)$$

где $\lambda(u)$ – частное решение уравнения (11) в момент t_k , $\mu(u)$ – решение следующей задачи для ОДУ:

$$\mu'' = 0, \quad (23)$$

$$\mu|_{u=U} = r - \lambda(U), \quad (24)$$

$$\frac{2(\lambda(0) + \mu)}{h} + \frac{p(0)}{\lambda'(0) + \mu'|_{u=0}} = v^*. \quad (25)$$

Если частное решение $\lambda(u)$ найдено, то решение задачи (23)–(25) определяется однозначно и имеет вид

$$\mu(u) = s(u - U) + r - \lambda(U), \quad (26)$$

где $s = s(\lambda)$ – отрицательный корень квадратного уравнения

$$2Us^2 + (hv^* - 2(\lambda(0) - \lambda(U) - U\lambda'(0) + r))s - 2\lambda'(0)(\lambda(0) - \lambda(U) + r) - hp(0) + hv^*\lambda'(0) = 0, \quad (27)$$

к которому сводится условие (25).

Ввиду зависимости правой части уравнения (11) от искомой функции, решение вида (22) задачи (11), (12), (21) будем строить итерационно, по следующей процедуре:

$$\lambda_0 \equiv 0, \quad (28)$$

$$\mu_i(u) = s(\lambda_i)(u - U) + r - \lambda_i(U), \quad (29)$$

$$\rho_i = \lambda_i + \mu_i, \quad (30)$$

$$\lambda_{i+1}'' = \frac{1}{u} \left(\rho_{i,t}(\rho_i')^2 + p(u)\rho_i' + \frac{(n-1)(\rho_i')^2 u}{\rho_i} + q(u)(\rho_i')^3 \right). \quad (31)$$

где ρ_i , λ_i и μ_i – i -е итерации решений. Уравнение (31) будем решать методом коллокаций с помощью разложения правой части по РБФ:

$$\frac{1}{u} \left(\rho_{i,t}(\rho_i')^2 + p(u)\rho_i' + \frac{(n-1)(\rho_i')^2 u}{\rho_i} + q(u)(\rho_i')^3 \right) = \sum_{m=1}^M \alpha_{i+1}^{(m)} \varphi^{(m)}(u), \quad (32)$$

где $\varphi^{(m)}(u) = \varphi^{(m)}(|u - u_m|)$ – РБФ, u_1, \dots, u_M – точки коллокации, расположенные на отрезке $[0, U]$. Каждой $\varphi^{(m)}(u)$ соответствует функция $\psi^{(m)}(u)$, такая что $d^2\psi^{(m)}/du^2 = \varphi^{(m)}$. Производная по времени вычисляется методом конечных разностей через значение, найденное на предыдущем шаге. Коэффициенты $\alpha_{n+1}^{(k)}$, найденные как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\frac{1}{u} \left(\rho_{i,t} (\rho'_i)^2 + p(u) \rho'_i + \frac{(n-1)u(\rho'_i)^2}{\rho_i} + q(u)(\rho'_i)^3 \right) \Big|_{u=u_j} = \sum_{m=1}^M \alpha_{i+1}^{(k)} \varphi^{(k)}(u_j), \quad j=1, \dots, M, \quad (33)$$

определяют очередную итерацию частного решения:

$$\lambda_{n+1} = \sum_{m=1}^M \alpha_{n+1}^{(m)} \psi^{(m)}(u). \quad (34)$$

При достаточной близости итераций ρ_{i+1} и ρ_i итерационная процедура останавливается, и в качестве решения задачи (11), (12), (21) в момент $t = t_k$ принимается непрерывно дифференцируемая по u функция

$$\rho(t_k, u) = \lambda_{i+1}(u) + \mu_{i+1}(u). \quad (35)$$

Обратную функцию $u(t_k, \rho)$ – решение задачи (6), (7) на отрезке $\rho \in [r, R]$ – можно построить без потери точности. Отметим, что в результате решения мы также найдем положение нулевого фронта тепловой волны в момент $t = t_k$:

$$a(t_k) = \rho(t_k, 0). \quad (36)$$

Этап 2. Рассмотрим теперь задачу (6), (7) на отрезке $\rho \in [r_0, r]$, $r_0 = g(0) = a(0)$. Поскольку решение предполагается непрерывно дифференцируемым в точке $\rho = r$, задача может быть сформулирована следующим образом:

$$u_{\rho\rho} = \frac{1}{u} (u_t - p(u)u_\rho^2 - q(u)) - \frac{(n-1)u_\rho}{\rho}, \quad \rho \in [r_0, r], \quad (37)$$

