





Received: 21.11.2022
Revised: 18.01.2023
Accepted: 28.02.2023
DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.017-023

FRACTURE OF A THIN-WALLED SPHERICAL VESSEL AFFECTED BY INTERNAL PRESSURE

V. V. Struzhanov^{a), *} and A. E. Chaikin^{b)}

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia*

^{a)}  <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru;
^{b)}  <http://orcid.org/0000-0001-5582-2384>  chaykin.ae@yandex.ru

*Corresponding author: E-mail: stru@imach.uran.ru
Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russia
Tel.: +7 (343) 362-3019

A problem on the fracture of a thin-walled spherical vessel affected by increasing internal pressure is formulated. The material properties both in the stage of hardening and in the stage of softening (prefracture) are described. The mathematics of the catastrophe theory is used to write down the equilibrium equations and to find the critical value of pressure, at which the vessel fails.

Keywords: thin coatings, equilibrium state curves, loss of stability, fracture, Lamé problem.

Acknowledgment

The work was performed according to the state assignment, theme No. AAAA-A18-118020790145-0.

References

1. Vil'deman V.E., Chausov N.G. Conditions of strain softening upon stretching of the specimen of special configuration. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2007, vol. 73, No. 10, pp. 55–59. (In Russian).
2. Ipatova A.V., Vil'deman V.E. Construction of material functions of aluminum alloy D16T inelastic deformation based on the results of tests of tension and torsion. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2012, iss. 4 (29), pp. 106–114. DOI: 10.14498/vsgtu1106. (In Russian).
3. Vil'deman V.E., Tretyakov M.P. Material testing by plotting total deformation curves. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, No. 2, pp. 166–170. DOI: 10.3103/S1052618813010159.
4. Mironov V.I. Properties of the material in rheologically unstable state. *Zavodskaya Laboratoriya. Diagnostika Materialov*, 2002, vol. 68, No. 10, pp. 47–52. (In Russian).
5. Arsenin V.Ya. *Metody matematicheskoy fiziki i spetsialnye funktsii [Methods of Mathematical Physics and Special Functions]*. Moscow, Nauka Publ., 1974, 286 p. (In Russian).
6. Struzhanov V.V. and Mironov V.N. *Deformatsionnoe razuprochnenie materiala v elementakh konstrutsiy [Deformational Softening of Material in Structural Elements]*. Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 1995. (In Russian).
7. Struzhanov V.V., Korkin A.V. Regarding stretching process stability of one bar system with softening elements. *Vestnik Uralskogo Gosudarstvennogo Universiteta Putei Soobshcheniia*, 2016, No. 3 (31), pp. 4–17. DOI: 10.20291/2079-0392-2016-3-4-17. (In Russian).

8. Struzhanov V.V., Korkin A.V. A variant of the method of elastic solutions in the task on definition of balance of the stretched rod system with softening elements. *Herald of the Ural State University of Railway Transport (Scientific journal)*, 2018, No. 1 (37), pp. 11–19. DOI: 10.20291/2079-0392-2018-1-11-20. (In Russian).
9. Struzhanov V.V., Korkin A.V., Chaykin A.E. One approach to determination of the ultimate load-bearing capacity of mechanical systems with softening elements. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2018, vol. 22, No. 4, pp. 762–773. DOI: 10.14498/vsgtu1624. (In Russian).
10. Struzhanov V.V. The determination of the deformation diagram of a material with a falling branch using the torsion diagram of a cylindrical sample. *Sib. Zh. Ind. Mat.*, 2012, vol. 15, No. 1, pp. 138–144. (In Russian).
11. Poston T., Stewart I. *Catastrophe Theory and Its Application*, London, Pitman Publ., 1978, 491 p.

Подана в журнал: 21.11.2022



УДК 539.3



DOI: 10.17804/2410-9908.2023.1.017-023

РАЗРУШЕНИЕ ТОНКОСТЕННОГО СФЕРИЧЕСКОГО СОСУДА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

В. В. Стружанов^{а)}, * , А. Е. Чайкин^{б)}

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения имени Э. С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Российская Федерация*

^{а)}  <http://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  stru@imach.uran.ru;

^{б)}  <http://orcid.org/0000-0001-5582-2384>  chaykin.ae@yandex.ru

* Ответственный автор. Электронная почта: stru@imach.uran.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, 620049, Российская Федерация
Тел.: +7 (343) 362–30–19

Сформулирована задача о разрушении тонкостенного сферического сосуда под действием возрастающего внутреннего давления. Описаны свойства материала как на стадии упрочнения, так и на стадии разупрочнения (предразрушения). С помощью аппарата математической теории катастроф выписаны уравнения равновесия и определено критическое значение давления, при достижении которого сосуд разрушается.

