

Received: 17.06.2022

Revised: 19.07.2022

Accepted: 26.08.2022

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.061-080

AN ANALYTICAL AND NUMERICAL STUDY OF FREE BOUNDARY DYNAMICS FOR AN ISOLATED MASS OF A SELF-GRAVITATING GAS

A. L. Kazakov^{1, 2, a)}, L. F. Spevak^{1, b)*}, and N. P. Chuev^{3, c)}

¹*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

²*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, 134 Lermontova St., Irkutsk, 664033, Russian Federation*

³*Ural State University of Railway Transport, 66 Kolmogorova St., Ekaterinburg, 620034, Russian Federation*

a)  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  kazakov@icc.ru;

b)  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  lfs@imach.uran.ru;

c)  chuev44@mail.ru

*Corresponding author. E-mail: lfs@imach.uran.ru

Address for correspondence: ul. Komsomolskaya, 34, Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7 (343) 362 30 22; fax: +7 (343) 374 53 30

The paper considers an evolution of the free boundary of a finite volume of a self-gravitating ideal gas moving in the vacuum. Unsteady flows are described by a phenomenological mathematical model, which has the form of a system of nonlinear Volterra integro-differential equations written in Eulerian coordinates. The gas volume moves in a force field generated by the Newtonian potential in general form. The boundary conditions are specified on the free gas-vacuum boundary, which is a priori unknown and determined simultaneously with gas flow construction. Conversion to Lagrangian coordinates allows us to reduce the original problem to an equivalent one, which consists of Volterra integral equations and the continuity equation in Lagrangian form, with Cauchy conditions specified for all these equations. Therefore, the application of Lagrangian coordinates makes it possible, in particular, to eliminate the unknown boundary. The theorem of the existence and uniqueness of the solution in the space of infinitely differentiable functions is proved for this problem. The free boundary is determined as an image of the surface bounding the gas-filled region in reverse transition. Herewith, the method for studying the free boundary is similar to the approach that the authors apply to studying the dynamics of the rarefied mass of a self-gravitating gas. Numerical calculations of gas flow are made, including the construction of the free gas-vacuum boundary. The influence of gravitation and the initial gas particle velocity on the formation of gas cloud configuration in the vacuum and on cloud evolution is studied. The results are of interest in terms of solving relevant astrophysical and cosmogonic problems.

Keywords: gas dynamics, self-gravitating gas, Lagrangian coordinates, nonlinear system of Volterra-type integro-differential equations, Cauchy problem, existence and uniqueness theorem, method of successive approximations, computational experiment.

Acknowledgment

The work was financially supported by the RFBR, project No. 20-07-00407.

References

1. Chandrasekhar S. *Ellipsoidal figures of equilibrium*. Chicago, Chicago University, 1967, 264 p.
2. Lamb H. *Hydrodynamics*, Cambridge, University Press, 1993, 604 p.
3. Sedov L.I. *Similarity and Dimensional Methods in Mechanics*, Academic Press, New York and London, 1959. ISBN 978-1-4832-0088-0. DOI: 10.1016/C2013-0-08173-X.
4. Sedov L.I. On the integration of the equations of one-dimensional motion of a gas. *Doklady AN SSSR*, 1953, vol. 90, No 5, pp. 735–739. (In Russian).
5. Bogoiavlenskii O.I. Dynamics of a gravitating gaseous ellipsoid. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1976, vol. 40, iss. 2, pp. 246–256. DOI: 10.1016/0021-8928(76)90061-7.
6. Ovsyannikov L.V. *Obshchie uravneniya i primery* [General equations and examples]. Novosibirsk, Nauka Publ., 1967, 75 p. (In Russian).
7. Ovsyannikov L.V. On one class of unsteady motions of incompressible liquid. In: *Trudy V sessii uchenogo soveta po narodno-hozyaystvennomu ispol'zovaniyu vzryva* [Proc. of the 5th Session of Scientific Council on Explosion Application in National Economy]. Frunze, Izd-vo Ilim Publ., 1965, pp. 34–42. (In Russian).
8. Lavrentieva O.M. On Motion of a Fluid Ellipsoid. *Doklady AN SSSR*, 1988, vol. 253, No 4, pp. 828–831. (In Russian).
9. Strakhovskaya L.G. Evolution model of the self-gravitating gas disk. *KIAM Preprint No. 80*, Keldysh Inst. Appl. Math., Moscow, 2012. Available at: <http://library.keldysh.ru/preprint.aspx?id=2012-80>. (In Russian).
10. Parshin D.V., Cherevko A.A. & Chupakhin A.P. Steady vortex flows of a self-gravitating gas. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2014, vol. 55, pp. 327–334. DOI: 10.1134/S0021894414020151.
11. Ovsyannikov L.V. Singular vortex. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1995, vol. 36, pp. 360–366. DOI: 10.1007/BF02369772.
12. Chuev N.P. On the existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for a system of integral equations describing the motion of a rarefied mass of a self-gravitating gas, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2020, vol. 60, No. 4, pp. 663–672. DOI: 10.1134/S0965542520040077.
13. Legkostupov M.S. On a model of the generation of star planet systems of the Sun type. *Matematicheskoye modelirovanie*, 2020, vol. 32, No. 3, pp. 81–101. DOI: 10.20948/mm-2020-03-05. (In Russian).
14. Chuev N.P. Analytical method for studying three-dimensional problems in self-gravitating gas dynamics. *Vychislitel'nye tehnologii*, 1998, vol. 3, No. 1, pp. 79–89. (In Russian).
15. Chuev N.P. The Cauchy problem for system of Volterra integral equations describing the motion of a finite mass of a self-gravitating gas. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, 2020, vol. 33, pp. 35–50. DOI: 10.26516/1997-7670.2020.33.35. (In Russian).
16. Chuev N.P. Volterra integral equation method in the study of dynamics of self-gravitating gas bounded by free surface. *Herald of the Ural State University of Railway Transport. Scientific journal*, 2022, No. 2 (54), pp. 4–23. DOI: 10.20291/2079-0392-2022-2-4-23. (In Russian).
17. Stanyukovich K.P. *Neustanovivshiesya dvizheniya sploshnoy sredy* [Unsteady Motion of a Continuous Medium]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 875 p. (In Russian).
18. Gyunter N.M. *Teoriya potentsiala i ee primeneniye k osnovnym zadacham matematicheskoy fiziki* [Potential theory and its application to the basic problems of mathematical physics]. Moscow, Gostekhizdat Publ., 1953, 415 pp. (In Russian).