$$u|_{\rho=r} = U, \quad (38)$$

$$u_\rho|_{\rho=r} = u_\rho(t_k, r). \quad (39)$$

Здесь $u_\rho(t_k, r)$ – значение, найденное на этапе 1. Задача (37)–(39) может быть решена итерационно, аналогично (22)–(35). В результате мы найдем непрерывно дифференцируемое по пространственной координате решение $u(t_k, \rho)$ задачи (6), (7) в области $\rho \in [r_0, r]$. С учетом этапа 1 получим решение типа тепловой волны в момент t_k :

$$u = \begin{cases} u(t_k, \rho), \rho \in [g(0), a(t_k)] \\ 0, \rho > a(t_k). \end{cases} \quad (40)$$

Таким образом, разработанный алгоритм позволяет построить радиально симметричное решение уравнения теплопроводности произвольной размерности с произвольным видом нелинейности.

Пример

Для верификации предложенного алгоритма рассмотрим задачу с известным точным решением. Пусть в задаче (6), (7) $p(u) = 1/\sigma$. Тогда в пространстве размерности n она имеет точное радиально симметричное решение

$$u_e(\rho, t) = -\frac{\rho^2}{C + \mu t} + \frac{C^{\alpha-1} R^2}{(C + \mu t)^\alpha}, \quad (41)$$

где σ, C, R – положительные константы, $\mu = \frac{2n\sigma + 4}{\sigma}$, $\alpha = \frac{n\sigma}{n\sigma + 2}$. Уравнение движения нулевого фронта тепловой волны, соответствующее решению (41), имеет вид

$$\rho = a(t) = R \left(1 + \frac{\mu t}{C} \right)^\beta, \quad (42)$$

где $\beta = \frac{1}{n\sigma + 2}$.

Для тестирования алгоритма численного решения в качестве $g(t)$ в условии (7) была принята функция

$$g(t) = R \left(1 + \frac{2\mu t}{3C} \right)^\beta. \quad (43)$$

Тогда условие (7) принимает вид

$$u|_{\rho=g(t)} = u_e(g(t), t). \quad (44)$$

Уравнение (6) с краевым условием (44) было решено с помощью предложенного в предыдущем разделе алгоритма при $\sigma = 4, R = 1, C = 8$. В качестве РБФ были приняты функции $\varphi^{(k)}(u) = |u - u_k|$. Были построены решения для различных размерностей при различных значениях шага по времени h . В табл. 1 приведена погрешность найденного положения нулевого фронта относительно функции (42) в два момента времени. Результаты расчетов показывают, что погрешность немного растет с ростом размерности, но ее порядок остается тем же. Также наблюдается сходимость относительно шага по времени. Отметим, что положение нулевого фронта определяется на этапе 1, и именно в этой точке наблюдается

наибольшее отклонение построенного решения от точного. Таким образом, данные таблицы 1 показывают корректность расчетов на этапе 1.

Таблица 1

Погрешность определения нулевого фронта

n	h	t	Погрешность
2	0,1	0,5	$5,5 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	0,5	$2,8 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	0,5	$1,5 \cdot 10^{-5}$
2	0,1	1	$8,3 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	1	$4,4 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	1	$2,4 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	0,5	$6,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	0,5	$3,5 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	0,5	$1,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	1	$9,4 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	1	$4,9 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	1	$2,6 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	0,5	$8,5 \cdot 10^{-5}$
5	0,05	0,5	$4,3 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	0,5	$2,2 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	1	$1,0 \cdot 10^{-4}$
5	0,05	1	$5,2 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	1	$2,7 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2

Погрешность численного решения в точке $\rho = g(0)$

n	h	t	Погрешность
2	0,1	0,5	$6,2 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	0,5	$3,6 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	0,5	$2,1 \cdot 10^{-5}$
2	0,1	1	$9,3 \cdot 10^{-5}$
2	0,05	1	$5,5 \cdot 10^{-5}$
2	0,025	1	$3,6 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	0,5	$7,4 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	0,5	$4,3 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	0,5	$2,5 \cdot 10^{-5}$
3	0,1	1	$9,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,05	1	$5,8 \cdot 10^{-5}$
3	0,025	1	$3,9 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	0,5	$8,6 \cdot 10^{-5}$
5	0,05	0,5	$4,9 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	0,5	$2,9 \cdot 10^{-5}$
5	0,1	1	$9,4 \cdot 10^{-5}$
5	0,05	1	$5,7 \cdot 10^{-5}$
5	0,025	1	$3,5 \cdot 10^{-5}$

В табл. 2 для оценки эффективности решения на этапе 2 сравниваются погрешности численных решений в точке $\rho = g(0) = R$. В этой точке, как наиболее удаленной от точки, где заданы граничные условия, наблюдается наибольшее отклонение от точного решения. Данные табл. 2 демонстрируют сходимость относительно шага по времени, а следовательно, корректность расчетов на этапе 2.

