

**Received:** 10.04.2024

**Revised:** 11.06.2024



**Accepted:** 16.08.2024

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2024.4.047-056

## NUMERICAL ANALYSIS OF DEFORMATION UNDER COMPRESSION OF STRUCTURES BASED ON TRIPLY PERIODIC MINIMAL SURFACES

M. P. Varygina

*Krasnoyarsk Branch of the Federal Research Center for Information and Computational Technologies,  
53 Mira Ave., Krasnoyarsk, 660049, Russia*

 <https://orcid.org/0000-0002-5198-4893>  [vmp@ict.nsc.ru](mailto:vmp@ict.nsc.ru)

Email: [vmp@ict.nsc.ru](mailto:vmp@ict.nsc.ru)

Address for corresponding: пр-т Мира, 53, Красноярск, 660049, Россия

Tel.: +7 (391) 227-2912

Complex porous structures based on triply periodic minimal surfaces with high values of specific physical and mechanical characteristics are increasingly used in many industries. Numerical analysis is of great importance in evaluating the load-carrying capacity and mechanical behavior of such structures. The paper presents the results of finite element analysis of the stress-strained state of structures composed of triply periodic minimal surfaces and affected by compressive loading. The complexity of simulating the response of such structures to mechanical effects lies in the large dimension of the problem due to the need for fine discretization required for an adequate representation of the complex geometry of the model. The stages of constructing facet geometry for the construction of numerical models are shown. The effect of the type and parameters of these structures on their mechanical behavior under compression is exemplified by Schoen IWP surfaces and Schwarz primitives. Stiffness efficiency depending on the structure topology is analyzed.

**Keywords:** triply periodic minimal surfaces, finite element model, Schwarz primitive, Schoen IWP, stress-strain state

### References

1. Feng, J., Fu, J., Yao, X., and He, Y. Triply periodic minimal surface (TPMS) porous structures from multi-scale design, precise additive manufacturing to multidisciplinary applications. *International Journal of Extreme Manufacturing*, 2022, 4, 022001. DOI: 10.1088/2631-7990/ac5be6.
2. Gado, M.G., Al-Ketan, O., Aziz, M., Al-Rub, R.A., and Ookawara, S. Triply periodic minimal surface structures: design, fabrication, 3D printing techniques, state-of-the-art studies, and prospective thermal applications for efficient energy utilization. *Energy Technology*, 2024, 2301287. DOI: 10.1002/ente.202301287.
3. Schwarz, H.A. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1890, 358 p.
4. Schoen, A.H. *Infinite Periodic Minimal Surfaces Without Self-Intersections*, DC NASA, Washington, 1970, 92 p.
5. Jones, A., Leary, M., Bateman, S., and Easton, M. Investigating mechanical properties of additively manufactured multimaterial gyroids: the effect of proportion, scale and shape. *Additive Manufacturing*, 2023, 76, 103784. DOI: 10.1016/j.addma.2023.103784.
6. Ramírez, E.A., Béraud, N., Pourroy, F., Villeneuve, F., and Museau, M. Design parameters effects on relative density of triply periodic minimal surfaces for additive manufacturing. *Procedia CIRP*, 2021, 100, 13–18. DOI: 10.1016/j.procir.2021.05.002.