19. Sretenskii L.N. *Theory of the Newton Potential*. Moscow–Leningrad, OGIZ–Gostekhizdat Publ., 1946, 318 p. (In Russian).
20. Ovsyannikov L.V. *Lektsii po osnovam gazovoy dinamiki* [Lectures on Basic Gas Dynamics]. Institute of Computer Studies, Moscow, Izhevsk, 2003. (In Russian).
21. Ovsyannikov L.V. A gas pendulum. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2000, vol. 41, pp. 865–869. DOI: 10.1007/BF02468732.
22. Vasil'eva A.B., Tikhonov N.A. *Integralnye uravneniya* [Integral equations]. Moscow, Fizmatlit Publ., 2002, 160 p.

Подана в журнал: 17.06.2022

УДК 517.958:533.17

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.4.061-080

АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ИЗОЛИРОВАННОЙ МАССЫ САМОГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗА

А. Л. Казаков^{1, 2, а)}, Л. Ф. Спевак^{1, б)*}, Н. П. Чуев^{3, в)}

¹Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
620049, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация

²Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт динамики систем и теории
управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук,
664033, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, Российская Федерация

³Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
Уральский государственный университет путей сообщения,
620034, ул. Колмогорова, 66, Екатеринбург, Российская Федерация

а)  <https://orcid.org/0000-0002-3047-1650>  kazakov@icc.ru;

б)  <https://orcid.org/0000-0003-2957-6962>  lfs@imach.uran.ru;

в)  chuev44@mail.ru

*Ответственный автор. Электр. почта: lfs@imach.uran.ru

Адрес для переписки: 620049, ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация

Тел.: +7 (343) 362–30–22; факс: +7 (343) 374–53–30

В работе рассматривается эволюция свободной поверхности, которая ограничивает движущуюся в вакууме конечный объем самогравитирующего идеального газа. Неустановившиеся течения описаны феноменологической математической моделью газовой динамики, которая имеет вид системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, записанной в эйлеровых координатах. Движение среды осуществляется в силовом поле, создаваемом ньютоновским потенциалом в общем виде. Краевые условия заданы на свободной границе газ-вакуум, которая заранее неизвестна и определяется одновременно с построением течения газа. Переход к лагранжевым координатам позволяет свести задачу к эквивалентной, состоящей из интегральных уравнений типа Вольтерра и уравнения неразрывности в форме Лагранжа, для которых заданы условия Коши, т. е. применение лагранжевых координат дает возможность, в частности, избавиться от неизвестной границы. Для данной задачи доказана теорема существования и единственности решения в пространстве бесконечно дифференцируемых функций. Свободная граница определяется как образ поверхности, ограничивающей заполненную газом область, при обратном переходе. При этом метод исследования динамики свободной поверхности аналогичен подходу, использованному авторами для исследования динамики разреженной массы самогравитирующего газа. Выполнены численные расчеты течения газа, включая построение свободной границы газ-вакуум. Исследовано влияние гравитации и начальной скорости частиц газа на формирование конфигурации газового облака в вакууме и его эволюцию. Полученные результаты представляют интерес для решения актуальных астрофизических и космогонических задач.

Ключевые слова: газовая динамика, самогравитирующий газ, лагранжевы координаты, система нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра, задача Коши, теорема существования и единственности, метод последовательных приближений, вычислительный эксперимент.

1. Введение

В работе исследуется задача о движении в вакууме изолированной массы самогравитирующего идеального газа с переменной областью течения, граница которой является свободной поверхностью. Система уравнений газовой динамики, описывающая движение среды во внутреннем (собственном) поле тяжести, является системой нелинейных интегродифференциальных уравнений, которая посредством невырожденных преобразований сводится к эквивалентной системе интегральных уравнений типа Вольтерра, что, в частности, позволяет избавиться от неизвестной границы. Полученные результаты решения этой системы используются при рассмотрении адиабатических движений идеального газа, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат.

Неустановившимся движениям сплошной среды вышеуказанного вида посвящено большое количество научных трудов, первыми из которых были классические работы Дирихле, Дедекинда и Римана по теории фигур равновесия идеальной несжимаемой гравитирующей жидкости [1, 2]. Адиабатические неустановившиеся движения газа, когда скорости пропорциональны расстоянию до центра симметрии, были изучены Л. И. Седовым [3, 4]. В монографии О. И. Богоявленского [5] исследована динамика адиабатических движений гравитирующего идеального газа. Движения идеального газа с однородной деформацией в двумерных и трехмерных случаях глубоко изучены в работах Л. В. Овсянникова [6, 7], что способствовало дальнейшим исследованиям в этом направлении. В статье О. М. Лаврентьевой [8] представлены достаточно общие результаты по динамике нестационарных эллипсоидов со свободной границей, рассмотрено движение идеальной жидкости, при котором скорости являются линейными функциями координат.

Интерес к проблематике, связанной с изучением движения самогравитирующего газа, со временем не ослабевает. Приведем некоторые публикации последних лет. Так, в работе [9] рассмотрены вопросы численного моделирования эволюции газового диска, которое описывается нестационарными уравнениями газовой динамики в переменных Эйлера в цилиндрических координатах и уравнением Пуассона для гравитационного потенциала. В статье [10] построено и исследовано точное решение уравнений установившегося движения самогравитирующего газа, которое является аналогом классического вихря Овсянникова [11] в рассмотренном случае. В статье [12] доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши для системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра, описывающей движение конечной массы самогравитирующего газа, ограниченной свободной границей. Представленные результаты интересны как с математической точки зрения, так и для моделирования процесса образования планетных систем и других астрофизических и космогонических явлений [13].

Остановимся более подробно на предшествующих работах одного из авторов. Основные результаты Н. П. Чуева по применению метода интегральных уравнений Вольтерра в исследовании динамики конечной массы самогравитирующего газа были представлены в статьях [14, 15]. В [16] приведено наиболее полное и развернутое доказательство теоремы существования и единственности решения задачи Коши для системы интегральных уравнений типа Вольтерра. Так, опираясь на свойства компактных пространств, серию найденных оригинальных и конкретных оценок для функций, описывающих течения самогравитирующего газа, удалось доказать сходимости последовательности приближенных решений в предположении о гладкости начальных данных.

В настоящей статье указанные результаты распространены на исследование математической модели политропного изоэнтропического движения идеального газа, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат. Найден и проанализирован новый класс точных решений. Впервые в рамках настоящего цикла исследований выполнены иллюстрирующие численные расчеты.