Таким образом, проведенный вычислительный эксперимент показал эффективность разработанного алгоритма численного построения радиально симметричной тепловой волны.

4. Заключение

В работе рассмотрено нелинейное уравнение теплопроводности с источником. Для него сформулирована задача построения в пространстве произвольной размерности радиально симметричного решения типа тепловой волны, порождаемой ненулевым краевым режимом, заданным на подвижном многообразии. Для поставленной задачи доказана новая теорема существования и единственности решения в классе кусочно-аналитических функций, а также предложен пошаговый алгоритм численного построения решения на основе метода коллокаций с использованием радиальных базисных функций. На одном из этапов численного алгоритма используется замена типа преобразования годографа. Рассмотренный тестовый пример продемонстрировал хорошую точность предложенного алгоритма и сходимость относительно шага по времени.

Проведенные исследования позволили расширить область применения разрабатываемого авторами комплексного подхода к построению решений вырождающихся нелинейных уравнений параболического типа и открывают широкие перспективы для дальнейшего развития методов решения нелинейных задач математической физики высокой размерности с особенностями.

Благодарность

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМАШ УрО РАН (тема АААА-А18-118020790140-5).

Литература

1. Vazquez J. L. The Porous Medium Equation: Mathematical Theory. – Oxford : Clarendon Press, 2007. – 648 p. – ISBN-10: 0198569033, ISBN-13: 978-019856903.
2. Режимы с обострением в задачах для нелинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов – М. : Наука, 1987. – 476 с.
3. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию академика А. Ф. Иоффе. – М. : Изд-во АН СССР, 1950. – С. 61–71.
4. Баренблатт Г. И., Вишик И. М. О конечной скорости распространения в задачах нестационарной фильтрации жидкости и газа // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 3. – С. 411–417.
5. Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1958. – Т. 22, вып. 5. – С. 667–704.
6. Сидоров А. Ф. Избранные труды. Математика, механика. – М. : Физматлит, 2001. – 576 с. – ISBN 5-9221-0103-X.

7. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Методы граничных элементов и степенных рядов в одномерных задачах нелинейной фильтрации // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2012. – Т. 5, № 2. – С. 2–17.
8. Kazakov A. L., Spevak L. F. Numerical and analytical studies of a nonlinear parabolic equation with boundary conditions of a special form // Applied Mathematical Modelling. – 2013. – Vol. 37, iss. 10–11. – P. 6918–6928. – DOI: 10.1016/j.apm.2013.02.026.
9. Казаков А. Л., Кузнецов П. А., Спевак Л. Ф. Об одной краевой задаче с вырождением для нелинейного уравнения теплопроводности в сферических координатах // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 1. – С. 119–129.
10. Kazakov A. L., Spevak L. F., Nefedova O. A. On the numerical-analytical approaches to solving a nonlinear heat conduction equation with a singularity // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2018. – Iss. 6. – P. 100–116. – DOI: 10.17804/2410-9908.2018.6.100-116. – URL: http://dream-journal.org/issues/2018-6/2018-6_232.html
11. Kazakov A. L., Nefedova O. A., Spevak L. F. Solution of the problem of initiating the heat wave for a nonlinear heat conduction equation using the boundary element method // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2019. – Vol. 59, No. 6. – P. 1015–1029. – DOI: 10.1134/S0965542519060083.
12. On the analytical and numerical study of a two-dimensional nonlinear heat equation with a source term / A. L. Kazakov, L. F. Spevak, O. A. Nefedova, A. A. Lempert // Symmetry. – 2020. – Vol. 12, iss. 6. – P. 921 (3–15). – DOI: 10.3390/sym12060921.
13. Kazakov A. L., Spevak L. F. On the construction of a heat wave generated by a boundary condition on a moving border // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2021. – Iss. 6. – P. 54–67. – DOI: 10.17804/2410-9908.2021.6.054-067. – URL: http://dream-journal.org/issues/2021-6/2021-6_350.html
14. Казаков А. Л. О точных решениях краевой задачи о движении тепловой волны для уравнения нелинейной теплопроводности // Сибирские электронные математические известия. – 2019. – Т. 16. – С. 1057–1068. – DOI: 10.33048/semi.2019.16.073. – URL: <http://semr.math.nsc.ru/v16ru.html> (accessed: 14.12.2021).
15. Казаков А. Л., Спевак Л. Ф. Приближенные и точные решения вырождающегося нелинейного уравнения теплопроводности с произвольной нелинейностью // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». – 2020. – Т. 34. – С. 18–34. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.34.18.
16. Kazakov A. L., Spevak L. F. Constructing exact and approximate diffusion wave solutions for a quasilinear parabolic equation with power nonlinearities // Mathematics. – 2022. – Vol. 10. – P. 1559. – DOI: 10.3390/math10091559.
17. Powell M. J. D. The theory of radial basis function approximation // Advances in Numerical Analysis : vol. 2 / ed. by W. Light. – Clarendon Press, Oxford, 1992. – P. 105–210.
18. Fornberg B., Flyer N. Solving PDEs with radial basis functions // Acta Numerica. – 2015. – Vol. 24. – P. 215–258. – DOI: 10.1017/S0962492914000130.
19. Buhmann M. D. Radial Basis Functions. – Cambridge Univ. Press, 2003. – 272 p. – ISBN 0521633389.
20. Golberg M. A., Chen C. S., Bowman H. Some recent results and proposals for the use of radial basis functions in the BEM // Engineering Analysis with Boundary Elements. – 1999. – Vol. 23. – P. 285–296. – DOI: 10.1016/S0955-7997(98)00087-3.
21. Banerjee P. K., Butterfield R. Boundary element methods in engineering science. – US : McGraw-Hill Inc., 1981. – 452 p. – ISBN-10: 0070841209, ISBN-13: 978-0070841208.

