



**Received:** 01.07.2023

**Revised:** 19.09.2023

**Accepted:** 20.10.2023

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2023.5.006-014

## A MODEL OF DESCRIBING CREEP STRAINS AND POROSITY EVOLUTION FOR A HOLLOW CYLINDER AFFECTED BY INTERNAL GAS PRESSURE

V. V. Nazarov

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University,  
1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russia*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  [inmec130@mail.ru](mailto:inmec130@mail.ru)

Corresponding author. E-mail: [inmec130@mail.ru](mailto:inmec130@mail.ru)

Address for correspondence: 1 Michurinskiy Ave., Moscow, 119192, Russia

Two plane-strain states of two identical hollow cylinders are considered, where one is made of a material with porosity evolution and the other is made of an incompressible material. For each hollow cylinder, the process of inflation begins from an undeformed state and ends as soon as the external boundary radius reaches a certain set value. In the assumption that the porosity increases and reaches its highest value at the outer boundary radius, the two hollow cylinders are compared in terms of their strains and stresses.

**Keywords:** hollow cylinder, internal pressure, creep, porosity

### References

1. Bailey, R.W. Creep relationships and their application to pipes, tubes, and cylindrical parts under internal pressure. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, 1951, 164 (1), 425–431. DOI: 10.1243/PIME\_PROC\_1951\_164\_046\_02.
2. Weir, C.D. The creep of thick tubes under internal pressure. *Journal of Applied Mechanics*, 1957, 24 (3), 464–466. DOI: 10.1115/1.4011565.
3. Rimrott, F.P.J. Creep of thick-walled tubes under internal pressure considering large strains. *Journal of Applied Mechanics*, 1959, 26 (2), 271–275. DOI: 10.1115/1.4011994.
4. King, R.H. and Mackie, W.W. Creep of thick-walled cylinders. *ASME. Journal of Basic Engineering*, 1967, 89 (4), 877–884.
5. Pai, D.H. Steady-state creep analysis of thick-walled orthotropic cylinders. *International Journal of Mechanical Sciences*, 1967, 9 (6), 335–348. DOI: 10.1016/0020-7403(67)90039-2.
6. Bhatnagar, N.S. and Gupta, S.K. Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1969, 27 (6), 1655–1661. DOI: 10.1143/JPSJ.27.1655.
7. Bhatnagar, N.S. and Arya, V.K. Large strain creep analysis of thick-walled cylinders. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 1974, 9 (2), 127–140. DOI: 10.1016/0020-7462(74)90004-3.
8. Xie, Z.G., He, Y.M., Yang, J.G., and Gao, Z.L. Microstructural evolution of nuclear power steel A508–III in the creep process at 800°C. *Applied Mechanics and Materials*, 2017, 853, 153–157. DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.853.153.
9. Liu, W., Guo, Y., Zhang, M., and Zhang, J. Formation and evolution of porosity during high temperature creep of a nickel-based single crystal super alloy. *E3S Web of Conferences*, 2020, 155, 01005. DOI: 10.1051/e3sconf/202015501005.
10. Leckie, F.A. and Hayhurst, D.R. Constitutive equations for creep rupture. *Acta Metallurgica*, 1977, 25 (9), pp. 1059–1070. DOI: 10.1016/0001-6160(77)90135-3.



11. Morris, R.E. Creep-rupture data for welded N-155 tubes. *NASA Technical Note D-5195*, 1969.
12. Nazarov, V.V. Selecting a dependence for the approximation of experimental data on secondary creep and creep rupture strength. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2023, 3, 44–49. DOI: 10.17804/2410-9908.2023.3.044-049. Available at: [https://dream-journal.org/DREAM\\_Issue\\_3\\_2023\\_Nazarov\\_V.V.\\_044\\_049.pdf](https://dream-journal.org/DREAM_Issue_3_2023_Nazarov_V.V._044_049.pdf)



