Received: 07.06.2019
Revised: 30.01.2020
Accepted: 21.02.2020
DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.034-042

A METHOD FOR CALCULATING STRESSES IN A MULTIPLY CONNECTED ELASTIC BODY

V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

https://orcid.org/0000-0002-3669-2032 stru@imach.uran.ru

Corresponding author. E-mail: stru@imach.uran.ru
Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation
Tel.: +7(343) 362 30 19

An analytical method for determining the stress state in elastic bodies with a cavity is developed. The technique is based on using solutions to problems of the theory of elasticity for two simply connected regions, namely, for a body without a cavity and a space that is the exterior of a cavity. Special operator equations are obtained to determining the required stresses in a multiply connected body. An iterative method for solving these operator equations is proposed. A convergence of successive approximations is proved. An illustrative example is provided.

Keywords: multiply connected body, stress state, operator equation, successive approximation, iteration convergence.

References

1. Savin, G.N. and Tul'chii, V.I. *Spravochnik po kontsentratsii napryazheniy* [Handbook on Stress Concentrations]. Kiev, Vishcha Shkola Publ., 1976. (In Russian).
2. Savin G.N. *Raspredelenie napryazheniy okolo otverstiy* [Stress Distribution Around Holes]. Kiev, Naukova Dumka Publ., 1968, 891 p (In Russian).
3. Rabotnov Yu.N. Mekhanika devormirovannogo tverdogo tela [Mechanics of Deformable Solids]. M, Nauka Publ., 1988, 712 p. (In Russian).
4. Mirenkov V.E., Shutov V.A., Poluektov V.A. On the deformation of loosened plates. *Izvestiya Vuzov, Stroitelstvo*, 2002, no. 12, pp. 17–21. (In Russian).
5. Sil'vestrov V.V., Zemlyanova A.Yu. Repair of a Plate with a Circular Hole by Applying a Patch. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2004, vol. 45, no. 4, pp. 605–611. DOI: 10.1023/B:JAMT.0000030342.06634.ec.
6. Levshchanova L.L. The destruction of the coating on a plate with a cutout. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii* (Mechanics of Composite Materials and Structures), 2007, vol. 13, no. 2, pp. 233–238. (In Russian).
7. Mokryakov V.V. The use of the multipole format for solving problems of two close located holes. *Mechanics of Solids*, 2007, vol. 42, iss. 5, pp 771–785. DOI: 10.3103/S0025654407050111.
8. Kudryavtsev S.V. *Kontsentratsiya naprryazheniy vblizi krugovykh otverstiy v gofrirovannykh stenkakh balok* [Stress Concentration Near Circular Holes in Corrugated Beam Walls]. Ekaterinburg, AMB Publishing House, 2010, 156 p. (In Russian).
9. Khan Kh. Teoriya uprugosti [Theory of Elasticity]. Moscow, Mir Publ., 1988, 344 p. (In Russian).
10. Lurie A.I. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 940 p. (In Russian).

11. Dmitrienko Yu.I. *Tenzornoe ischislenie* [Tensor Calculation]. Moscow, Vysshaya Shkola Publ., 2001, 575 p. (In Russian).
12. Mikhlin S.G. *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 512 p. (In Russian).
13. Lyusternik L.A, Sobolev V.I. *Elementy funktsionalnogo analiza* [Elements of Functional Analysis]. Moscow, Nauka Publ., 1965, 520 p. (In Russian).
14. Timoshenko S., Gudier J.N. *Teoriya uprugosti*, Rus. transl. [Theory of Elasticity, New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Company, 1951]. Moscow, Nauka Publ., 1971. (In Russian).

Подана в журнал: 07.06.2020
УДК 539.3
DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.034-42

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА НАПРЯЖЕНИЙ В НЕОДНОСВЯЗНОМ УПРУГОМ ТЕЛЕ

В. В. Стружанов

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация

https://orcid.org/0000-0002-3669-2032 stru@imach.uran.ru

Ответственный автор. Электронная почта: stru@imach.uran.ru
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация
Тел.: +7(343) 362–30–19

Разработан аналитический метод определения напряженного состояния в упругих телах с полостью. Методика основана на использовании решений задач теории упругости для двух односвязных областей, а именно, для тела без полости и пространства, являющегося внешностью полости. Получены специальные операторные уравнения, решения которых определяют искомые напряжения в неодносвязном теле. Предложен итерационный метод решения данных операторных уравнений. Доказана сходимость последовательных приближений. Приведен иллюстрированный пример.