7. Jones, A., Leary, M., Bateman, S., and Easton, M. Parametric design and evaluation of TPMS-like cellular solids. *Materials & Design*, 2022, 221, 110908. DOI: 10.1016/j.matdes.2022.110908.
8. Jones, A., Leary, M., Bateman, S., and Easton, M. A review of recent investigations on flow and heat transfer enhancement in cooling channels embedded with triply periodic minimal surfaces (TPMS). *Software Impacts*, 2021, 10, 100167. DOI: 10.3390/en15238994.
9. Eremin, A.V., Zinina, S.A., and Johnson, O.O. Investigation of heat transfer in a porous material. *Vestnik Yugorskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, 2023, 1 (68), 60–66. (In Russian). DOI: 10.18822/byusu20230160-66.
10. Wang, E., Yao, R., Li, Q., Hu, X., and Sun, G. Lightweight metallic cellular materials: a systematic review on mechanical characteristics and engineering applications. *International Journal of Mechanical Sciences*, 2024, 270, 108795. DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2023.108795.
11. Dadashi, A. and Rahimi, G. A comprehensive investigation of the lattice structure mechanical properties based on Schwarz primitive triply periodic minimal surface: elastic modulus, yield strength, and maximum bearing force in the elastic region. *International Journal of Solids and Structures*, 2024, 295, 112776. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.112776.
12. Hsieh, M.-T. and Valdevit, L. Minisurf – a minimal surface generator for finite element modeling and additive manufacturing. *Software Impacts*, 2020, 6, 100026. DOI: 10.1016/j.simpa.2020.100026.
13. Jones, A., Leary, M., Bateman, S., and Easton, M. TPMS Designer: a tool for generating and analyzing triply periodic minimal surfaces. *Software Impacts*, 2021, 10, 100167. DOI: 10.1016/j.simpa.2021.100167.
14. Alketan, O. and Al-Rub, R.A. MSLattice: A free software for generating uniform and graded lattices based on triply periodic minimal surfaces. *Material Design & Processing Communications*, 2020, 3 (2). DOI: 10.1002/mdp2.205.
15. Raju, S.K.K. and Onkar, P.S. Lattice\_Karak: Lattice structure generator for tissue engineering, lightweighting and heat exchanger applications. *Software Impacts*, 2022, 14, 100425. DOI: 10.1016/j.simpa.2022.100425.

Подана в журнал: 10.04.2024



УДК 539.32

DOI: 10.17804/2410-9908.2024.4.047-056

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРИ СЖАТИИ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ ТРИЖДЫ ПЕРИОДИЧЕСКИХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

М. П. Варыгина

*Красноярский филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения  
«Федеральный исследовательский центр информационных и вычислительных технологий»,  
пр-т Мира, 53, Красноярск, 660049, Россия*

 <https://orcid.org/0000-0002-5198-4893>  [vmp@ict.nsc.ru](mailto:vmp@ict.nsc.ru)

Электронная почта: [vmp@ict.nsc.ru](mailto:vmp@ict.nsc.ru)

Адрес для переписки: пр-т Мира, 53, Красноярск, 660049, Россия

Тел.: +7 (391) 227-29-12

Сложные пористые структуры, основанные на трижды периодических минимальных поверхностях, обладающие высокими удельными показателями физико-механических характеристик, находят все более широкое применение во многих отраслях промышленности. Численный анализ имеет большое значение при оценке несущей способности и механического поведения таких структур. В работе представлены результаты конечно-элементного анализа напряженно-деформированного состояния структур, составленных из трижды периодических минимальных поверхностей, под действием сжимающей нагрузки. Сложность моделирования отклика таких структур на механическое воздействие заключается в большой размерности задачи, обусловленной необходимостью мелкой дискретизации, требуемой для адекватного представления сложной геометрии модели. Показаны этапы построения фасетной геометрии для формирования численных моделей. На примере поверхностей Шёна IWP и примитивов Шварца рассмотрено влияние типа и параметров данных структур на их механическое поведение при сжатии. Выполнен анализ жесткостной эффективности в зависимости от топологии структур.

**Ключевые слова:** трижды периодические минимальные поверхности, конечно-элементная модель, примитивы Шварца, поверхности Шёна, напряженно-деформированное состояние

### 1. Введение

Достижения в развитии технологий аддитивного производства позволяют проектировать и изготавливать сложные пористые структуры с контролируемой геометрией и заданными механическими свойствами на макро-, мезо- и микроуровнях [1, 2]. Среди них выделяют материалы и конструкции на основе трижды периодических минимальных поверхностей (ТПМП) характеризующихся регулярно повторяющимися элементарными ячейками, представляющими собой поверхности с нулевой средней кривизной [3, 4]. Трижды периодические минимальные поверхности являются бесконечными, периодическими и не имеют пересечений в трехмерном евклидовом пространстве. Первым примером ТПМП была минимальная поверхность Шварца, открытая в 1865 году [3]. Почти сто лет спустя А. Шён в работе [4] представил множество типов минимальных поверхностей.

По сравнению с другими видами пористых структур, ТПМП обладают рядом преимуществ, так как их геометрия может быть точно выражена математическими функциями. Регулируя параметры функции, можно контролировать основные характеристики, такие как пористость или удельная площадь поверхности [5–8]. Кроме того, ТПМП ладкие, без острых

краев и стыков, в отличие от решетчатых структур, что позволяет избежать концентрации напряжений, вызванной резкими изменениями в геометрии.