Подана в журнал: 01.07.2023

УДК 539.376

DOI: 10.17804/2410-9908.2023.5.006-014

## МОДЕЛЬ ОПИСАНИЯ ДЕФОРМАЦИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И ЭВОЛЮЦИИ ПОРИСТОСТИ ДЛЯ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ ГАЗА

В. В. Назаров

*Научно-исследовательский институт механики  
Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования  
«Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»  
Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия*

 <https://orcid.org/0000-0002-9234-3646>  [inmec130@mail.ru](mailto:inmec130@mail.ru)

Ответственный автор. Электронная почта: [inmec130@mail.ru](mailto:inmec130@mail.ru)  
Адрес для переписки: Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия

Рассмотрены два плоских деформированных состояния двух одинаковых полых цилиндров, где один изготовлен из материала с эволюцией пористости, а второй – из несжимаемого материала. Процесс раздувания для каждого полого цилиндра начинается из недеформированного состояния и завершается достижением внешним граничным радиусом некоторого заданного значения. В предположении, что пористость возрастает и на внешнем граничном радиусе принимает свое наибольшее значение, приведено сравнение деформаций и напряжений двух полых цилиндров.

**Ключевые слова:** полый цилиндр, внутреннее давление, ползучесть, пористость

### 1. Введение

В области ползучести различают опыты на одноосное растяжение и сложное напряженное состояние. Опыты на одноосное растяжение проводят на цилиндрических образцах, откуда определяют материальные параметры зависимостей от номинального напряжения между механическими характеристиками, такими как скорость деформации при установившейся ползучести, деформация и время в момент разрушения. Опыты на сложное напряженное состояние проводят на трубчатых образцах, в которых реализуют заданное сложное напряженное состояние, характеризуемое знаками и значениями главных напряжений. Для тонкостенных трубчатых образцов одно из главных напряжений равно нулю, а остальные два зависят от способа нагружения, где при кручении два главных напряжения различаются только знаком, а при внутреннем давлении они принимают два различных положительных значения.

В работах [1–7] приведены различные модели определения напряжений и деформаций ползучести, возникающих в полом цилиндре под воздействием внутреннего давления, где материал полого цилиндра принимается несжимаемым. Эксперимент [8] показал, что при установившейся ползучести (скорость деформации не меняется во времени) материал следует считать несжимаемым, а при ускоряющейся ползучести (скорость деформации возрастает во времени) – с эволюцией пористости. Вместе с этим экспериментальные данные [9] свидетельствуют о том, что увеличение температуры приводит к росту пористости и что ближе к разрушению происходит растрескивание микропор с образованием трещин. Для стадии ускоряющейся ползучести рассматривают либо поврежденность [10], которая позволяет описать только главный механический процесс, либо пористость, которая позволяет описать не только главный механический процесс, но и сопряженные с ним физические процессы.

Ниже пойдет речь об определении напряжений и деформаций ползучести в полом цилиндре из материала с эволюцией пористости, деформируемого под воздействием внутреннего давления. Чтобы сравнить напряжения и деформации материала с эволюцией пористости и несжимаемого материала, будет рассмотрен точно такой же цилиндр из несжимаемого материала.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим и сравним два деформированных состояния двух полых цилиндров, отличающихся в недеформированном состоянии только типом материала, где первый изготовлен из материала с эволюцией пористости, а второй – из несжимаемого материала. В условиях плоского деформированного состояния ограничимся рассмотрением только поперечного сечения, где раздувание каждого из двух полых цилиндров начинается из недеформированного состояния и завершается достижением внешним граничным радиусом заданного значения.

На рис. 1 приведены геометрия и размеры поперечного сечения этих двух полых цилиндров, пористость которых в недеформированном состоянии  $\omega = 0$ , а в деформированном  $\omega > 0$  для материала с эволюцией пористости (1) и  $\omega = 0$  для несжимаемого материала (2).