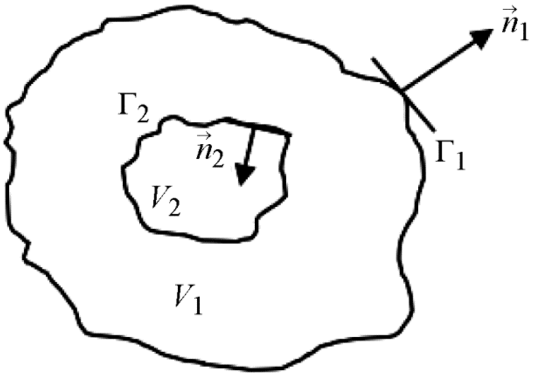
Ключевые слова: неодносвязное тело, напряженное состояние, операторное уравнение, последовательные приближения, сходимость итераций.

1. Введение

Многие элементы конструкций имеют отверстия конструктивного или технологического назначения. Для оценки надежности, прочности и долговечности таких конструктивных элементов необходимо знать их напряженное состояние, поскольку оно существенно неоднородное и возле отверстий появляются зоны концентрации напряжений, где и начинается процесс разрушения [1–3]. Из последних работ по этой тематике можно отметить исследования [4–8]. Таким образом, отверстия (полости) оказывают определяющее влияние на работоспособность изделий. Поэтому для оценки прочности деталей необходимо решать краевые задачи теории упругости для неодносвязных областей, на внешних границах которых заданы силы. С практической точки зрения возможно воспользоваться различными численными методами, например методом конечных элементов. Однако для понимания свойств уравнений и полученных решений, а также для тестирования численных методов необходимо во многих случаях иметь аналитические решения. Особенно, когда коэффициент концентрации напряжений слишком велик. В работе предложен алгоритм расчета напряжений в упругих телах с полостями. Построены соответствующие операторные уравнения, разработан итерационный метод их решения и доказана сходимость итераций к точному аналитическому решению задачи.

2. Постановка задачи

Пусть в трехмерном евклидовом пространстве E^3 имеются два односвязных тела: V_1, ограниченное кусочно-гладкой поверхностью Γ_1, и V_2, ограниченное кусочно-гладкой поверхностью Γ_2. Причем $V_2 \subset V_1$. Составим неодносвязное тело $V = V_1 \backslash V_2$, т. е. V_2 – это полость в области V_1 (рисунок).



Неодносвязное тело

Свойства материала в данных областях определяются однородным изотропным симметричным тензором четвертого ранга модулей упругости C [9]. В дальнейшем полагаем, что этот тензор распространен на все пространство E^3. Требуется найти напряженное состояние в неодносвязном теле V, если на его границах Γ_1 и Γ_2 заданы системы уравновешенных внешних сил, соответственно t_1 и t_2, объемные силы отсутствуют.

Напряженно-деформированное состояние в теле V определяется решением системы уравнений краевой задачи теории упругости, которая в инвариантной форме имеет вид [10]:

$$\nabla \cdot \sigma = 0; \;\; \varepsilon = \operatorname{def} u; \;\;\; \sigma = C \cdot \varepsilon, \tag{1}$$

с граничными условиями

$$\sigma \cdot n_1|_{\Gamma_1} = t_1; \quad \sigma \cdot n_2|_{\Gamma_2} = t_2. \tag{1}$$

Здесь первая группа уравнений – это уравнения равновесия; σ – симметричный тензор второго ранга напряжений; ∇ – оператор Гамильтона [6], точкой обозначено скалярное произведение тензора напряжений на оператор ∇ (вектор Гамильтона). Вторая группа уравнений – соотношения Коши (ε – симметричный тензор второго ранга деформаций; u – вектор перемещений). Третья группа уравнений – это закон Гука, связывающий тензоры напряжений и деформаций (двумя точками обозначено двойное скалярное произведение тензора четвертого ранга с тензором второго ранга [10, 11]). Вектор n_1 – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_1; n_2 – единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ_2, направленный в сторону области V_2. Точкой обозначено скалярное произведение тензора напряжений на вектор внешней нормали.

