

MODELING OF A COMPLETE DEFORMATION DIAGRAM FOR MATERIALS WITH PROPERTIES OF AUXETICS

S. S. Volkov*, V. V. Struzhanov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
 620049, 34 Komsomolskaya st., Ekaterinburg, Russian Federation*

*Corresponding author. E-mail: volkovss48@yandex.ru;
 address for correspondence: ul. Komsomolskaya 34, 620049, Ekaterinburg, Russian Federation.
 Tel.:+7(343)375 35 94; fax: +7 (343)374 53 30

A two-level model of a material with random deformation and strength properties of microstructure elements is used. The damage of microstructure elements with random levels of porosity is considered. The microstructural strength condition is defined by the distribution density of random critical strains. The calculation of the descending branch of the complete deformation diagram is performed with regard for the negative coefficient of transverse deformation of the material. The influence of the microstructure properties on the strain-stress relationship of the material is demonstrated.

Keywords: microstructure, random properties, complete deformation diagram, damage, failure.

DOI: 10.17804/2410-9908.2017.2.040-052

References

1. Trusov P.V., Volegov P.S., Yanz A. Yu. Two-Scale Models of Polycrystals: Evaluation of Validity of Ilyushin's Isotropy Postulate at Large Displacement Gradients. *Phys. Mesomech.*, 2016, vol. 19, no. 1, pp. 21–34. DOI: 10.1134/S1029959916010033.
2. Vildeman V.E., Sokolkin Yu.V., Tashkinov A.A. *Mekhanika neuprugogo deformirovaniya i razrusheniya kompozitsionnykh materialov* [Mechanics of Non-Elastic Deformation and Fracture of Composite Materials]. Nauka Publ., Moscow, 1997. – 288 p. (In Russian).
3. Sih G.C. Fracture mechanics in retrospect in contrast to multiscaling in prospect. In: *Proceedings of the 17-th National Conference of Italian Group of Fracture*, edited by A. Finelli and L. Nobile, Bologna, June 16–18, 2004, pp. 15–37.
4. Volkova T.A. *Mekhanika zernistykh kompozitov* [Mechanics of Granular Composites]. UR-GUPS Publ., Ekaterinburg, 2008. – 174 p. (In Russian).
5. Chausov N.G., Voytyuk D.G., Pilipenko A.P., Kuzmenko A.M. Installation for testing materials with the construction of complete deformation diagrams *Problemy prochnosti*, 2004, no. 5, pp. 117–123. ISSN 0556-171X. (In Russian).
6. Struzhanov V.V., Volkov S.S., Volkova T.A. Development of Microstructure Damage in Structurally Heterogeneous Materials under Deformation. *Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, iss. 3, pp. 21–30. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-3/2016-3_83.html (accessed 25.02.2017). DOI: 10.17804/2410-9908.2016.3.021-030.
7. Struzhanov V.V. On the construction of a structural model of a material on the basis of the results of a macroscale experiment. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2009, vol. 1, iss. 18, pp. 283–286. (In Russian).
8. Struzhanov V.V., Bashurov V.V. Mazing's modification model. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, 2007, vol. 1, iss. 14, pp. 29–39. (In Russian).
9. Privalova V.V., Struzhanov V.V. Some features of changes in the elastic properties of a brittle material under cyclic tension. *Uchonye zapiski Komsomolskogo-na-Amure gosudarstvennogo*