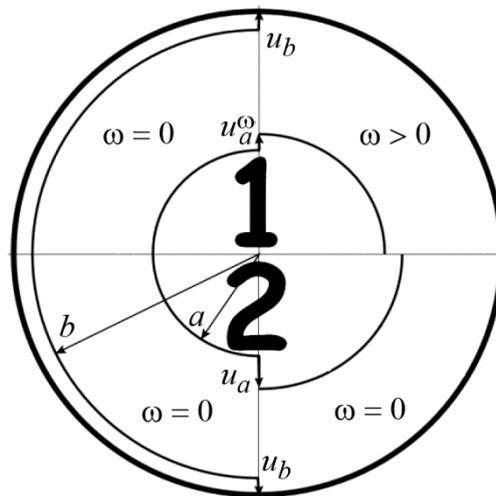


Рис. 1. Геометрия и размеры поперечного сечения полого цилиндра:  
1 – из материала с эволюцией пористости; 2 – из несжимаемого материала

Сопоставим перемещения в несжимаемом материале  $u_r$  (когда ползучесть установившаяся) и в материале с эволюцией пористости  $u_r^\omega$  (когда ползучесть ускоряющаяся). Для этого при одном и том же значении радиуса  $r$  рассмотрим разницу  $\rho$  между этими перемещениями:

$$\rho = u_r - u_r^\omega, \quad u_r \geq u_r^\omega, \quad (1)$$

где индекс  $\omega$  означает принадлежность величины к материалу с эволюцией пористости, граничные радиусы  $a$  и  $b$ , а также их перемещения  $u_a$ ,  $u_a^\omega$  и  $u_b$  заданы.

Считаем, что процесс деформирования происходит осесимметрично и поперечное сечение полого цилиндра остается круглым, при этом для несжимаемого материала площадь поперечного сечения остается постоянной, а для пористого материала она получает приращение за счет образования и роста микропор. Тогда в качестве характеристики материала с эволюцией пористости рассмотрим пористость  $\omega$ , равную относительному приращению площади элементарного кольца,



$$\omega = \frac{s_1^{\text{ring}} - s_0^{\text{ring}}}{s_0^{\text{ring}}} = \left( \frac{u_r}{r} + \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \frac{du_r}{dr} \right) + \left( \frac{\rho}{r} + \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} \frac{d\rho}{dr} + \frac{u_r}{r} \frac{d\rho}{dr} + \frac{\rho}{r} \frac{du_r}{dr} \right), \quad (2)$$

где  $s_0^{\text{ring}} = 2\pi r dr$  – площадь элементарного кольца в недеформированном состоянии, а  $s_1^{\text{ring}} = 2\pi(r + u_r^\omega)(dr + du_r^\omega)$  – площадь элементарного кольца из материала с эволюцией пористости в деформированном состоянии.

Считаем, что образование и рост микропор происходит под воздействием окружных деформаций  $\varepsilon_\theta > 0$  и не зависит от радиальных деформаций  $\varepsilon_r < 0$ . В силу того, что разрушение начинается на внешнем граничном радиусе [11], принимаем гипотезу, согласно которой пористость возрастает и на внешнем граничном радиусе принимает свое наибольшее значение. Из соображений размерности запишем пропорцию

$$\omega \varepsilon_\theta = \omega^s r^{\text{avg}}, \quad (3)$$

где относительное приращение площади поперечного сечения полого цилиндра

$$\omega^s = \frac{s_1 - s_0}{s_0} = \frac{((b + u_b) - (a + u_a^\omega))^2 - (b - a)^2}{(b - a)^2}. \quad (4)$$

Здесь  $s_0$  – площадь поперечного сечения в недеформированном состоянии;  $s_1$  – площадь поперечного сечения из материала с эволюцией пористости в деформированном состоянии; относительное изменение интегрально-среднего радиуса определяется выражением

$$r^{\text{avg}} = \frac{1}{(b + u_b) - (a + u_a^\omega)} \int_{a+u_a^\omega}^{b+u_b} \frac{u_r}{R} dR.$$

Согласно (3), зависимость для пористости принимает вид

$$\omega = \frac{\omega^s}{(b + u_b) - (a + u_a^\omega)} \frac{r}{u_r} \int_{a+u_a^\omega}^{b+u_b} \frac{u_r}{R} dR. \quad (5)$$

Чтобы воспользоваться (5), потребуется определить  $u_r(r)$ .