Благодаря таким свойствам, как пористость, высокие удельные показатели физико-механических характеристик, исключительная способность поглощать энергию и легкость адаптации для разнообразных приложений, различные топологии таких структур находят все более широкое применение во многих отраслях промышленности для механического демпфирования, контроля вибрации, звукоизоляции, улучшения тепловых характеристик каналов охлаждения [9–11].

В последнее время активно разрабатываются различные инструменты проектирования, упрощающие построение геометрически сложных конструкций [12–15]. Самый простой инструмент MiniSurf [12] позволяет визуализировать основные типы элементарных ячеек и экспортировать только поверхность. TPMS Designer [13] – графический пользовательский интерфейс, позволяющий создавать структуры с контролируемым размером, масштабом, вращением ячеек. Расширенным функционалом обладают инструменты MSLattice [14] и Lattice\_Karak [15], позволяющие проводить гибридизацию ячеек (объединение нескольких различных типов структур ТППП), создавать иерархические структуры, изменять пористость и плотность структуры. Обычно создание первоначальной фасетной геометрии в программах для проектирования ТППП выполняется с помощью алгоритма триангуляции Делоне, который может приводить к образованию множества мельчайших фасет с острыми углами. Поэтому для получения качественной конечно-элементной сетки требуется проводить регуляризацию фасетной геометрии.

Проектирование структур ТППП, соответствующих требованиям конкретных приложений, требует интеграции геометрического моделирования, численного анализа и оптимизации топологии. Численный анализ играет решающую роль в этой системе, особенно при оценке несущей способности и механического поведения конструкций.


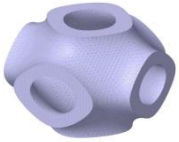
Цель данной работы заключается в конечно-элементном анализе влияния топологии и геометрических параметров на механическое поведение структур ТППП под действием сжимающей нагрузки и определении их жесткостной эффективности.

## 2. Постановка задачи и методы решения

В настоящее время существует около 45 видов минимальных поверхностей, среди них выделяют поверхности Шёна IWP (Schoen I-graph-Wrapped-Packages) и примитивы Шварца (Schwarz Primitives). Уравнения этих трижды периодических минимальных поверхностей состоят из тригонометрических функций и определяются согласно табл. 1.

Таблица 1

Математические уравнения трижды периодических минимальных поверхностей

Вид	Уравнение	Структура
Поверхность Шёна IWP	$2 \left( \cos \frac{2\pi x}{\alpha} \cos \frac{2\pi y}{\beta} + \cos \frac{2\pi y}{\beta} \cos \frac{2\pi z}{\gamma} + \cos \frac{2\pi x}{\alpha} \cos \frac{2\pi z}{\gamma} - \left( \cos \frac{4\pi x}{\alpha} + \cos \frac{4\pi y}{\beta} + \cos \frac{4\pi z}{\gamma} \right) \right) = c$	
Примитив Шварца	$\cos \frac{2\pi x}{\alpha} + \cos \frac{2\pi y}{\beta} + \cos \frac{2\pi z}{\gamma} = c$	

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  – константы, связанные с размером единичной ячейки в направлении декартовых координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  соответственно,  $c$  – параметр, характеризующий отношение толщины к относительной плотности структуры. Меньшему значению параметра  $c$  соответствует меньшая толщина стенки элементарной ячейки.

На рис. 1 представлены этапы построения фасетной геометрии на примере поверхности Шёна IWP. На первом этапе минимальные поверхности с выбранными геометрическими параметрами в виде STL-файлов импортируются в программное обеспечение SpaceClaim. В силу симметрии структуры достаточно построить 1/8 часть элементарной ячейки. Из-за особенностей построения геометрии возникают участки «плохих» фасет с экстремально острыми углами, как показано стрелками на увеличенном изображении (рис. 1 а). Такие области необходимо изменить перед созданием конечно-элементной сетки для исключения возникновения концентрации напряжений. На рис. 1 б показана фасетная геометрия после этапа регуляризации. Отклонение поверхности на сетке с размером ячейки 0,5 мм после регуляризации составляет 0,03–0,06 мм. Затем с помощью отражения в трех направлениях достраивается элементарная ячейка (рис. 1 в). На последнем этапе строится структура, образуемая копированием нескольких элементарных ячеек в трех направлениях (рис. 1 г).