- tekhnicheskogo universiteta. Ser. Nauki o prirode i tekhnike*, 2012, no. 1–1 (9), pp. 94–99. (In Russian).
10. Volkova T.A., Volkov S.S. Microstructure damage related to deformation properties of grain composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2008, vol. 49, iss. 3, pp. 242–250. DOI: 10.1016/j.tafmec.2008.02.004.
 11. Volkova T.A., Volkov S.S., Microstructure damage related to stress-strain curve for grain composites. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 2009, vol. 52, iss. 2, pp. 83–90. DOI: 10.1016/j.tafmec.2009.08.007.
 12. Surikova N.S., Panin V.E., Derevyagina L.S., Lutfullin R.Ya., Manzhina E.V., Kruglov A.A., Sarkeeva A.A. Micromechanisms of Deformation and Fracture in a VT6 Titanium Laminate under Impact Load. *Phys. Mesomech.*, 2015, vol. 18, no. 3, pp. 250–260. DOI: 10.1134/S1029959915030091.
 13. Schastlivtsev V.M., Tabatchikova T.I., Yakovleva I.L., Klyueva S.Yu., Kruglova A.A., Khlusova E.I., Orlov V.V. Microstructure and properties of low-carbon weld steel after thermomechanical strengthening. *The Physics of Metals and Metallography*, 2012, vol. 113, no. 5, pp. 480–488. DOI: 10.1134/S0031918X12050067.
 14. Smirnov S.V., Perunov E.N., Konovalov D.A., Vyskrebentsev S.V. Using a Spatial Location Device for Express Diagnostics of Current Mechanical Properties of Metal Structures. *Diagnosics, Resource and Mechanics of materials and structures*, 2016, iss. 4, pp. 89–94. Available at: http://dream-journal.org/issues/2016-4/2016-4_96.html (accessed 24.02.2017). DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.089-094.
 15. Konyok D.A., Voitsekhovskiy K.V., Pleskachevskiy Yu.M., Shilko S.V. Materials with negative Poisson's ratio (survey). *Mekhanika kompozitnykh materialov i konstruksiy*, 2004, vol. 10, no. 1, pp. 35–69. (In Russian).
 16. Choi J.B., Lakes R.S. Nonlinear properties of metallic cellular materials with a negative Poisson's ratio. *J. Mater. Sci.*, 1992, vol. 27, iss. 17, pp. 5373–5381. DOI: 10.1007/BF01166005.
 17. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio. *Science*, 1987, vol. 235, iss. 4792, pp. 1038–1040. DOI: 10.1126/science.235.4792.1038.
 18. Friis E.A., Lakes R.S., Park. J.B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials. *J. Mater. Sci.*, 1988, vol. 23, iss. 12, pp. 4406–4414. DOI: 10.1007/BF00551939.
 19. Ilyinykh A.V., Vildeman V.E. Modeling of the structure and fracture of granular composites. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*, 2012, vol. 5, no. 4, pp. 443–451. (In Russian).
 20. Volkov S.S. *Mekhanika anizotropnykh kompozitov* [Mechanics of Anisotropic Composites] Ekaterinburg, UrO RAN Publ., 2010, 85 p. (In Russian).
 21. Permikin V.S. On the mechanism of steel fracture under high-temperature creep. In: *Mekhanika microneodnorodnykh materialov i razrushenie*. Vestnik USTU, Ekaterinburg, 2006, vol. 11 (82), pp. 104–109. (In Russian).

Подана в журнал: 23.04.2017
УДК 539.3
DOI: 10.17804/2410-9908.2017.2.040-052

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОЛНОЙ ДИАГРАММЫ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ДЛЯ МАТЕРИАЛОВ СО СВОЙСТВАМИ АУКСЕТИКОВ

С. С. Волков*, В. В. Стружанов

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения Уральского отделения Российской академии наук,
ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация*

*Ответственный автор. Электронная почта: volkovss48@yandex.ru;
адрес для переписки: ул. Комсомольская 34, Екатеринбург, Российская Федерация.
Тел.: +7(343) 375–35–94; факс: +7(343)374–53–30

Используется двухуровневая модель среды со случайными деформационными и прочностными свойствами элементов микроструктуры. Рассматривается поврежденность элементов микроструктуры со случайным уровнем разрыхления. Микроструктурное условие прочности задано плотностями распределения случайных критических деформаций. Расчет ниспадающей ветви полной диаграммы деформирования выполнен с учетом отрицательного коэффициента поперечной деформации материала. Показано влияние свойств микроструктуры на зависимость между деформациями и напряжениями материала.