2. Постановка задачи

В работе рассматривается задача по изучению закономерностей движения газа во внутреннем поле тяжести. Пусть в момент $t = 0$ в пространстве R^3 задана область Ω_0 , заполненная идеальным политропным и изоэнтропическим газом, частицы которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона. Задача о движении газа в силовом поле сводится к определению области Ω_t , занимаемой газом в момент времени t , а также закона движения свободной поверхности, вектора скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, давления $p(\mathbf{x}, t)$ и плотности $\rho(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющих в области $\mathbf{x} \in \Omega_t$, $t \in (0, T)$ системе уравнений газовой динамики в форме Эйлера [17]

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} + \frac{1}{\rho(\mathbf{x}, t)} \nabla p(\mathbf{x}, t) &= \nabla \Phi(\mathbf{x}, t); \\ \frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

при условиях, что при $t = 0$ в каждой точке $\mathbf{x}(x, y, z)$ области Ω_0 известны распределения: $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ – вектора скорости частиц газа; $p_0(\mathbf{x})$ – давления; $\rho_0(\mathbf{x})$ – плотности газа. Функции $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\rho_0(\mathbf{x})$ и замкнутая граница Γ_0 области Ω_0 задаются в пространстве бесконечно дифференцируемых функций в области $\bar{\Omega}_0$. Отметим, что здесь и далее в тексте жирным шрифтом выделены векторные величины.

На границе Γ_t области Ω_t , $t \geq 0$, выполняется условие

$$\rho(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \Gamma_t} = 0. \quad (2)$$

Сила ньютоновского притяжения в правой части векторного уравнения системы (1) равна $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$ где $\nabla \Phi$ – градиент ньютоновского потенциала, который задается тройным интегралом

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = G \iiint_{\Omega_t} \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d\mathbf{x}'. \quad (3)$$

Здесь G – гравитационная постоянная; $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ – расстояние между точками области. Гравитационный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона [18, 19]

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \Delta \Phi(\mathbf{x}, t) = -4\pi G \rho(\mathbf{x}, t).$$

Рассматривая модель изоэнтропического движения политропного газа, уравнение состояния политропного газа берем в виде [20]

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\gamma} \rho^\gamma(\mathbf{x}, t), \quad (4)$$

где $\gamma > 1$ – показатель политропы (адиабаты) газа. При произвольном γ и условии (2) в системе (1) в окрестности свободной границы Γ_t , $t \geq 0$, возникает сингулярность. Поэтому будем изучать движение газа при $\gamma = 1 + \frac{l}{m}$, где $l, m \in N$, $l \geq 2$.

Введем новую неизвестную функцию

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \sigma^m(\mathbf{x}, t), \quad (5)$$

после подстановки которой в систему (1) получим систему уравнений газовой динамики с градиентным членом, не имеющим сингулярности

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} + m\sigma^{l-1}(\mathbf{x}, t)\nabla\sigma(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \\ \frac{d\sigma(\mathbf{x}, t)}{dt} + \frac{1}{m}\sigma(\mathbf{x}, t)\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

На границе Γ_t области Ω_t , $t \geq 0$, сохраняется условие (2):

$$\sigma(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \Gamma_t} = 0, \quad (7)$$

а вместо функции $\rho_0(\mathbf{x})$ возникает функция $\sigma_0(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}, 0) \in C^\infty(\bar{\Omega}_0)$.

В соответствии с целью статьи и постановкой задачи, мы исследуем движение в вакууме изолированной массы самогравитирующего идеального газа с переменной областью течения. При определении закона движения границы этой области как свободной поверхности будем учитывать, что градиентное слагаемое уравнения Эйлера системы (6), с учетом (7), для точек $\mathbf{x} \in \Gamma_t$ равно нулю, т.е. $m\sigma^{l-1}(\mathbf{x}, t)\nabla\sigma(\mathbf{x}, t) = 0$. Далее будем использовать для описания плотности как функцию $\rho(\mathbf{x}, t)$, так и функцию $\sigma(\mathbf{x}, t)$.

Движение газа рассматриваем при условии, что свободная граница во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц, т.е. исключается возможность переноса массы через свободную поверхность. Это обстоятельство делает удобным переход от эйлеровых координат (\mathbf{x}, t) к лагранжевым координатам (ξ, t) , для которых область определения решения задачи о движении конечной массы газа будет заранее фиксированной. При переходе к этим координатам область становится заданной и является цилиндрической: $Q_T = \bar{\Omega}_0 \times [0, T]$.

Для удобства дальнейшего исследования преобразуем систему газовой динамики в переменных Эйлера (\mathbf{x}, t) (6) к лагранжевым координатам (ξ, t) [2, 6]. Пусть система газовой динамики системы (1), (6) имеет решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\rho(\mathbf{x}, t)$. При известном векторе скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ движение частиц газа определяется решением системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

с начальным условием

$$\mathbf{x}|_{t=0} = \xi. \quad (9)$$

Решение задачи Коши (8) и (9) будет иметь вид:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t). \quad (10)$$

Непрерывное взаимно однозначное отображение $\mathbf{x}(\xi, t)$ является невырожденным и достаточно гладким при условии, что его якобиан

$$J(\xi, t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} \right) \quad (11)$$

отличен от нуля. Для якобиана (11) имеем следующие начальное условие и неравенство:

$$J(\xi, 0) = 1, \quad J(\xi, t) > 0. \quad (12)$$

Введем лагранжевы переменные $\xi(\xi, \eta, \zeta)$ как значения координат частиц газа в начальный момент в области Ω_0 . Если рассматривать $\mathbf{x}(x, y, z)$ как функцию независимых переменных ξ, η, ζ, t , то в момент t скорость частицы будет

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \mathbf{v}(\xi, t). \quad (13)$$

Используем при переходе от эйлеровых к лагранжевым переменным для функций $f(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}(\xi, t), t) = g(\xi, t)$ следующее дифференциальное равенство:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (14)$$

Тогда ускорение можно записать следующим образом:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2}. \quad (15)$$

Уравнение неразрывности и переменных Лагранжа имеет вид [20]:

$$\rho(\mathbf{x}(\xi, t), t) J(\xi, t) = \rho_0(\xi). \quad (16)$$

Здесь $\rho_0(\xi)$ означает первоначальную плотность газа в точках области Ω_0 .