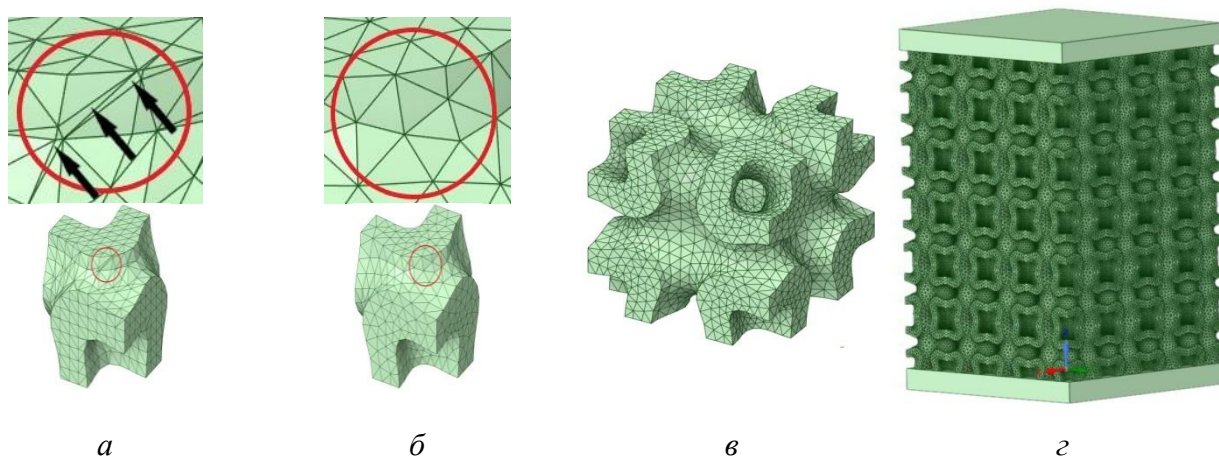


Рис. 1. Этапы построения фасетной геометрии: импорт STL-файла 1/8 части элементарной ячейки (а); регуляризация геометрии (б); построение элементарной ячейки (в); построение структуры, составленной из элементарных ячеек (г)

Для численного анализа средствами пакета прикладных программ Ansys построены конечно-элементные модели структур поверхностей Шёна IWP и примитивов Шварца, геометрические параметры которых приведены в табл. 2. Отметим, что напряженно-деформированное состояние рассмотренных структур можно охарактеризовать на основе расчетов только элементарной ячейки. Однако в данной работе использовались образцы, состоящие из нескольких ячеек, чтобы иметь возможность валидации численного анализа с результатами планируемых экспериментальных исследований.

На рис. 2 представлены конечно-элементные модели структур, составленных из элементарных ячеек поверхностей Шёна IWP и примитивов Шварца, зажатых между двумя пластинами. Размер элементарной ячейки составляет  $20 \times 20 \times 20 \text{ мм}^3$ , параметр  $\alpha = 20$  при минимальном параметре  $c$ . Толщина пластин – 4 мм. Нижняя пластина зафиксирована. На верхнюю пластину действует распределенная сила в 96215 Н для поверхности Шёна IWP и 28000 Н для примитивов Шварца, разбитая на 5 этапов нагружения.

Для описания механического поведения структур выбрана модель упругого материала с параметрами, близкими к параметрам фотополимерной смолы, определенным

экспериментально: модуль Юнга  $E = 1943$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,43$ , плотность  $\rho = 1,184$  г/см<sup>3</sup>.

Таблица 2

Геометрические параметры структур

Тип структуры			IWP		Примитив	
Параметр $\alpha = \beta = \gamma$	Размер элементарной ячейки, мм <sup>3</sup>	Число элементарных ячеек	Параметр $c$	Объем структуры, мм <sup>3</sup>	Параметр $c$	Объем структуры, мм <sup>3</sup>
10	$10 \times 10 \times 10$	$4 \times 4 \times 6$	1,6	41486	0,5	27459
			1,8	47430	0,6	33417
			2,0	53409	0,7	39099
20	$20 \times 20 \times 20$	$2 \times 2 \times 3$	1,6	41258	0,5	27463
			1,8	46720	0,6	33068
			2,0	52310	0,7	38659