Ключевые слова: микроструктура, случайные свойства, полная диаграмма деформирования, поврежденность, разрушение

1. Введение

Разработка многоуровневых моделей деформируемой среды [1–5] дает возможность учитывать влияние свойств микроструктуры на поведение материала в конструкциях. Накопление поврежденности элементов микроструктуры в процессе эксплуатации вызывает постепенную деградацию свойств материала и приводит затем к нелинейной зависимости между напряжениями и деформациями [4–6]. Основные характеристики статической прочности твердых тел получают путем обработки диаграмм деформирования, учитывая, как правило, восходящую ветвь. Сопrotивление материала на стадии разупрочнения (ниспадающий участок диаграммы) также несет дополнительную информацию, в частности, об особенностях структуры поврежденного материала в период, предшествующий окончательному разделению тела на части.

Использование метода полных диаграмм деформирования полезно для определения параметров поврежденности материалов, для оценки деградации механических свойств металла, включая и трещиностойкость, ответственного оборудования в процессе эксплуатации [7]. Структурные модели, дополненные условиями разрушения элементов, позволили прогнозировать наличие падающей ветви на диаграмме деформирования материала на закритической стадии нагружения [8].

Выявление и исследование закономерностей неупругого деформирования структурно-неоднородных сред является важной и актуальной задачей. Информация об особенностях механического поведения и влиянии структурных параметров на процессы накопления повреждений рассматривается как основа для развития методов расчёта ответственных конструкций [7–14].

Разрушенные элементы на стадии деградации остаются при этом в составе системы, происходит разрыхление материала. Связь ниспадающей ветви диаграммы с отрицательными коэффициентами Пуассона отмечена в работе [8]. Потеря прочности материала и обрыв

восходящей ветви диаграммы деформирования также сопровождается переходом коэффициента Пуассона к отрицательным значениям [4].

В настоящее время большое внимание уделяется материалам, обладающим отрицательным коэффициентом Пуассона [15–18]. Такие материалы называют ауксетиками от греческого слова «auxetis» – разбухающий. Рассматриваются типичные структуры природных и искусственных ауксетиков и дана их классификация, основанная на подобии деформационных механизмов на различных масштабных уровнях. В большинстве случаев отрицательные значения коэффициента Пуассона являются проявлением особенностей строения структурных элементов [16, 17]. Особое место среди ауксетиков занимают пористые и гранулированные материалы. Это обусловлено сочетанием потребительской ценности пористых материалов (низкая плотность, технологичность, изоляционные свойства) и наличием достаточно развитых математических моделей деформационного поведения для таких материалов [15].

В ряде работ рассмотрены вопросы математического моделирования стохастических процессов структурного разрушения неоднородных материалов с целью исследования основных закономерностей формирования условий макроразрушения и анализа возможностей описания механического поведения среды на закритической стадии деформирования в терминах эффективных характеристик. Приведены результаты численных экспериментов с построением полных диаграмм деформирования [19].

Развитие статистических методов исследования, в том числе при построении диаграмм нагружения, дает возможность изучения фактического состояния структуры металлов и продления сроков эксплуатации металлоконструкций [14, 20].

Таким образом, представляется перспективной возможность обобщить известные методы механики микронеоднородных сред для материалов со свойствами ауксетиков. При этом изучение методов построения полной диаграммы деформирования полезно для прогнозирования живучести конструкционных материалов.

2. Модель микронеоднородной среды

Рассмотрим модель микронеоднородной среды [4, 10], содержащую элементы двух порядков малости. Элементы на макроуровне обладают детерминированными механическими свойствами. Среда является макрооднородной и макроизотропной. Элементы микроструктуры – это элементы второго порядка малости. Они обладают случайными деформационными и прочностными свойствами.

Для элементов микроструктуры в точках $X = (x_1, x_2, x_3)$ рассмотрим случайный модуль Юнга – $E(X)$ и детерминированный коэффициент Пуассона – ν . Угловые скобки обозначают операцию осреднения случайных величин. Математические ожидания модулей обозначим $E = \langle E(X) \rangle$. Тензор случайных модулей упругости $\mathbf{I}(X)$ выразим через случайные модули $K(X)$ и $G(X)$, используя \mathbf{V} – объемную и \mathbf{D} – девиаторную составляющие единичного тензора четвертого ранга \mathbf{I} [4].