### 3. Перемещения

Сумма слагаемых первой скобки в формуле (2) выражает условие несжимаемости и обращается в нуль,

$$\frac{u_r}{r} + \frac{du_r}{dr} + \frac{u_r}{r} \frac{du_r}{dr} = 0, \quad (6)$$

откуда следует зависимость перемещений для несжимаемого материала при больших деформациях

$$u_r^{\text{big}} = \sqrt{r^2 + u_b^2 + 2u_b(b + u_b)} - r. \quad (7)$$



Линеаризация (7) при  $u_b \ll b$  приводит к общеизвестной зависимости для перемещений при малых деформациях

$$u_r^{\text{small}} = \frac{(b + u_b)u_b}{r}. \quad (8)$$

Зависимость  $u_r^{\text{small}}(r)$  следует также из решения дифференциального уравнения (6) при  $\varepsilon_\theta \varepsilon_r = 0$ . Допустимость применения зависимости  $u_r^{\text{small}}(r)$  определяется величиной квадратичного слагаемого (6)

$$\frac{u_r}{r} \frac{du_r}{dr} = \varepsilon_\theta \varepsilon_r.$$

При  $\varepsilon_\theta \varepsilon_r \leq 0,05$  деформации следует считать малыми и допускается использовать зависимость  $u_r^{\text{small}}(r)$ . При  $\varepsilon_\theta \varepsilon_r > 0,05$  следует деформации считать большими и использовать зависимость  $u_r^{\text{big}}(r)$ .

При  $u_r \ll r$  и  $\rho \ll r$  из выражения (2) следует зависимость между пористостью и разностью перемещений несжимаемого материала и материала с эволюцией пористости

$$\omega = \frac{d\rho}{dr},$$

откуда находим разность между этими перемещениями

$$\rho = \int_{a+u_a^\omega}^r \omega dR + u_a^\omega - u_a. \quad (9)$$

Таким образом, система (1), (5), (7) (или (8)) и (9) замкнута и определяет  $u_r^\omega(r)$ .

#### 4. Пример решения

Построим графики и сравним перемещения (7) и (8), деформации Коши, а также установим влияние пористости на деформации и напряжения. С этой целью зададим следующие параметры: в недеформированном состоянии  $a = 20$  и  $b = 30$  мм, в деформированном состоянии  $u_b = 3$  мм (этому значению соответствует  $u_a = 4,27$  мм), для материала с эволюцией пористости  $\omega^s = 0,05$  (этому значению соответствует  $u_a^\omega = 3.75$  мм).

На рис. 2 приведены зависимости деформаций Коши, вычисленные для перемещений (7) и (8), откуда можно видеть, что  $\varepsilon_\theta^{\text{small}}$  и  $\varepsilon_\theta^{\text{big}}$  почти не различаются, а  $\varepsilon_r^{\text{small}}$  и  $\varepsilon_r^{\text{big}}$  заметно различаются, где  $\varepsilon_\theta^{\text{small}} = \frac{u_r^{\text{small}}}{r}$  и  $\varepsilon_r^{\text{small}} = \frac{du_r^{\text{small}}}{dr}$ ,  $\varepsilon_\theta^{\text{big}} = \frac{u_r^{\text{big}}}{r}$  и  $\varepsilon_r^{\text{big}} = \frac{du_r^{\text{big}}}{dr}$ .