3. Метод решения

Пусть известны алгоритмы решений системы уравнений (1) для односвязной области V_1 с произвольными граничными условиями на поверхности Γ_1, а именно $\sigma \cdot n_1|_{\Gamma_1} = g_n$ (или $\sigma \cdot n_1 = g_n$), и для области $V_3 = E^3 \backslash V_2$ (внешность поверхности Γ_2) с произвольными условиями на поверхности Γ_2, а именно $\sigma \cdot n_2|_{\Gamma_2} = p_m$ (или $\sigma \cdot n_2 = p_m$). То есть, известны линейные отображения (операторы)

$$A_1\!: \; g_n \to \sigma_1^n; \qquad A_2\!: \; p_m \to \sigma_2^m,$$

где σ_1^n и σ_2^m – тензоры напряжений, являющиеся решениями соответствующих краевых задач для областей V_1 и V_3. Решение сформулированной выше задачи для несвязанной области V можно представить в виде суммы:

$$\sigma(x) = \sigma_1'(x) + \sigma_2'(x), \quad x \in V,$$

где тензоры напряжений должны быть таковы, что выполняются условия

$$n_1 \cdot \sigma_1' + n_1 \cdot \sigma_2' = t_1; \quad (2)$$

$$n_2 \cdot \sigma_1' + n_2 \cdot \sigma_2' = t_2. \quad (3)$$

Здесь тензоры σ_1' и σ_2' – некоторые (пока неизвестные) решения краевой задачи (1) соответственно для областей V_1 и V_3.

Получим теперь уравнения для определения σ_1' и σ_2'. Применим операторы A_1 и A_2 соответственно к условиям (2) и (3):

$$A_1(n_1 \cdot \sigma_1') + A_1(n_1 \cdot \sigma_2') = A_1 t_1;$$

$$A_2(n_2 \cdot \sigma_1') + A_2(n_2 \cdot \sigma_2') = A_2 t_2.$$

Тогда учитывая, что $A_1(n_1 \cdot \sigma_1') = \sigma_1'$; $A_2(n_2 \cdot \sigma_2') = \sigma_2'$, получаем:

$$\sigma_1' + B_1\sigma_2' = S_1, \quad x \in V_1; \quad (4)$$

$$\sigma_2' + B_2\sigma_1' = S_2, \quad x \in V_3. \quad (5)$$

где $B_1\sigma_2' = A_1(n_1 \cdot \sigma_2')$; $\sigma_1' = A_2(n_2 \cdot \sigma_1')$; $A_1 t_1 = S_1$ – тензор напряжений, являющийся решением краевой задачи (1) для области V_3 с граничными условиями t_2.

Подставляя выражение σ_1' из уравнения (4) в уравнение (5), а выражение σ_2' из уравнения (5) – в уравнение (4), находим два независимых уравнения для определения σ_1' и σ_2', а именно:

$$\sigma_1' = B_1 B_2 \sigma_1' + (S_1 - B_1 S_2), \quad x \in V_1; \quad (6)$$

$$\sigma_2' = B_2 B_1 \sigma_2' + (S_2 - B_2 S_1), \quad x \in V_3. \quad (7)$$

Решения уравнений (6) и (7) будем искать методом последовательных приближений:

$$\sigma_1' = \sum_{k=0}^{\infty} (B_1 B_2)^k (S_1 - B_1 S_2); \quad (8)$$

$$\sigma_2' = \sum_{k=0}^{\infty} (B_2 B_1)^k (S_2 - B_2 S_1). \quad (9)$$

Покажем, что операторы $B_1 B_2$ и $B_2 B_1$ есть операторы сжатия в соответствующих функциональных пространствах. Возьмем сначала энергетическое вещественное гильбертово пространство $T_1(V_1)$ тензоров напряжений, определенных в односвязной области V_1 и связанные законом Гука с тензорами деформаций, удовлетворяющих условиям совместности

[12]. Если тензор $q \in T_1(V_1)$, то $q \cdot\cdot S \cdot\cdot q$ – положительно определенная форма, значение которой равно удвоенной потенциальной энергии упругих деформаций элемента материала. Норма в энергетическом пространстве $T_1(V_1)$ определяется выражением $\|q\|^2_{T_1(V_1)} == \int_{V_1} q \cdot\cdot s \cdot\cdot q \, dV$ [12] (это удвоенная потенциальная энергия упругих деформаций всего тела V_1). Здесь $S = C^{-1}$ – тензор четвертого ранга модулей податливости. Отметим, что тензоры напряжений в уравнении (6) есть тензоры из $T_1(V_1)$.

Оценим норму оператора B_1B_2 в пространстве $T_1(V_1)$. Используем теорему Клайперона при отсутствии объемных сил, записанную в инвариантной форме [10,12]:

$$\int_W q \cdot\cdot S \cdot\cdot q \; dV = \int_\Gamma u \cdot (n \cdot q) \, d\Gamma.$$