$$\mathbf{I}(X) = 3K(X)\mathbf{V} + 2G(X)\mathbf{D}. \quad (1)$$

Тензор $\mathbf{I}(X)$ можно записать также через случайный модуль Юнга $E(X)$:

$$\mathbf{I}(X) = E(X) \left(\frac{1}{1-2\nu} \mathbf{V} + \frac{1}{1+\nu} \mathbf{D} \right). \quad (2)$$

Расчет макроскопических свойств композита по свойствам элементов микроструктуры является одной из основных задач теории композитов. К тензору средних модулей упругости $\mathbf{C} = \langle \mathbf{I}(X) \rangle$ добавляется тензор поправок \mathbf{h} , учитывающий взаимодействие элементов микроструктуры [2, 4]. С помощью поправки вычисляем тензор макромодулей упругости

(эффективных свойств) композита: $\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{h}$. Тензор поправок можно выразить также через моментные функции модуля Юнга:

$$\mathbf{h} = E \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle E^o(X)^{n+1} \rangle}{E^{n+1}} \left(\frac{1}{1-2\nu} \left(-\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)} \right)^n \mathbf{V} + \frac{1}{1+\nu} \left(-\frac{1,6-2\nu}{2(1+\nu)} \right)^n \mathbf{D} \right). \quad (3)$$

С учетом поправки в результате получим макромодули \tilde{E} , \tilde{K} , \tilde{G} и коэффициент Пуассона $\tilde{\nu}$. Зависимость этих параметров от исходных данных задачи, в том числе и от поврежденности, проведена в работе [10]. Поврежденность элементов микроструктуры материала развивается в процессе эксплуатации конструкции. Поврежденные зерна изменяют деформационные и прочностные свойства композита.

3. Микроструктурное условие прочности

Рассмотрим случайную критическую деформацию e на отрезке $[\varepsilon_t; \varepsilon_z]$, где ε_t и ε_z – деформации предела пропорциональности и разрушения соответственно, полученные из макроэксперимента [7]. Пусть критическая деформация имеет усеченное экспоненциальное распределение с плотностью $f(x, \lambda)$:

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x) & \text{при } x \in [\varepsilon_t, \varepsilon_z] \\ 0 & \text{при } x \notin [\varepsilon_t, \varepsilon_z] \end{cases}. \quad (4)$$

Тогда поврежденность микроструктуры $q(e, \lambda)$ при величине деформации e будет равна вероятности превышения предела пропорциональности ε_t . Поврежденность вычисляется через интеграл от плотности распределения на интервале $[\varepsilon_t; \varepsilon]$:

$$q(e, \lambda) = \int_{\varepsilon_t}^e f(x, \lambda) dx = \exp(-\lambda \cdot \varepsilon_t) - \exp(-\lambda \cdot e).$$

С развитием деградации материала под нагрузкой наибольшая плотность распределения будет смещаться к меньшим деформациям. На рис. 1 показаны графики плотности вероятностей распределения критических деформаций на интервале $[0,1; 0,8]$ при $\lambda = 2$, $\lambda = 4$ и $\lambda = 7$. Чем больше параметр λ , тем больше вероятность разрушения зерен на начальных этапах деформирования. На рис. 2 приведены результаты расчета относительной поврежденности микроструктуры $q(e)$ в зависимости от вида распределения критических деформаций. Чем быстрее развивается поврежденность на начальных стадиях, тем более выпуклым является график при $\lambda = 7$. При $\lambda = 2$ поврежденность $q(e)$ развивается почти равномерно.

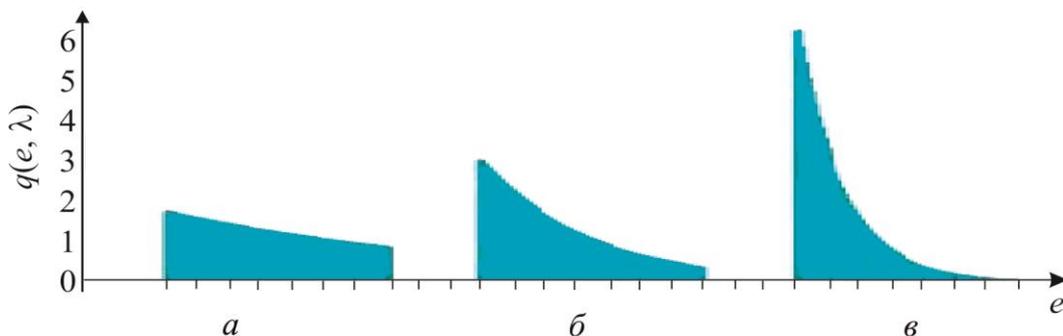


Рис. 1. Варианты плотности вероятностей показательного распределения критических деформаций на интервале $[0,1; 0,8]$ при различных значениях параметра λ :