Запишем уравнение неразрывности с учетом замены (5):

$$\sigma^m(\mathbf{x}(\xi, t), t) J(\xi, t) = \sigma_0^m(\xi). \quad (17)$$

Перейдем в векторном уравнении системы (6) к лагранжевым координатам, предварительно продифференцировав потенциал $\Phi(\xi, t)$. Тогда для силовой функции $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \nabla \Phi(\mathbf{x}, t)$ после вычисления градиента и подстановки $\mathbf{x}(\xi, t)$ получим формулу

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = G \iiint_{\Omega'} \rho(\mathbf{x}', t) \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}(\xi, t)}{|\mathbf{x}(\xi, t) - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'.$$

Применяя теорему о замене переменной в кратном интеграле и заменяя $\mathbf{x}' = \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t)$ в предыдущем равенстве, получим:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = G \iiint_{\Omega} \rho(\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t), t) \frac{\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t) - \mathbf{x}(\xi, t)}{|\mathbf{x}(\xi, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t)|^3} J(\boldsymbol{\eta}, t) d\boldsymbol{\eta}, \quad (18)$$

где $J(\boldsymbol{\eta}, t) = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(\xi', \eta', \zeta')}$ – якобиан преобразования (11) для точки $\boldsymbol{\eta}(\xi', \eta', \zeta') \in \Omega_0$.

С учетом (16) равенство (18) в форме Лагранжа примет вид:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = G \iiint_{\Omega} \rho_0(\boldsymbol{\eta}) \frac{\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t) - \mathbf{x}(\xi, t)}{|\mathbf{x}(\xi, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t)|^3} J(\boldsymbol{\eta}, t) d\boldsymbol{\eta}. \quad (19)$$

Введем вектор-функцию

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = (p(\mathbf{x}, t), q(\mathbf{x}, t), r(\mathbf{x}, t)) = m\sigma^{l-1}(\mathbf{x}, t)\nabla\sigma(\mathbf{x}, t). \quad (20)$$

Тогда система (6) с учетом (19) и (20) в лагранжевых координатах примет при замене $\sigma(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \sigma(\xi, t)$ следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t^2} &= -\mathbf{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi, t), t); \\ \sigma(\xi, t) J^{\frac{1}{m}}(\xi, t) &= \sigma_0(\xi). \end{aligned} \quad (21)$$

Предыдущие рассуждения приводят к следующему утверждению.

Утверждение. Для того чтобы гладкое отображение (10) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ определяло с помощью равенства (8) и уравнения неразрывности решение системы (6), необходимо и достаточно, чтобы это решение удовлетворяло системе уравнений (21), а также начальным-краевым условиям

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \Omega_0 : \mathbf{x}(\xi, 0) = \xi, \left. \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\xi), J(\xi, 0) = 1, \sigma(\xi, 0) = \sigma_0(\xi); \\ \forall \xi \in \Gamma_0, \forall t \geq 0 : \sigma(\xi, t) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Доказательство данного утверждения приведено в работе [16].

Задача Коши для интегро-дифференциальной системы уравнений (21) и (22) может быть сведена к интегро-дифференциальной системе с интегральным векторным уравнением типа Вольтерра для искомой векторной функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ с сохранением в прежнем виде уравнения неразрывности. Таким образом, система (21) эквивалентна следующей системе:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\xi, t) &= \xi + \mathbf{u}_0(\xi)t + \int_0^t (t - \tau)(\mathbf{F}(\mathbf{x}(\xi, \tau), \tau) - \mathbf{P}(\mathbf{x}(\xi, \tau), \tau))d\tau; \\ \sigma(\xi, t)J^{\frac{1}{m}}(\xi, t) &= \sigma_0(\xi). \end{aligned} \quad (23)$$

Для (23) сохраняются начально-краевые условия (22) и задаются дополнительные условия для $\xi \in \bar{\Omega}_t$:

$$\begin{aligned} \max \{ \sup|\xi|, \sup|\mathbf{u}_0(\xi)|, \sup|\sigma_0(\xi)|, \sup|\operatorname{div} \mathbf{u}_0(\xi)|, \sup|\sigma_0^m(\xi)| = \sup|\rho_0(\xi)|, \\ \sup \frac{m}{l} |\nabla_{\xi} \sigma'(\xi)|, \sup \left| G \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\eta) \frac{\eta - \xi}{|\xi - \eta|^3} d\eta \right| \} = A_0 < \infty. \end{aligned} \quad (24)$$

Эквивалентность уравнений (23) и (21) легко проверяется дифференцированием и 2-кратным интегрированием.

Заметим, что если найдено решение системы интегральных уравнений (23) $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, то

$$\rho(\mathbf{x}(\xi, t), t) = \rho_0(\xi)J^{-1}(\xi, t). \quad (25)$$

Таким образом, если найдено решение системы (23) и вычислено значение $J^{-1}(\xi, t)$, то по заданному начальному в начальный момент времени значению плотности можно определить плотность газа для $t \geq 0$, а также функцию $\sigma(\xi, t)$. На основании (12) можно утверждать, что для $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ существует дифференцируемое обратное преобразование $\xi = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t)$. При этом из равенства (10) следует $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t), t)$.

Обратное преобразование позволяет определить решение системы (6) по формулам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}(\xi, t)}{\partial t} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}(\xi, t), t) \Big|_{\xi = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t); \\ \sigma(\xi, t) &= \sigma(\mathbf{x}(\xi, t), t) \Big|_{\xi = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}, t)} = \sigma(\mathbf{x}, t). \end{aligned} \quad (26)$$

Отсюда получим функцию плотности $\rho(\mathbf{x}, t) = \sigma^m(\mathbf{x}, t)$, используя формулу (5). Область Ω_t в момент $t \geq 0$ определится как образ Ω_0 при преобразовании (10).

Для интегро-дифференциальной системы (23) в работе [16] достаточно подробно доказана нижеследующая теорема существования и единственности решения задачи Коши в пространстве $C_2^\infty(Q_T)$ – множества непрерывных бесконечно дифференцируемых по переменным ξ и непрерывно дифференцируемых до второго порядка включительно по $t \in [0, T]$ функций $\mathbf{f}(\xi, t)$.

Теорема. *Задача Коши для нелинейной интегро-дифференциальной системы уравнений (23) имеет единственное решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, $\sigma = \sigma(\xi, t)$, принадлежащее пространству $C_2^\infty(Q_T)$ в области Q_T , определенное на конечном интервале времени $[0, t_0]$ для $t_0 \in [0, T]$ и удовлетворяющее начально-краевым условиям (22) и (24).*

Решение системы (22) построено с помощью метода последовательных приближений. Можно доказать, применяя метод математической индукции, принадлежность итераций функций $\mathbf{x}_n(\xi, t)$ и $\sigma(\mathbf{x}_n(\xi, t), t)$ пространству функций $C_2^\infty(Q_T)$.