Здесь W односвязное тело с границей Г; u – вектор перемещений; n – единичный вектор внешней нормали. Тогда

$$\|q\|^2_{T_1(V_1)} = \int_{V_1} q \cdot\cdot S \cdot\cdot q \, dV > \int_{V_2} q \cdot\cdot S \cdot\cdot q \, dV =$$

$$= \int_{\Gamma_2} u_2 \cdot (-n_2 \cdot q) \, d\Gamma = \int_{V_3} A_2(-n_2 \cdot q) \cdot\cdot S \cdot\cdot A_2(-n_2 \cdot q) \, dV >$$

$$> \int_{E^3 \setminus V_1} A_2(-n_2 \cdot q) \cdot\cdot S \cdot\cdot A_2(-n_2 \cdot q) \; dV =$$

$$= \int_{\Gamma_1} u_1 \, [-n_1 \cdot A_2(-n_2 \cdot q)] d\Gamma = \int_{V_1} A_1[n_1 \cdot A_2(n_2 \cdot q)] \cdot\cdot S \cdot\cdot A_1[n_1 \cdot A_2(n_2 \cdot q)] \, dV =$$
$$= \|B_1B_2q\|^2_{T_1(V_1)}.$$

Отсюда $\|q\|^2_{T_1(V_1)} > \|B_1B_2q\|^2_{T_1(V_1)}$. Здесь u_1, u_2 – векторы перемещений, заданные соответственно на границах Γ_1 и Γ_2. Отметим, что интегралы по областям V_3 и $E^3 \setminus V_1$ имеют конечные значения, так как тензоры напряжений (решения краевой задачи (1) для внешней поверхности Γ_1 и Γ_2) достаточно быстро убывают и обращаются в нуль на бесконечности. Теперь [13]

$$\|B_1B_2\|_{T_1(V_1)} = \sup \frac{\|B_1B_2q\|_{T_1(V_1)}}{\|q\|_{T_1(V_1)}} < 1.$$

Следовательно, оператор B_1B_2 есть оператор сжатия для элементов пространства $T_1(V_1)$ и ряд (8) сходится по норме пространства $T_1(V_1)$ к решению уравнения (6).

Возьмем теперь энергетическое вещественное гильбертово пространство $T_1(V_3)$ тензоров напряжений, определенных в области $E^3 \setminus V_1$ и связанных законом Гука с тензорами деформаций, удовлетворяющих условиям совместности. Если $q \in T_1(V_1)$, то $q \cdot\cdot S \cdot\cdot q$ – положительно определенная форма. Норма в пространстве $T_1(V_3)$ есть $\|q\|^2_{T_1(V_3)} = \int_{V_3} q \cdot\cdot S \cdot\cdot q \, dV$ (это удвоенная потенциальная энергия тела V_3). Аналогично изложенному выше оценим норму оператора B_2B_1. Имеем:

$$= \int\limits_{V_3} q \cdot\cdot S \cdot\cdot q \, dV > \int\limits_{E^3 \backslash V_1} q \cdot\cdot S \cdot\cdot q \, dV =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_1} u_1 \cdot (-n_1 \cdot q) \, d\Gamma = \int\limits_{V_1} A_1(-n_1 \cdot q) \cdot\cdot S \cdot\cdot A_1(-n_1 \cdot q) \, dV >$$

$$> \int\limits_{V_2} A_1(-n_1 \cdot q) \cdot\cdot S \cdot\cdot A_1(-n_2 \cdot q) \, dV =$$

$$= \int\limits_{\Gamma_2} u_2 \, [-n_2 \cdot A_1(-n_1 \cdot q)] d\Gamma = \int\limits_{V_3} A_2[n_2 \cdot A_1(n_1 \cdot q)] \cdot\cdot S \cdot\cdot A_2[n_2 \cdot A_1(n_1 \cdot q)] \, dV =$$

$$= \|B_2 B_1 q\|^2_{T_1(V_3)}.$$

Отсюда $\|q\|^2_{T_1(V_3)} > \|B_2 B_1 q\|^2_{T_1(V_3)}$.

Тогда $\|B_2 B_1\|_{T_1(V_3)} = \sup\limits_{\|q\| \neq 0} \frac{\|B_1 B_2 q\|_{T_1(V_1)}}{\|q\|_{T_1(V_1)}} < 1$.

Таким образом, оператор $B_2 B_1$ есть оператор сжатия и ряд (9) сходится по норме пространства $T_1(V_3)$ к решению уравнения (7). Наконец, складывая решения уравнений (6) и (7), находим решение исходной задачи, т. е. напряжения в неодносвязном упругом теле V при заданных внешних силах (векторах t_1 и t_2).