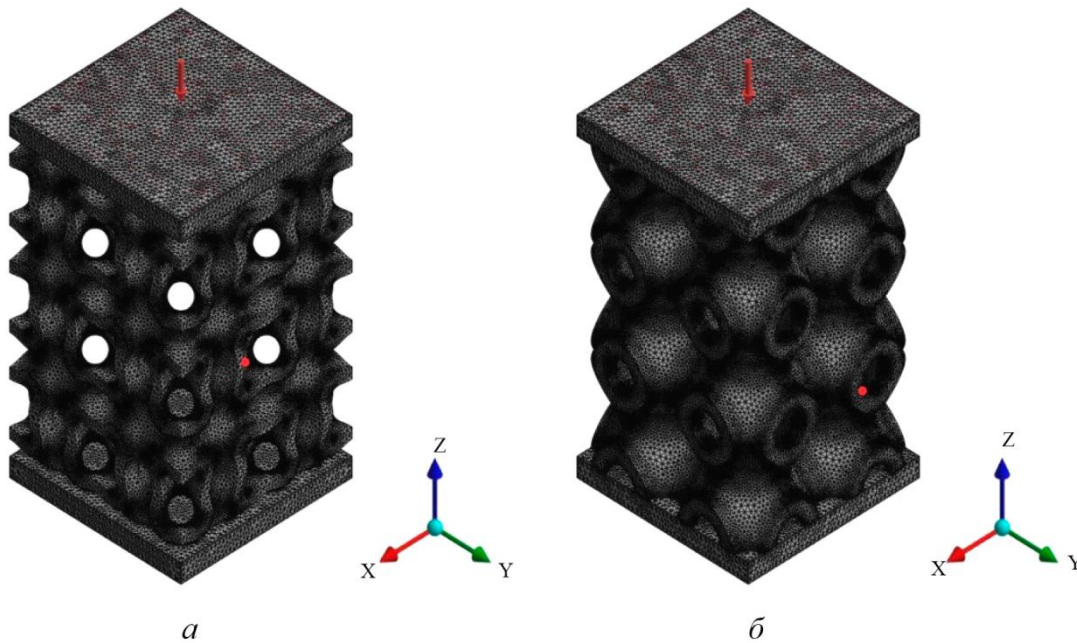


Рис. 2. Конечно-элементная модель структур ТПМП: поверхность Шёна IWP (а); примитив Шварца (б)

### 3. Результаты и обсуждение

Ниже приведены результаты расчетов для структур ТПМП, основанных на поверхности Шёна IWP при  $\alpha = 20$ ,  $c = 1,6$  и примитиве Шварца при  $\alpha = 20$ ,  $c = 0,5$ , которые отражают общий характер деформирования для соответствующего типа структуры. На рис. 3 представлены поля деформаций рассмотренных структур, направленные по оси приложения нагрузки (нижний ряд) и перпендикулярно этой оси (верхний ряд). Представлены центральные части при перемещении верхней пластины на 3 мм.

Для обоих типов структур ТПМП максимальные растягивающие деформации возникают на краях отверстий. При этом их наибольшие значения наблюдаются для структуры на основе примитива Шварца. Максимальные деформации сжатия действуют на горизонтальных стенках элементарной ячейки структуры поверхности Шёна за счет возникновения изгиба.

Также повышенный уровень сжимающих деформаций для всех типов структур достигается на границах между элементарными ячейками в местах с наименьшей площадью сечения.