Ключевые слова: тонкое покрытия, кривые равновесных состояний, потеря устойчивости, разрушение, задача Ламе.

1. Введение

Сферические тонкостенные сосуды широко используются в промышленности, например, для хранения и транспортировки сжиженного газа. При этом они находятся под действием большого внутреннего давления. Их разрушение может привести к катастрофическим последствиям. При проектировании таких емкостей необходимо как можно более точно производить расчет на разрушение и определение величины критического внутреннего давления.

Максимально возможная точность расчета будет достигнута, если рассматривать разрушение как невозможность сохранения равновесия элементом конструкции под действием заданной нагрузки. Потеря равновесия происходит тогда, когда материал в некоторой совокупности отдельных областей конструктивного элемента переходит на закритическую стадию деформирования (стадию разупрочнения), на которой сопротивление самого материала является неустойчивым.

Разупрочнение неоднократно фиксировалось в экспериментах [1–4]. Однако учет таких состояний материала еще не нашел широкого применения в расчетах на прочность элементов конструкций из-за сложности построения модели материала, включающей описание поведения материала на стадии разупрочнения, и экспериментального определения параметров, входящих в модель. Кроме того, при использовании таких моделей возникают математические трудности, связанные с невыполнением условий Адамара [5], то есть полученные системы уравнений равновесия имеют неединственные и неустойчивые решения. Решены только некоторые задачи (например, [6–8]).

В данной работе предложена модель материала, учитывающая все стадии деформирования (в том числе и разупрочнение) при плоском напряженном состоянии элементов материала. Показано, как из простого эксперимента по кручению цилиндрического образца

с фиксированием стадии разупрочнения получить необходимые параметры для идентификации модели. Затем приведена методика определения предельного давления в толстостенных сферических сосудах. Использование предложенной модели материала позволило применить методы математической теории катастроф для решения сформулированной задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим тонкостенную сферическую оболочку с внутренним радиусом b . Толщина оболочки $t \ll b$. Оболочка находится под действием квазистатически возрастающего внутреннего давления p . Температура постоянна. Требуется найти величину предельного давления p^* , при достижении которого происходит разрушение оболочки.

При возрастании давления до разрушения материал оболочки проходит все стадии деформирования, а именно упругость, упрочнение и разупрочнение.

Определим свойства материала оболочки на всех стадиях деформирования, включая и стадию разупрочнения. При пропорциональном нагружении для расчета напряженно-деформированного состояния, как правило, используется теория малых упруго-пластических деформаций. Однако ее первое положение о постоянстве объемного модуля на стадии разупрочнения не выполняется в силу наличия объемного разрушения материала. Вместо второго положения о пропорциональности девиаторов тензоров напряжений и деформаций будем сохранять пропорциональность полных тензоров напряжений и деформаций с некоторым переменным матричным коэффициентом, зависящим от деформаций. Это означает, что в области неупругости линии уровня функции потенциальной энергии подобны линиям уровня в области упругости [9]. В этом случае потенциал напряжений представляет собой выпукло-вогнутую функцию. В области выпуклости материал устойчив, в области вогнутости материал находится на стадии разупрочнения (неустойчив) [9].

Опираясь на рассуждения, приведенные выше, получаем для плосконапряженного состояния, в котором находятся элементы оболочки, следующие определяющие соотношения [9]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} = \psi(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cdot \frac{E}{1-\mu^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона; σ_1 , σ_2 и ε_1 , ε_2 – соответственно напряжения и деформации в декартовой прямоугольной системе в плоском элементе, находящемся в условиях плосконапряженного состояния. Параметр ψ требует определения в эксперименте.

Для определения функции ψ используем линии уровня потенциальной энергии в области упругости, которые для плосконапряженного состояния определяются выражением

$$V^e(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = E[2 \cdot (1 - \mu^2)]^{-1} \cdot (\varepsilon_1^2 + 2\mu\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2).$$

Это центральные эллипсы на плоскости $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Теперь нужно только определить энергию деформаций для каждой такой линии в области неупругости.