4. Тестовый пример

Применим изложенную методику для решения тестовой задачи о расчете напряжений в толстостенной трубе с внешним радиусом b и внутренним радиусом a, находящейся под воздействием внешнего и внутреннего давлений соответственно с интенсивностями p_1 и p_2 (задача Ляме). Граничные условия в этом случае равны $t_1 = \sigma_r|_{r=b} = -p_1$, $t_2 = \sigma_r|_{r=a} = -p_2$. В данной задаче область V_1 – это сплошной круговой цилиндр с радиусом основания b, на который действует равномерное внешнее давление интенсивностью t_1. Область V_3 – это трехмерное пространство с цилиндрическим отверстием с радиусом a, внутри которого создано давление с интенсивностью t_2. Используя известные решения для областей V_1 и V_3 с определенными выше граничными условиями [9, 10], получаем:

$$S_1 = A_1(-p_1) = \begin{vmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\nu p_1 \end{vmatrix}, \quad S_2 = A_2(-p_2) = \begin{vmatrix} -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{a^2}{r^2};$$

$$B_1\,S_2 = \begin{vmatrix} -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\nu p_2 \end{vmatrix} \frac{a^2}{b^2}, \quad B_2\,S_1 = \begin{vmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{a^2}{r^2};$$

$$S_1 - B_1\,S_2 = \begin{vmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\nu p_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\nu p_2 \end{vmatrix} \frac{a^2}{b^2};$$

$$S_2 - B_2\,S_1 = \begin{vmatrix} -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{a^2}{r^2} - \begin{vmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{a^2}{r^2}.$$

Здесь ν – коэффициент Пуассона, на главной диагонали тензоров соответствующих напряжений сверху вниз расположены радиальные, тангенциальные и осевые напряжения. Отсюда ряды (8) и (9) соответственно имеют вид:

$$\sigma_1' = L + L\,\frac{a^2}{b^2} + L\frac{a^4}{b^4} + \cdots = \frac{L\,b^2}{b^2 - a^2}; \tag{10}$$

$$\sigma_2' = K + K\,\frac{a^2}{b^2} + K\frac{a^4}{b^4} + \cdots = \frac{K\,b^2}{b^2 - a^2}, \tag{11}$$

где

$$L = \begin{vmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\nu p_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 2\,\nu p_2 \end{vmatrix} \frac{a^2}{b^2};$$

$$K = \begin{vmatrix} -p_2 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{a^2}{r^2} - \begin{vmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \frac{a^2}{r^2}.$$

Теперь искомый тензор напряжений $\sigma = \sigma_1' + \sigma_2'$ $(a \le r \le b)$. Нетрудно убедиться, что после подстановки значений (10) и (11) получаем известное решение Ляме [14].

5. Заключение

Построены операторные уравнения, решения которых определяют напряженное состояние в упругих областях с полостями. Разработан метод последовательных приближений их решения. Доказана сходимость итераций к точному решению задачи теории упругости для неодносвязного тела.

Литература

1. Савин Г. Н., Тульчий В. И. Справочник по концентрации напряжений. – Киев : Вища школа, 1976. – 412 с.
2. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Киев : Наукова думка, 1968. – 891с.
3. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М. : Наука, 1988. – 712 с.
4. Миренков В. Е., Шутов В. А., Полуэктов В. А. О деформировании пластин с ослаблениями // Известия вузов. Строительство. – 2002. – № 12. – С. 17–21.
5. Sil'vestrov V. V., Zemlyanova A.Yu. Repair of a plate with a circular hole by applying a patch // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2004. – Vol. 45, no. 4. – P. 605–611. – DOI: 10.1023/B:JAMT.0000030342.06634.ec.
6. Левщанова Л. Л. Разрушение покрытий на пластинах с вырезом // Механика композитных материалов и конструкций. – 2007. – Т. 13, № 2. – С. 233–238.
7. Mokryakov V. V. The use of the multipole format for solving problems of two close located holes // Mechanics of Solids. – 2007. – Vol. 42, iss. 5. – P 771–785. – DOI: 10.3103/S0025654407050111.
8. Кудрявцев С. В. Концентрация напряжений вблизи круговых отверстий в гофрированных стенках балок. – Екатеринбург : Изд-во АМБ. – 2010. – 156 с.
9. Хан Х. Теория упругости. – М : Мир, 1988. – 344 с.
10. Лурье А. И. Теория упругости. – М : Наука, 1970. – 940 с.
11. Дмитриенко Ю. И. Тензорное исчисление. – М : Высшая школа, 2001. – 575 с.

12. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. – М : Наука, 1970. – 512 с.
13. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. – М : Наука, 1965. – 520 с.
14. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости / пер. с англ. – М : Наука, 1971. – 560 с.

Struzhanov V. V. A method for calculating stresses in a multiply connected elastic body // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2020. – Iss. 1. – P. 34–42. – DOI: 10.17804/2410-9908.2020.1.034-042.