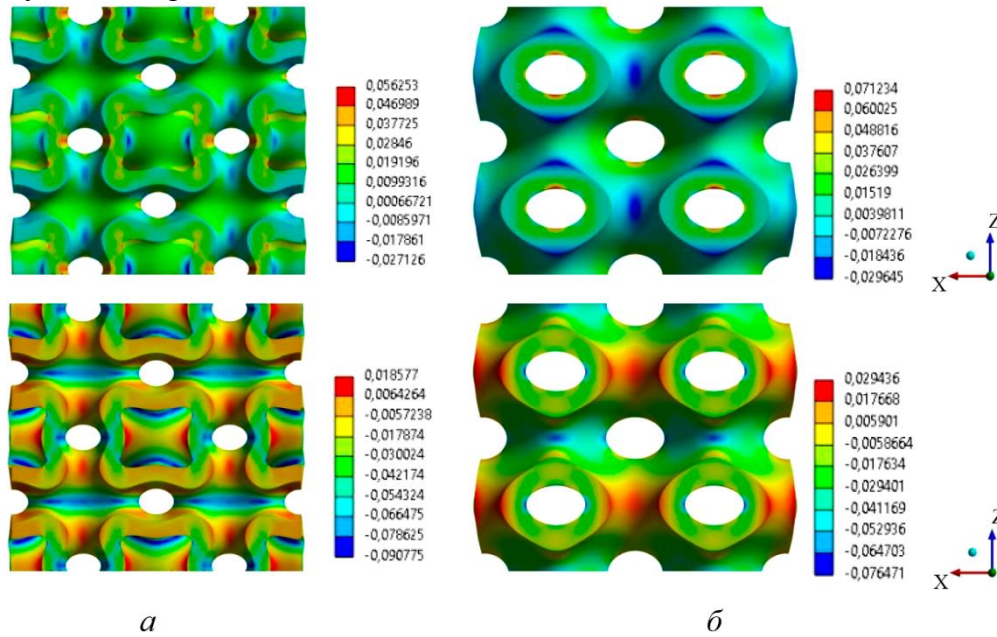


Рис. 3. Распределение деформаций структур в направлении осей  $X$  и  $Z$ : поверхность Шёна IWP (а); примитив Шварца (б)

На рис. 4 изображено распределение эквивалентных напряжений Мизеса для рассмотренных структур. Для структуры Шёна их максимальные значения достигаются в местах примыкания горизонтальных стенок к внутренней области элементарной ячейки. Для примитивов Шварца максимальные напряжения действуют на границах отверстий. Более высокие значения напряжений, характерные для структуры Шёна, свидетельствуют о ее большей жесткости по сравнению со структурой Шварца.

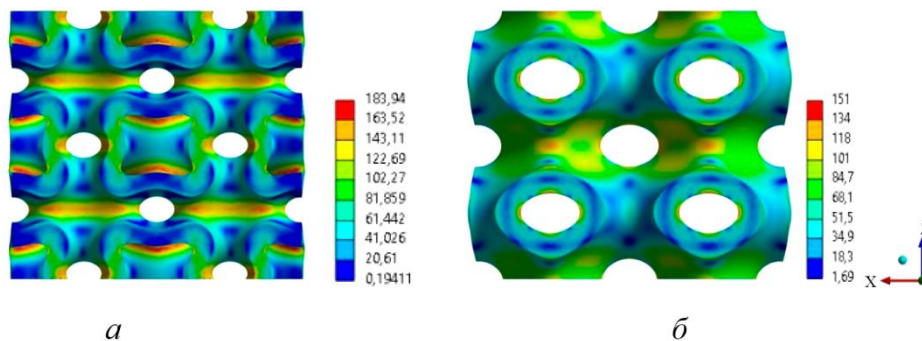


Рис. 4. Поля эквивалентных напряжений Мизеса: поверхность Шёна IWP (а); примитив Шварца (б)

На рис. 5 представлены зависимости вертикального перемещения контрольной точки от приложенной нагрузки для различных вариаций параметров структур Шёна IWP и примитивов Шварца (табл. 2) под действием сжимающей нагрузки вдоль оси  $Z$ . Контрольные точки расположены в центре внутренней границы вертикальной стенки элементарной ячейки (рис. 2). Согласно полученным результатам, среди структур Шёна IWP образец с параметрами  $\alpha = 10$  и  $c = 2,0$  является наиболее жестким, а образец с параметрами  $\alpha = 20$  и  $c = 1,6$  – наиболее податливым. Это говорит о том, что наибольший вклад в жесткостные характеристики для образцов с одним и тем же размером элементарной ячейки вносит параметр  $c$ , ха-

рактически характеризующий толщину стенки. Среди структур, составленных из примитивов Шварца, образец с наибольшими значениями геометрических параметров ячейки ( $\alpha = 20, c = 0,7$ ) обладает наибольшей жесткостью, а образец с наименьшими значениями этих параметров ( $\alpha = 10, c = 0,5$ ) – наибольшей податливостью. В отличие от структур Шёна, увеличение размера элементарной ячейки ведет к увеличению жесткости образца.