Очевидно, что деформирование материала вдоль большой полуоси эллипса является чистым сдвигом ($\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = -\varepsilon$). Воспользуемся полной диаграммой кручения цилиндрического образца, из которой можно получить диаграмму с падающей ветвью на стадии разупрочнения поверхностного слоя при чистом сдвиге [10]. Пусть эта диаграмма аппроксимируется выражением $\tau = G \cdot (\gamma - 50\gamma^2)$. Здесь τ – касательное напряжение; γ – сдвиг; $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\mu)}$ – модуль сдвига в упругости.

Тогда энергия деформаций, отвечающая линии уровня,

$$V = \int_0^\gamma \tau d\gamma = V^e \cdot \left(1 - \frac{100}{3} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot V^e}{G}}\right), \text{ где } V^e = \frac{1}{2} \cdot G\gamma^2 - \text{упругая энергия; } \gamma = \sqrt{\frac{2 \cdot V^e}{G}}.$$

Так как $\sigma_1 = \frac{dV}{d\varepsilon_1}$; $\sigma_2 = \frac{dV}{d\varepsilon_2}$, то из равенства (1) находим, что

$$\psi = 1 - 100 \cdot \sqrt{V^e \cdot \frac{1 + \mu}{E}}. \quad (2)$$

В сферической оболочке имеют место только деформации (плосконапряженное состояние) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_\theta = \varepsilon_\varphi$, тогда из формулы (2) находим, что $\psi = 1 - 100\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}$.

$$\text{Отсюда } \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \sigma = \left(1 - 100\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right) \frac{E}{1-\mu} \varepsilon.$$

На рис. 1 показан качественный вид потенциала напряжений, полученного выше для плосконапряженного состояния. Отчетливо видны области выпуклости (упрочнение) и вогнутости (разупрочнения).

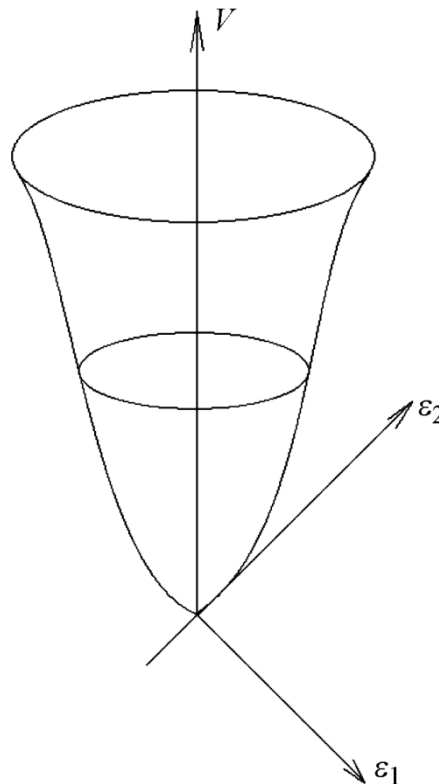


Рис. 1. Качественный вид потенциала напряжений

Уравнение равновесия

Выпишем лагранжиан системы, который при квазистатическом нагружении представляется в виде суммы потенциальной энергии деформаций сферической оболочки и работы внешних сил, взятой со знаком минус. Энергия элемента сферы равна

$$\frac{1}{2} \cdot (\sigma_{\theta}\varepsilon_{\theta} + \sigma_{\varphi}\varepsilon_{\varphi}) = \left(1 - 100\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right) \cdot \frac{E\varepsilon}{1-\mu} = \left(1 - 100\frac{v}{b} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right) \cdot \frac{E}{1-\mu} \frac{v^2}{b^2}.$$

Здесь v – радиальное перемещение точек внутренней поверхности сферы; $\varepsilon = \frac{v}{b}$. Тогда полная энергия (лагранжиан) системы есть функция

$$W = 4\pi b^2 t \left(1 - 100\frac{v}{b} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right) \cdot \frac{E}{1-\mu} \frac{v^2}{b^2} - 4\pi b^2 p v,$$

где $4\pi b^2 t$ – объем сферы; $4\pi b^2$ – площадь внутренней поверхности. Отметим, что перемещение v – это параметр состояния системы; внутреннее давление p – параметр управления системой. Теперь уравнение равновесия имеет следующий вид [11]:

$$\frac{dW}{dv} = \frac{2Etv}{b^2(1-\mu)} \left(1 - 150\frac{v}{b} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right) - p = 0. \quad (3)$$

Из уравнения (3) получаем связь между параметром управления и параметром состояния, а именно:

$$p = \frac{2Etv}{b^2(1-\mu)} \left(1 - 150\frac{v}{b} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right).$$