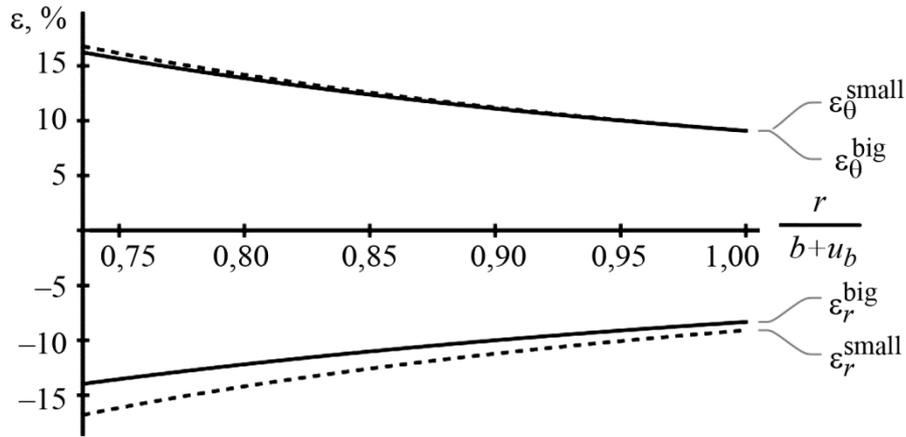


Рис. 2. Деформации Коши, вычисленные для перемещений (7) и (8)

На рис. 3 приведены зависимости безразмерных перемещений в несжимаемом и пористом материалах, откуда можно видеть, что пористость приводит к заметному уменьшению перемещений.

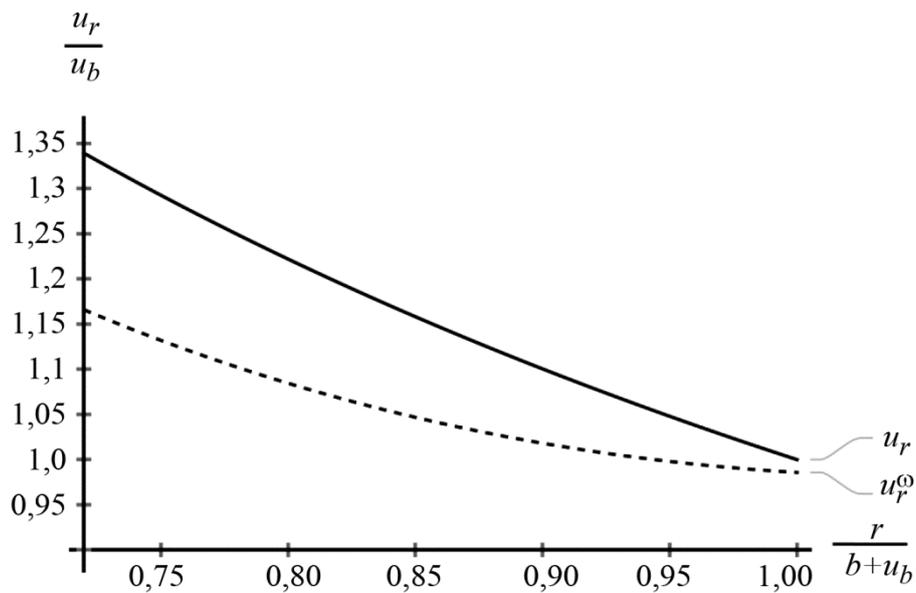


Рис. 3. Перемещения в несжимаемом и пористом материалах

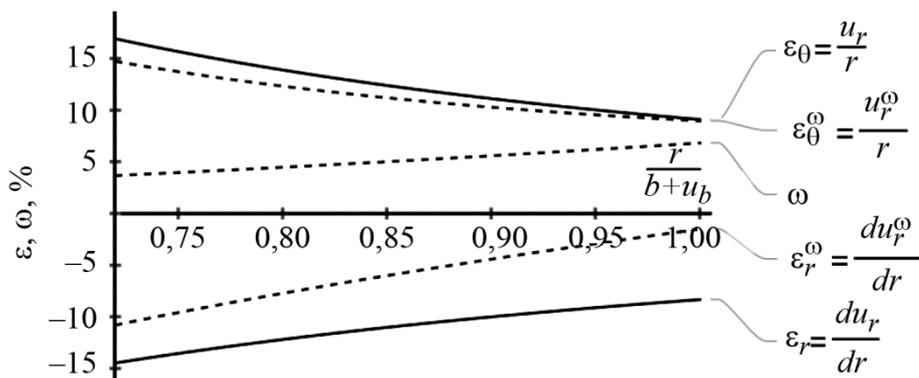


Рис. 4. Пористость и деформации Коши в несжимаемом и пористом материалах



На рис. 4 приведены зависимости пористости и деформаций Коши, откуда можно видеть, что пористость возрастает и приводит к заметному уменьшению радиальных деформаций (по абсолютной величине); вместе с этим влияние пористости на окружные деформации не так заметно.