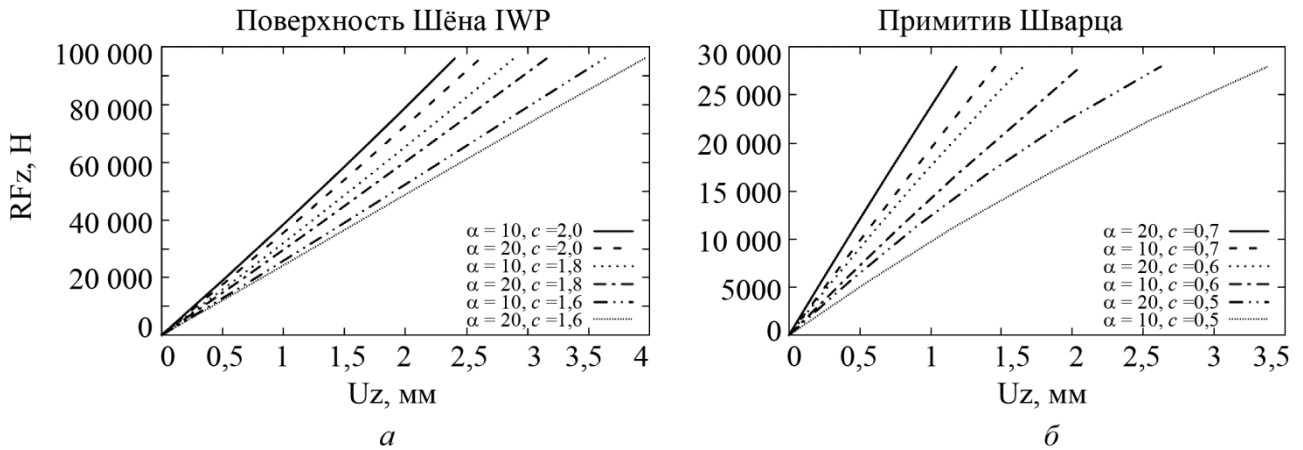


Рис. 5. Диаграммы «сила – перемещение» при различных параметрах: поверхность Шёна IWP (а); примитив Шварца (б)

Для оценки эффективности различных структур с вариацией параметров можно ввести коэффициент, характеризующий удельную жесткость структуры, который определяется как отношение силы к произведению перемещения на массу структуры (рис. 6). Согласно полученным результатам, максимальное значение коэффициента жесткостной эффективности достигается для структуры Шёна IWP при  $\alpha = 10$  и  $c = 2,0$ . Отметим, что значение этого показателя для наиболее жесткого примитива Шварца практически совпадает с наиболее податливой структурой на основе поверхности Шёна.

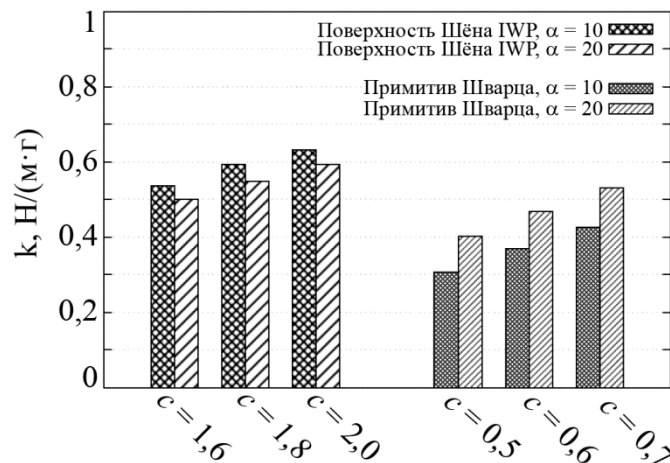


Рис. 6. Коэффициент жесткостной эффективности для поверхностей Шёна IWP и примитивов Шварца

#### 4. Заключение

Результаты численного моделирования минимальных трижды периодических поверхностей свидетельствуют о выраженной зависимости их жесткости при сжатии от типа, геометрических параметров и размера элементарной ячейки. С уменьшением размера элемен-



тарной ячейки структура на основе поверхностей Шёна IWP становится более жесткой, тогда как для примитивов Шварца жесткость находится в прямой зависимости от размера элементарной ячейки. При этом структуры IWP являются более жесткими на единицу массы по сравнению с примитивами Шварца. Результаты численного моделирования могут быть использованы для принятия решения о выборе конфигурации структуры ТПМП, соответствующей заданным механическим характеристикам.