Из непрерывности функций $\mathbf{x}_n(\xi, t)$ и $\mathbf{F}(\mathbf{x}_n, t)$ в замыкании области Q_T следует их ограниченность. В работе [16] доказано, что последовательность бесконечно дифференцируемых функций $\{\mathbf{x}_n(\xi, t)\}$ равномерно сходится к функции $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ в области Ω_0 и, как легко убедиться, последовательность непрерывно дифференцируемых функций k -го порядка, $k = 0, 1, 2, \dots$ также равномерно сходится к некоторой вектор-функции:

$$\varphi(\xi, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial^k \mathbf{x}_n(\xi, t)}{\partial \xi^{\alpha_1} \partial \eta^{\alpha_2} \partial \zeta^{\alpha_3}}, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = k.$$

Отсюда следуют существование и единственность решения в лагранжевой форме системы (21) и в эйлеровой форме системы (1). Таким образом, решением поставленной задачи является вектор-функция $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$, принадлежащая пространству $C_2^\infty(Q_T)$.

Свободная граница является также образом решения системы интегральных уравнений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ при отображении $\xi \in \Gamma_0$ в точки $\mathbf{x} \in \Gamma_t$. Таким образом, задача по определению закона движения свободной границы является также задачей об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$.

3. Динамика свободной поверхности, ограничивающей конечную массу движущегося самогравитирующего газа с линейным полем скоростей

3.1. Качественная теория динамики свободной поверхности математической модели движущегося самогравитирующего газа с линейным полем скоростей

Рассмотрим применение полученных результатов для исследований движения политропного изоэнтропического самогравитирующего идеального газа, в частности для изучения эволюции свободной поверхности, которая ограничивает движущийся в вакууме изолированный объем, заполняющий область $\mathbf{x} \in \Omega_t, t \in (0, T)$. Будем искать закономерности динамики свободной поверхности при условии, что отображение (10), определяющее движение с однородной деформацией, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат $\xi \in \Omega_0$, представлено равенством

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t) = M(t) \cdot \xi, \tag{27}$$

где $M(t) = (m_{ij}(t))$ – квадратная матрица третьего порядка. Элементы матрицы $M(t)$ являются достаточно гладкими функциями времени. Умножение матрицы на вектор-столбец выполняется по правилу умножения матриц.

Для исследования динамики свободной поверхности преобразуем систему (21). На основании краевого условия (7) и уравнения неразрывности при всех $t \geq 0, \xi \in \Gamma_0$ тождественно выполнено равенство

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}(\xi, t), t) = m \sigma^{l-1}(\mathbf{x}(\xi, t), t) \nabla \sigma(\mathbf{x}(\xi, t), t) = 0.$$

С учетом этого (21) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial t^2} = G \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{\eta}) \frac{\mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t)}{|\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\eta}, t)|^3} d\boldsymbol{\eta} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t), t). \quad (28)$$

Отсюда, в частности, следует, что метод исследования динамики свободной поверхности в данном случае аналогичен подходу, использованному в работе [12], где исследована динамика разреженной массы самогравитирующего газа.

Кроме того, из (27) следует, что

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, 0) = \boldsymbol{\xi} = M(0) \cdot \boldsymbol{\xi} \Rightarrow M(0) = E, \quad (29)$$

где E – единичная матрица.

Якобиан (11) при движении с однородной деформацией примет вид:

$$J(\boldsymbol{\xi}, t) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\xi, \eta, \zeta)} = \det \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right) = \det M(t).$$

При $t = 0$ получим $\det M(0) = 1$. В силу положительности плотности из уравнения непрерывности следует, что $\det M(t) \geq 0$ для $t \geq 0$. Матрица $M(t) = (m_{ij}(t))$ состоит из девяти неизвестных функций, а векторное уравнение (28) формирует лишь три уравнения, т. е. задача в общем виде становится неразрешимой.

Рассмотрим частный случай. Зададим матрицу $M(t)$ в виде

$$M(t) = \begin{pmatrix} m(t) & 0 & 0 \\ 0 & m(t) & 0 \\ 0 & 0 & m(t) \end{pmatrix} = m(t)E, \quad (30)$$

где элемент матрицы $m(t)$, с учетом (29), удовлетворяет условию

$$m(0) = 1. \quad (31)$$

Отображение (27), определяющее движение с однородной деформацией, в котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат, представлено равенством

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}, t) = M(t) \cdot \boldsymbol{\xi} = m(t) \cdot \boldsymbol{\xi}. \quad (32)$$

После подстановки (32) в систему (28) получим обыкновенное дифференциальное уравнение с параметрами $\boldsymbol{\xi}$, описывающее динамику свободной границы Γ_t

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} \boldsymbol{\xi} = G \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{\eta}) \frac{m(t)(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\xi})}{|m(t)(\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta})|^3} d\boldsymbol{\eta}. \quad (33)$$

Вычисляя определитель $\det M(t)$, получим, согласно условиям (12), что $J = \det M(t) = m^3(t) \geq 0$, откуда следует неравенство $m(t) \geq 0$ для $t \geq 0$. Тогда уравнение (33) можно записать для $\xi \in \Gamma_0$ в следующем виде:

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} \xi = \frac{1}{m^2(t)} \mathbf{F}_0(\xi), \quad (34)$$

где $\mathbf{F}_0(\xi) = \mathbf{F}_0(\mathbf{x}(\xi, t), t) = G \iiint_{\Omega_0} \rho_0(\boldsymbol{\eta}) \frac{(\boldsymbol{\eta} - \xi)}{|\xi - \boldsymbol{\eta}|^3} d\boldsymbol{\eta}$ – известная силовая функция (19) при $t = 0$.