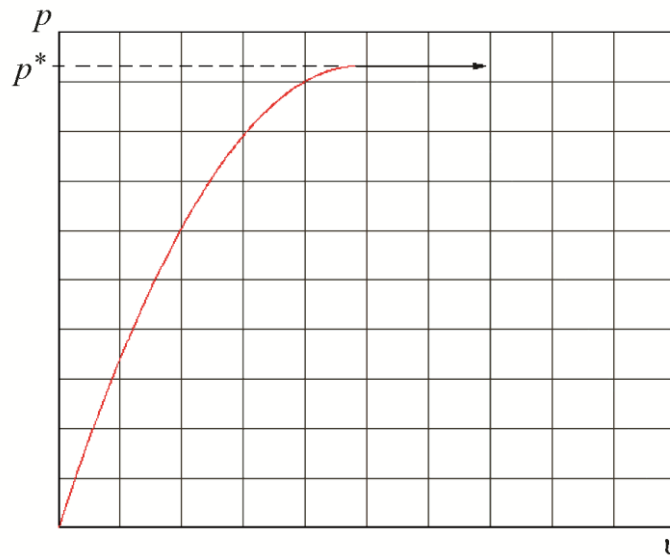


Рис. 2. Кривая равновесных состояний системы вплоть до разрушения

Определим максимум функции $p(v)$, после достижения которого произойдет разрушение оболочки. Имеем уравнение

$$\frac{dp}{dv} = \frac{2Et}{b^2(1-\mu)} \left(1 - 300\frac{v}{b} \cdot \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}\right) = 0.$$

Отсюда находим координаты экстремальной точки:

$$v = \frac{b}{300} \sqrt{\frac{1+\mu}{1-\mu}}, p = \frac{Et}{300b} \sqrt{\frac{1}{1-\mu^2}}.$$

На рис. 2 приведена кривая равновесных состояний оболочки вплоть до разрушения.

Для численных значений $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $b = 10^{-2}$ м; $t = 10^{-3}$ м; $\mu = 0,3$. Предельное перемещение внутренней поверхности оболочки $v^* = 45 \cdot 10^{-6}$ м, предельное (разрушающее) давление $p^* = 70$ МПа.

3. Заключение

Предложена методика определения максимального разрушающего давления в тонкостенном сферическом сосуде. Она основывается на описании свойств материала с выпукловогнутой потенциальной энергией, учитывающим заключительную стадию деформирования (разупрочнение), с последующим использованием аппарата теории катастроф.

Благодарность

Работа выполнена в соответствии с государственным заданием по теме № АААА-А18-118020790145-0.

Литература

1. Вильдеман В. Э., Чаусов Н. Г. Условия деформированного разупрочнения материала при растяжении образца специальной конструкции // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2007. – Т. 73, № 10. – С. 55–59.
2. Ипатов А. В., Вильдеман В. Э. Построение материальных функций неупругого деформирования алюминиевого сплава Д16Т по результатам испытаний на растяжение и кручение // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2012. – № 4 (29). – С. 106–114.
3. Vil'deman V. E., Tretyakov M. P. Material testing by plotting total deformation curves // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2013. – Vol. 42, No. 2. – P. 166–170. – DOI: 10.3103/S1052618813010159.
4. Миронов В. И. Свойства материала в реологически неустойчивом состоянии // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. – 2002. – Т. 68, № 10. – С. 47–52.
5. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. – М.: Наука, 1974. – 286 с.
6. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. – Екатеринбург: УрО РАН, 1995. – 191 с.
7. Стружанов В. В., Коркин А. В. Об устойчивости процесса растяжения одной стержневой системы с разупрочняющимся элементом // Вестник Уральского гос. ун-та путей сообщения. – 2016. – № 3 (31). – С. 4–14.
8. Стружанов В. В., Коркин А. В. Один вариант метода упругих решений в задаче об определении положений равновесия растягиваемой стержневой системы с разупрочняющимися элементами // Вестник УрГУПС. – 2018. – № 1 (37). – С. 11–19.
9. Стружанов В. В., Коркин А. В., Чайкин А. Е. Об одном подходе к определению предельной несущей способности механических систем с разупрочняющимися элементами // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки. – 2018. – Т. 22, № 4. – С. 762–773.
10. Стружанов В. В. Определение диаграммы деформирования с падающей ветвью по диаграмме кручения цилиндрического образца // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2012. – Т. XV, № 1 (49). – С. 138–144.
11. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения / пер. с англ. – М.: Мир, 1980. – 608 с.