### 5. Напряжения

Для несжимаемого материала напряжения принимают вид [6]

$$\sigma_{\theta} = \frac{P}{(b+u_b)^{-\frac{2}{n}} - (a+u_a)^{-\frac{2}{n}}} \left[ \left(1 - \frac{2}{n}\right) r^{-\frac{2}{n}} - (b+u_b)^{-\frac{2}{n}} \right]$$

$$\sigma_z = \frac{P}{(b+u_b)^{-\frac{2}{n}} - (a+u_a)^{-\frac{2}{n}}} \left[ \left(1 - \frac{1}{n}\right) r^{-\frac{2}{n}} - (b+u_b)^{-\frac{2}{n}} \right]$$

$$\sigma_r = \frac{P}{(b+u_b)^{-\frac{2}{n}} - (a+u_a)^{-\frac{2}{n}}} \left[ r^{-\frac{2}{n}} - (b+u_b)^{-\frac{2}{n}} \right],$$

где  $n$  – материальный параметр, зависящий от марки сплава и температуры;  $p$  – внутреннее давление.

Для материала с эволюцией пористости рассмотрим эффективные напряжения [10]

$$\sigma^{\omega} = \frac{\sigma}{1-\omega}.$$

В качестве примера используем материальный параметр  $n = 2,1$  и предел кратковременной прочности  $\sigma_{\text{break}} = 180$  МПа, которые описывают ползучесть титанового сплава ВТ6 при  $650$  °С [12]. С этой целью построим зависимости напряжений  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_z$  и  $\sigma_r$  при  $p = \frac{\sigma_{\text{break}}}{5} = 36$  МПа.

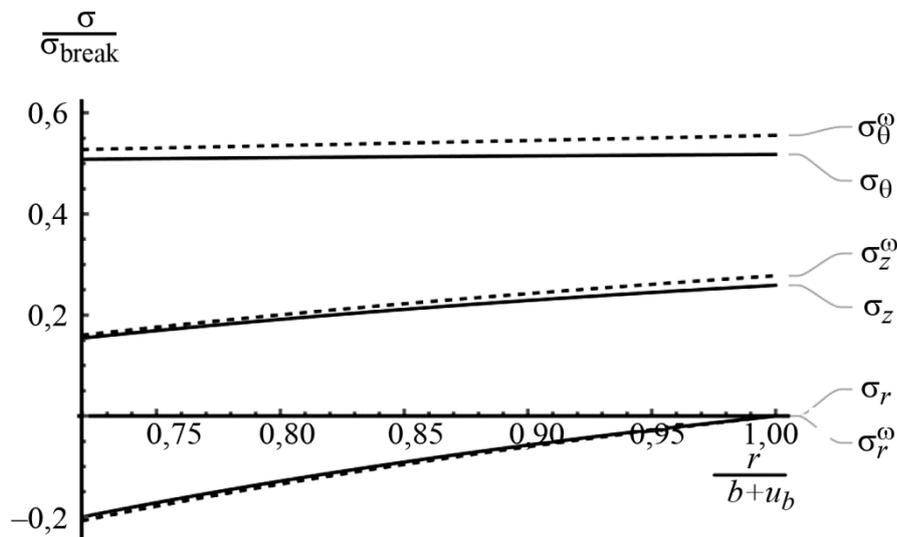


Рис. 5. Безразмерные напряжения для несжимаемого титанового сплава ВТ6 и пористого при  $650$  °С под воздействием  $p = 36$  МПа

На рис. 5 приведены зависимости безразмерных напряжений, откуда можно видеть, что все три напряжения возрастают и на внешнем граничном радиусе достигают своих наибольших значений. При этом выполняется неравенство  $\sigma_{\theta} > \sigma_z > \sigma_r$ , где  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_z$  – растяги-



вающие напряжения,  $\sigma_r$  – сжимающие напряжения; вместе с этим влияние пористости на эти напряжения не так заметно.