Умножив вектор ξ скалярно на векторы левой и правой частей равенства (34), получим:

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} |\xi|^2 = \frac{\mathbf{F}_0(\xi) \cdot \xi}{m^2(t)}. \quad (35)$$

Будем предполагать, что действующая по закону Ньютона сила в точке $\xi \in \Gamma_0$ как векторная величина направлена к центру тяжести тела, который совпадает с началом координат. Тогда уравнение (35) примет вид

$$\frac{d^2 m(t)}{dt^2} = - \frac{|\mathbf{F}_0(\xi)|}{m^2(t) |\xi|}. \quad (36)$$

Задачу Коши для обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения будем решать при следующих начальных условиях:

$$m(0) = 1, \quad \frac{dm(0)}{dt} = v_0, \quad (37)$$

где через v_0 обозначим начальную скорость изменения функции $m(t)$. Первое интегрирование уравнения (36) с учетом (37) приводит к равенству:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \pm \sqrt{h(\xi) \left(\frac{1}{m(t)} - 1 \right) + v_0^2}. \quad (38)$$

Здесь для краткости записи введена функция $h(\xi) = \frac{2|\mathbf{F}_0(\xi)|}{|\xi|} > 0$.

Для анализа динамики свободной поверхности рассмотрим три случая.

1. Начальная скорость v_0 имеет положительное значение ($v_0 > 0$).
2. Начальная скорость v_0 имеет отрицательное значение ($v_0 < 0$).
3. Значение начальной скорости v_0 равно нулю.

Рассмотрим первый случай. Проведем исследование уравнения (38) для $t \geq 0$ при $v_0 > 0$:

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sqrt{h(\xi) \left(\frac{1}{m(t)} - 1 \right) + v_0^2}. \quad (39)$$

Функция $m(t)$ будет возрастающей при $t \geq 0$. Из уравнения (39), а также неравенств $h(\xi) = \frac{2|F_0(\xi)|}{|\xi|} > 0$; $m(t) > 0$ и $v_0^2 < h(\xi)$ следует существование такого момента $t = t_1$, когда скорость частиц газа, находящихся на движущейся свободной поверхности, равна нулю, $\frac{dm(t_1)}{dt} = 0$. При этом

$$m(t_1) = \frac{h(\xi)}{h(\xi) - v_0^2} > 1. \quad (40)$$

При $t = t_1$ ускорение будет равно

$$\frac{d^2m(t_1)}{dt^2} = -\frac{|F_0(\xi)|}{m^2(t_1)|\xi|} = -\frac{[h(\xi) - v_0^2]^2}{2h(\xi)} < 0.$$

Таким образом, скорость при $t > t_1$ становится отрицательной, и с этого момента движение точек поверхности будет подчиняться уравнению

$$\frac{dm(t)}{dt} = -\sqrt{h(\xi)\left(\frac{1}{m(t)} - 1\right) + v_0^2}, \quad (41)$$

и функция $m(t)$ будет убывающей. При достижении значения $m(t_2) = 1$ получим $\frac{dm(t_2)}{dt} = -\sqrt{v_0^2} = -v_0$, так как $v_0 > 0$. Таким образом, с момента t_2 описание движения частиц газа поверхности подчиняется второму случаю.

Рассмотрим второй случай: пусть $v_0 < 0$. Тогда при $t \geq 0$ функция $m(t)$ будет убывающей согласно (41), выпуклой вверх как удовлетворяющая уравнению (36). В этом случае подкоренное выражение в (41) будет строго положительно и при $m(t) \rightarrow 0$ будет стремиться к минус бесконечности. Таким образом, во втором случае наблюдается схлопывание изолированного объема самогравитирующего газа, т. е. вся масса газа сжимается (коллапсирует) в одну точку.

В третьем случае, при $v_0 = 0$ и $h(\xi) = 0$, газовое тело будет в состоянии покоя, в силу уравнений (36) и начальных условий (37) получаем, что $m(t) = 1$ при $t \geq 0$. Уравнение (39) определено при $0 < m(t) \leq 1$ и $v_0 = 0$, и функция $m(t)$ будет определяться из уравнения (41), которое имеет явное решение

$$\arcsin \sqrt{1 - m(t)} + \sqrt{1 - m(t)}\sqrt{m(t)} = \sqrt{h(\xi)}t.$$

Отсюда следует, что при $m(t) \rightarrow 0 \rightarrow 0$ время стремится к предельному значению, $t \rightarrow \frac{\pi}{2} h^{-\frac{1}{2}}(\xi)$ – времени схлопывания всей массы газа.

При коллапсе газа в рассмотренных случаях плотность газового тела, удовлетворяющая уравнению неразрывности (16) в лагранжевых координатах, и давление, определенное равенством (4), при $m(t) \rightarrow 0$ растут неограниченно. При этом гравитационная сила остается

конечной, в итоге сжатие газа сменяется его расширением (взрывом). Движение будет управляться уравнениями, описанными выше. Данный процесс периодически повторяется. Таким образом, с момента $t = 0$ это движение, согласно определению Л. В. Овсянникова [21], можно назвать «газовым маятником» – по аналогии с обычными колебаниями физического маятника.

3.2. Вычислительные методы в исследовании динамики свободной поверхности математической модели движущегося самогравитирующего газа с линейным полем скоростей

Для исследования динамики свободной поверхности можно использовать два уравнения:

- 1) дифференциальное уравнение (36) с начальными условиями (37);
- 2) нелинейное интегральное уравнение

$$m(t) = 1 + v_0 t - \frac{h(\xi)}{2} \int_0^t \frac{t - \tau}{m^2(\tau)} d\tau. \quad (42)$$

Уравнение (42) может быть решено методом последовательных приближений:

$$\begin{aligned} m_0(t) &= 1, \\ m_1(t) &= 1 + v_0 t - \frac{h(\xi)}{4} t^2, \dots, \\ m_{n+1}(t) &= 1 + v_0 t - \frac{h(\xi)}{2} \int_0^t \frac{t - \tau}{m_n^2(\tau)} d\tau, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Закон движения свободной границы в этом случае зависит от двух ограниченных параметров: $h(\xi)$, v_0 . Для уравнения (42) справедлива теорема существования и единственности решения [22] в пространстве бесконечно дифференцируемых функций в области $\bar{\Omega}_0 = [0, T] \times [1/N_1, N_2]$, где N_1 и N_2 – положительные константы, N_2 столь угодно велика, поскольку функция $f(m) = 1/m^2$ удовлетворяет условию Липшица в области $\bar{\Omega}_0$ при $\varepsilon = 1/N_1 \leq m(t) \leq N_2$.

4. Пример

Пусть Ω_0 – шар с радиусом R , $\rho = const$. Тогда для любой точки $\xi \in \Gamma_0$:

$$|F_0(\xi)| = \frac{4\pi R}{3} G\rho, \quad h(\xi) = \frac{8\pi}{3} G\rho = u^2. \quad (44)$$

В этом случае уравнения (39) и (41) имеют аналитические решения.