## Литература

1. Triply periodic minimal surface (TPMS) porous structures from multi-scale design, precise additive manufacturing to multidisciplinary applications / J. Feng, J. Fu, X. Yao, Y. He // *International Journal of Extreme Manufacturing*. – 2022. – Vol. 4. – P. 022001. – DOI: 10.1088/2631-7990/ac5be6.
2. Triply periodic minimal surface structures: design, fabrication, 3D printing techniques, state-of-the-art studies, and prospective thermal applications for efficient energy utilization / M. G. Gado, O. Al-Ketan, M. Aziz, R. A. Al-Rub, S. Ookawara // *Energy Technology*. – 2024. – 2301287. – DOI: 10.1002/ente.202301287.
3. Schwarz H. A. *Gesammelte Mathematische Abhandlungen*. – Berlin, Heidelberg : Springer, 1890. – 358 p.
4. Schoen A. H. *Infinite Periodic Minimal Surfaces without Self-Intersections*. – Washington : DC NASA, 1970. – 92 p.
5. Investigating mechanical properties of additively manufactured multimaterial gyroids: the effect of proportion, scale and shape / A. Jones, M. Leary, S. Bateman, M. Easton // *Additive Manufacturing*. – 2023. – Vol. 76. – P. 103784. – DOI: 10.1016/j.addma.2023.103784.
6. Design parameters effects on relative density of triply periodic minimal surfaces for additive manufacturing / E. A. Ramírez, N. Béraud, F. Pourroy, F. Villeneuve, M. Museau // *Procedia CIRP*. – 2021. – Vol. 100. – P. 13–18. – DOI: 10.1016/j.procir.2021.05.002.
7. Parametric design and evaluation of TPMS-like cellular solids / A. Jones, M. Leary, S. Bateman, M. Easton // *Materials & Design*. – 2022. – Vol. 221. – P. 110908. – DOI: 10.1016/j.matdes.2022.110908.
8. A review of recent investigations on flow and heat transfer enhancement in cooling channels embedded with triply periodic minimal surfaces (TPMS) / A. Jones, M. Leary, S. Bateman, M. Easton // *Software Impacts*. – 2021. – Vol. 10. – P. 100167. – DOI: 10.3390/en15238994.
9. Еремин А. В., Зинина С. А., Джонсон О. О. Исследование теплопереноса в пористом материале на основе трижды периодических поверхностей минимальной энергии // *Вестник Югорского государственного университета*. – 2023. – Т. 1 (68). – С. 60–66. – DOI: 10.18822/byusu20230160-66.
10. Lightweight metallic cellular materials: a systematic review on mechanical characteristics and engineering applications / E. Wang, R. Yao, Q. Li, X. Hu, G. Sun // *International Journal of Mechanical Sciences*. – 2024. – Vol. 270. – P. 108795. – DOI: 10.1016/j.ijmecsci.2023.108795.
11. Dadashi A., Rahimi G. A comprehensive investigation of the lattice structure mechanical properties based on Schwarz primitive triply periodic minimal surface: elastic modulus, yield strength, and maximum bearing force in the elastic region // *International Journal of Solids and Structures*. – 2024. – Vol. 295. – P. 112776. – DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2024.112776.
12. Hsieh M.-T., Valdevit L. Minisurf – a minimal surface generator for finite element modeling and additive manufacturing // *Software Impacts*. – 2020. – Vol. 6. – P. 100026. – DOI: 10.1016/j.simpa.2020.100026.
13. TPMS Designer: a tool for generating and analyzing triply periodic minimal surfaces / A. Jones, M. Leary, S. Bateman, M. Easton // *Software Impacts*. – 2021. – Vol. 10. – P. 100167. – DOI: 10.1016/j.simpa.2021.100167.

14. Alketan O., Al-Rub R. A. MSLattice: a free software for generating uniform and graded lattices based on triply periodic minimal surfaces // Material Design & Processing Communications. – 2020. – Vol. 3 (2). – DOI: 10.1002/mdp2.205.
15. Raju S. K. K., Onkar P. S. Lattice\_Karak: lattice structure generator for tissue engineering, lightweighting and heat exchanger applications // Software Impacts. – 2022. – Vol. 14. – P. 100425. – DOI: 10.1016/j.simpa.2022.100425.