22. Brebbia C. A., Telles J. C. F., Wrobel L. C. *Boundary Element Techniques* – Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo : Springer-Verlag, 1984. – 464 p.– DOI: 10.1007/978-3-642-48860-3. – ISBN 978-3-642-48862-7.
23. Nardini D., Brebbia C. A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements // *Applied Mathematical Modelling*. – 1983. – Vol. 7, No. 3. – P. 157–162. – DOI: 10.1016/0307-904X(83)90003-3.
24. Wrobel L. C., Brebbia C. A., Nardini D. The dual reciprocity boundary element formulation for transient heat conduction // *Finite Elements in Water Resources VI*. – Berlin : Springer-Verlag, 1986. – P. 801–811.
25. Wrobel L. C., Brebbia C. A. The dual reciprocity boundary element formulation for diffusion problems. // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* – 1987. – Vol. 65, iss. 2. – P. 147–164. – DOI: 10.1016/0045-7825(87)90010-7.
26. Golberg M. A. The numerical evaluation of particular solutions in the BEM – A review // *Boundary Elements Communications*. – 1995. – Vol. 6. – P. 99–106.
27. Golberg M. A. Recent developments in the numerical evaluation of particular solutions in the boundary element method // *Applied Mathematics and Computation*. – 1996. – Vol. 75, iss. 1. – P. 91–101. – DOI: 10.1016/0096-3003(95)00123-9.
28. Chen C. S., Chen W., Fu Z.-J. *Recent Advances in Radial Basis Function Collocation Methods*. – Berlin, Heidelberg : Springer, 2013. – DOI: 10.1007/978-3-642-39572-7.
29. Kazakov A. L., Kuznetsov P. A. On the analytic solutions of a special boundary value problem for a nonlinear heat equation in polar coordinates // *Journal of Applied and Industrial Mathematics* – 2018. – Vol. 12. – No. 2. – P. 255–263. – DOI: 10.1134/S1990478918020060.
30. DiBenedetto E. *Degenerate Parabolic Equations*. – New York : Springer-Verlag, 1993. – 388 p. – DOI: 10.1007/978-1-4612-0895-2.
31. Баутин С. П., Казаков А. Л. *Обобщенная задача Коши и ее приложения*. – Новосибирск : Наука, 2006. – 397 с. – ISBN 5-02-032540-6.
32. Kozlov V. V. Sofya Kovalevskaya: a mathematician and a person // *Russian Mathematical Surveys*. – 2000. – Vol. 55, iss. 6. – P. 1175–1192. – DOI: 10.1070/rm2000v055n06ABEH000353.
33. Courant R., Hilbert D. *Methods of Mathematical Physics. Vol. II : Partial Differential Equations*. – New York : Interscience Publishers, Inc., 2008.