Рассмотрим сначала случай $v_0 > 0$. Общий интеграл уравнения

$$\frac{dm(t)}{dt} = \sqrt{u^2 \left(\frac{1}{m(t)} - 1 \right) + v_0^2} \quad (45)$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}}{u^2 - v_0^2} + \frac{u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}} \times \\
 & \times \operatorname{arctg} \left(\frac{2(u^2 - v_0^2)m - u^2}{2\sqrt{u^2 - v_0^2}\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}} \right) + C = t.
 \end{aligned} \tag{46}$$

С учетом начального условия $m(0) = 1$, имеем частный интеграл:

$$\begin{aligned}
 & - \frac{\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m} - v_0}{u^2 - v_0^2} + \frac{u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}} \times \\
 & \times \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2(u^2 - v_0^2)m - u^2}{2\sqrt{u^2 - v_0^2}\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{u^2 - 2v_0^2}{2\sqrt{u^2 - v_0^2}v_0} \right) \right] = t.
 \end{aligned} \tag{47}$$

Значение $m'(t)$ становится равным нулю в момент $t = t_1$, когда $m_1 = m(t_1) = \frac{u^2}{u^2 - v_0^2}$.

Отсюда

$$t_1 = \frac{v_0}{u^2 - v_0^2} + \frac{u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}} \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{u^2 - 2v_0^2}{2\sqrt{u^2 - v_0^2}v_0} \right) \right]. \tag{48}$$

Для $t > t_1$ функция $m(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dm(t)}{dt} = - \sqrt{u^2 \left(\frac{1}{m(t)} - 1 \right) + v_0^2}, \tag{49}$$

общий интеграл которого имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}}{u^2 - v_0^2} - \frac{u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}} \times \\
 & \times \operatorname{arctg} \left(\frac{2(u^2 - v_0^2)m - u^2}{2\sqrt{u^2 - v_0^2}\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}} \right) + C = t.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Подставив начальное условие $m(t_1) = m_1$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}}{u^2 - v_0^2} - \frac{u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}} \times \\
 & \times \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{2(u^2 - v_0^2)m - u^2}{2\sqrt{u^2 - v_0^2}\sqrt{[u^2 - (u^2 - v_0^2)m]m}} \right) - \frac{\pi}{2} \right] + t_1 = t.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Функция $m(t)$ примет нулевое значение в момент

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi u^2}{2(u^2 - v_0^2)\sqrt{u^2 - v_0^2}}. \quad (52)$$

Дальнейшая эволюция $m(t)$ описывается уравнениями (45) и (46) с начальным условием

$$m(t_2) = 0 \quad (53)$$

вплоть до момента t_3 , когда производная $m'(t)$ примет нулевое значение.

Аналитическое построение решения при $v_0 \leq 0$ выполняется аналогично. На первом этапе строим убывающий участок решения вида (50), при достижении нулевого значения строим далее возрастающий участок вида (46), и т. д.

Рассматриваемая задача о движении в вакууме изолированной массы самогравитирующего идеального газа является математической моделью эволюции звезд. Поэтому для численных расчетов будем использовать параметры данных астрономических объектов.

Проиллюстрируем решения при $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/(\text{кг} \cdot \text{с}^2)$; $\rho = 1400 \text{ кг/м}^3$; $v_0 = \pm 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}$. В этом случае $h(\mathbf{o}) = u^2 \approx 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ 1/с}^2$. При принятых значениях параметров график функции $m(t)$ при $v_0 > 0$ имеет вид, изображенный на рис. 1. При этом $t_1 \approx 2356$; $t_2 \approx 5708$.

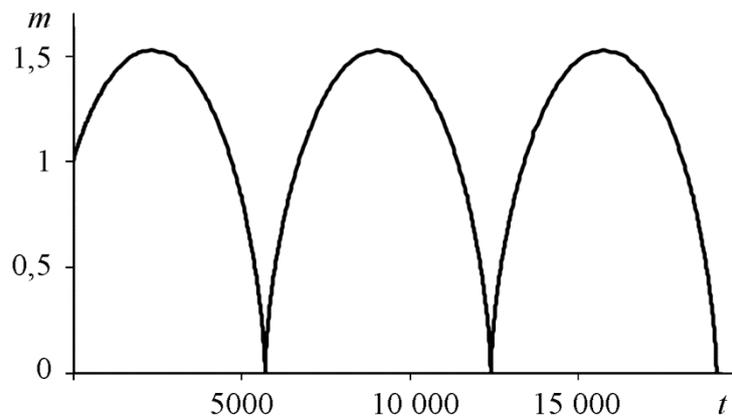


Рис. 1. Решение при $v_0 > 0$

На рис. 2 представлен график функции $m(t)$ при $v_0 < 0$.

Построим теперь при тех же параметрах задачи решение интегрального уравнения (42), используя итерационную процедуру (43). Поскольку аналитическое вычисление интегралов на каждой итерации вряд ли возможно, они вычислялись численно, методом левых прямоугольников. Учитывая масштаб времени (рис. 1 и 2), был принят шаг по времени $h = 1$. На рис. 3. показана сходимость итерационного процесса.