## 6. Заключение

Сравнение перемещений и деформаций ползучести несжимаемого материала и материала с эволюцией пористости показало, что пористость приводит к заметному уменьшению перемещений и радиальных деформаций (по абсолютной величине) и не оказывает значительного влияния на напряжения. Вместе с тем, сравнение деформаций Коши, вычисленных для перемещений (7) и (8), показало, что наиболее чувствительны к зависимости перемещений радиальные деформации, для описания которых следует использовать либо зависимость (7) в области больших деформаций, либо зависимость (8) в области малых деформаций.

## Литература

1. Bailey R. W. Creep relationships and their application to pipes, tubes, and cylindrical parts under internal pressure // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. – 1951. – Vol. 164, No. 1. – P. 425–431. – DOI: 10.1243/PIME\_PROC\_1951\_164\_046\_02.
2. Weir C. D. The creep of thick tubes under internal pressure // *Journal of Applied Mechanics*. – 1957. – Vol. 24, No. 3. – P. 464–466. – DOI: 10.1115/1.4011565.
3. Rimrott F. P. J. Creep of thick-walled tubes under internal pressure considering large strains // *Journal of Applied Mechanics*. – 1959. – Vol. 26, No. 2. – P. 271–275. – DOI: 10.1115/1.4011994.
4. King R. H., Mackie W. W. Creep of thick-walled cylinders // *ASME. Journal Basic Engineering*. – 1967. – Vol. 89, No. 4. – P. 877–884.
5. Pai D. H. Steady state creep analysis of thick-walled orthotropic cylinders // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 1967. – Vol. 9, No. 6. – P. 335–348. – DOI: 10.1016/0020-7403(67)90039-2.
6. Bhatnagar N. S., Gupta S. K. Analysis of thick-walled orthotropic cylinder in the theory of creep // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 1969. – Vol. 27, No. 6. – P. 1655–1661. – DOI: 10.1143/JPSJ.27.1655.
7. Bhatnagar N. S., Arya V. K. Large strain creep analysis of thick-walled cylinders // *International Journal of Non-Linear Mechanics*. – 1974. – Vol. 9, iss. 2. – P. 127–140. – DOI: 10.1016/0020-7462(74)90004-3.
8. Microstructural evolution of nuclear power steel A508–III in the creep process at 800 °C / Z. G. Xie, Y. M. He, J. G. Yang, Z. L. Gao // *Applied Mechanics and Materials*. – 2017. – Vol. 853. – P. 153–157. – DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMM.853.153.
9. Formation and evolution of porosity during high temperature creep of a nickel-based single crystal super alloy / W. Liu, Y. Guo, M. Zhang, J. Zhang // *E3S Web of Conferences*. – 2020. – Vol. 155. – P. 01005. – DOI: 10.1051/e3sconf/202015501005.
10. Leckie F. A., Hayhurst D. R. Constitutive equations for creep rupture // *Acta Metallurgica*. – 1977. – Vol. 25, No. 9. – P. 1059–1070. – DOI: 10.1016/0001-6160(77)90135-3.
11. Morris R. E. Creep-rupture data for welded N–155 tubes // *NASA Technical Note*. – D-5195. – 1969.
12. Nazarov V. V. Selecting a dependence for the approximation of experimental data on secondary creep and creep rupture strength // *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*. – 2023. – Iss. 3. – P. 44–49. – DOI: 10.17804/2410-9908.2023.3.044-049. – URL: [https://dream-journal.org/DREAM\\_Issue\\_3\\_2023\\_Nazarov\\_V.V.\\_044\\_049.pdf](https://dream-journal.org/DREAM_Issue_3_2023_Nazarov_V.V._044_049.pdf)