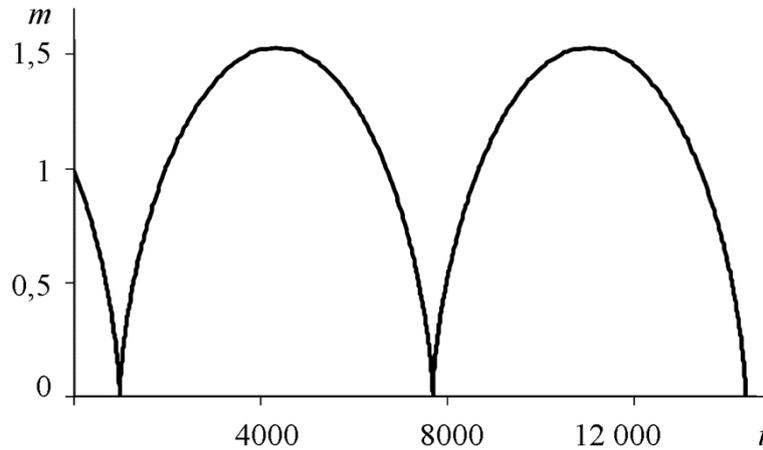


Рис. 2. Решение при $v_0 < 0$

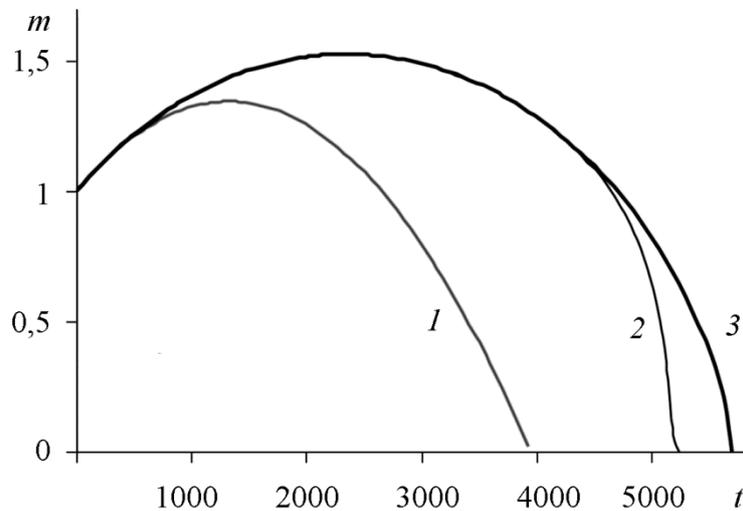


Рис. 3. Итерационное решение: 1 – интерация 1; 2 – интерация 5; 3 – интерация 10

Отметим, что итерационный процесс достаточно быстро сходится к аналитическому решению (первая петля на рис. 1). Необходимая точность легко достигается уменьшением шага по времени.

4. Заключение

В работе рассмотрена задача исследования эволюции движущегося в вакууме конечного объема самогравитирующего идеального газа со свободной границей. Математическая модель имеет вид системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений газовой динамики, записанной в форме Эйлера. Преобразование данной системы к лагранжевым координатам позволило свести ее к эквивалентной системе, состоящей из интегральных уравнений типа Вольтерра и уравнения неразрывности в лагранжевой форме. Решение системы интегральных уравнений определяет отображение области Ω_0 в область движущегося газа $\Omega_t \in R^4(\mathbf{x}, t)$ в момент времени t . Свободная граница является также образом точек решения системы интегральных уравнений $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$ при отображении $\xi \in \Gamma_0$ в точки $\mathbf{x} \in \Gamma_t$. Тем самым задача по определению закона движения свободной границы

становится также задачей об отыскании отображения $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\xi, t)$. Исследована динамика свободной границы при осуществлении движения идеального газа, при котором эйлеровы координаты частиц газа являются линейными функциями лагранжевых координат.

Теоретическая значимость исследования заключается в том, что предлагаемый алгоритм последовательного эквивалентного перехода от интегро-дифференциальной системы газовой динамики, описывающей движение самогравитирующего газа, к системе интегральных уравнений типа Вольтерра, позволяет найти решение этой системы методом последовательных приближений. Данный метод создает перспективы для дальнейшего изучения закономерностей движений конечных масс газа и исследования задач, возникающих в астрофизике и космогонии. Проведенные расчеты позволили сделать представление полученных результатов более понятным и наглядным.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 20-07-00407.

Литература

1. Чандрасекар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия / пер. с англ.; под ред. В. В. Румянцева. – М. : Мир, 1973. – 288 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика / пер. с англ.; под ред. Н. А. Слезкина. – М.; Л. : ОГИЗ, 1947. – 929 с.
3. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. – М. : Наука, 1987. – 432 с.
4. Седов Л.И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа // Доклады АН СССР. – 1953. – Т. 90, № 5. – С. 735–739.
5. Bogoiavlenskii O. I. Dynamics of a gravitating gaseous ellipsoid // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. – 1976. – Vol. 40, iss. 2. – P. 246–256. – DOI: 10.1016/0021-8928(76)90061-7.
6. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. – Новосибирск : Наука, 1967. – С. 5–75.
7. Овсянников Л. В. Об одном классе неустановившихся движений несжимаемой жидкости // Труды V сессии Ученого совета по народно-хозяйственному использованию взрыва. – Фрунзе : Илим, 1965. – С. 34–42.
8. Лаврентьева О. М. О движении жидкого эллипсоида // Доклады АН СССР. – 1980. – Т. 253, № 4. – С. 828–831.
9. Страховская Л. Г. Модель эволюции самогравитирующего газового диска // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2012. – № 80. – С. 1–24.
10. Parshin D. V., Cherevko A. A. & Chupakhin A. P. Steady vortex flows of a self-gravitating gas // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2014. – Vol. 55. – P. 327–334. – DOI: 10.1134/S0021894414020151.
11. Ovsyannikov L. V. Singular vortex // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 1995. – Vol. 36. – P. 360–366. – DOI: 10.1007/BF02369772.
12. Chuev N. P. On the existence and uniqueness of the solution to the Cauchy problem for a system of integral equations describing the motion of a rarefied mass of a self-gravitating gas // Computational Mathematics and Mathematical Physics. – 2020. – Vol. 60, No. 4. – P. 663–672. – DOI: 10.1134/S0965542520040077.
13. Легкоступов М. С. К вопросу о модели образования планетных систем звезд солнечного типа // Математическое моделирование. – 2020. – Т. 32, № 3. – С. 81–101.
14. Чуев Н. П. Аналитический метод исследования пространственных задач динамики самогравитирующего газа // Вычислительные технологии. – 1998. – Т. 3, № 1. – С. 79–89.

15. Чуев Н. П. Задача Коши для системы интегральных уравнений типа Вольтерра, описывающей движение конечной массы самогравитирующего газа // Известия Иркутского государственного университета. Сер. Математика. – 2020. – Т. 33. – С. 35–50. – DOI: 10.26516/1997-7670.2020.33.35.
16. Чуев Н. П. Метод интегральных уравнений Вольтерра в исследовании динамики самогравитирующего газа, ограниченного свободной поверхностью // Вестник УрГУПС. – 2022. – № 2 (54). – С. 4–23.
17. Станюкович К. П. Неустановившиеся движения сплошной среды. – М. : Наука, 1971. – 875 с.
18. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. – М. : Гостехиздат, 1953. – 415 с.
19. Сретенский Л. Н. Теория ньютоновского потенциала. – М. ; Л. : ОГИЗ, 1946. – 318 с.
20. Овсянников Л. В. Лекции по основам газовой динамики. – М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2003. – 336 с.
21. Ovsyannikov L. V. A gas pendulum // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. – 2000. – Vol. 41. – P. 865–869. – DOI: 10.1007/BF02468732.
22. Васильева А. Б., Тихонов Н. А. Интегральные уравнения. – 2-е изд., стереот. – М. : Физматлит, 2002. – 160 с.