$$a - \lambda = 2; \quad б - \lambda = 4; \quad в - \lambda = 7$$

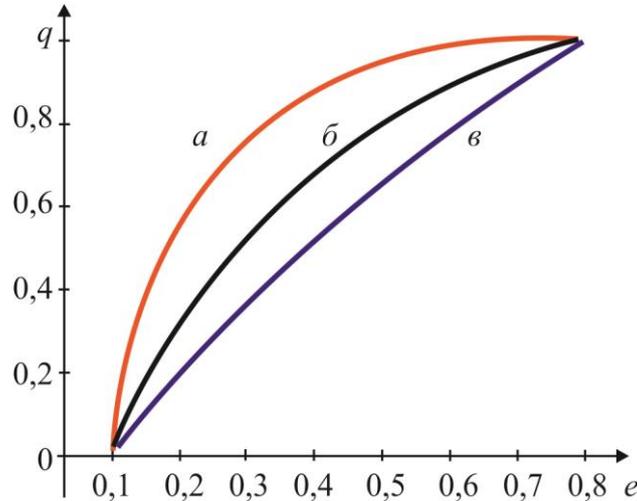


Рис. 2. Развитие поврежденности микроструктуры $q(e)$ в зависимости от вида распределения критических деформаций: $a - \lambda = 7$; $b - \lambda = 4$; $v - \lambda = 2$

4. Поврежденность элементов микроструктуры в виде разрыхлений

Рассмотрим поврежденность в виде микроразрыхлений. Металлическая составляющая в микрорыхлотах составляет обычно 70–80 % их объема [21]. Разрыхленные элементы микроструктуры способны нести некоторую нагрузку. В микроструктуре металла с различной вероятностью одновременно присутствуют и поры, и микрорыхлоты различной степени наполненности.

Случайная индикаторная функция поврежденности $\omega(X)$ равна единице, если в элементе X произошло повреждение. Функция $\omega(X)$ равна нулю, если в элементе X сохранилась сплошность материала. Тогда $q = \langle \omega(X) \rangle$ – поврежденность, т. е. относительное содержание разрушенных, разрыхленных элементов. Относительное содержание целых сплошных элементов равно $p = 1 - q$.

Степень разрыхленности $\xi(X)$ отдельных элементов также считаем случайной. $\langle \xi(X) \rangle = z$, где $z \in [0; 1]$. Параметр z характеризует среднюю степень разрыхления поврежденного зерна микроструктуры. Разрыхленность приводит к некоторой потере несущей способности элемента и уменьшает модуль упругости. Так, при разрыхленности 20 % будем считать, что элемент микроструктуры сохраняет 80 % несущей способности. В разрыхленном зерне X получим измененный модуль Юнга: $E(1 - \xi(X))$. Случайные функции $\omega(X)$ и $\xi(X)$ независимы между собой.

В результате случайный модуль Юнга выразим через параметр $\eta(X)$, учитывает случайное расположение и случайную степень разрыхления поврежденных элементов микроструктуры:

$$E(X) = E\eta(X); \eta(X) = 1 - \omega(X) \xi(X).$$

В самом деле, в поврежденном зерне $\omega(X) = 1$ и $E(X) = E(1 - \xi(X))$. Если зерно сплошное, то $\omega(X) = 0$ и $E(X) = E$.

В расчет поправок к средним модулям упругости (3) входят вариации случайных величин η^0, ω^0, ξ^0 . Вычислим тензор поправок в корреляционном приближении.

$$\begin{aligned} \eta(X) &= 1 - \omega(X) \xi(X); \langle \eta \rangle = 1 - qz; \eta^0 = \omega\xi - qz; \langle (\eta^0)^2 \rangle = \langle \omega^2 \xi^2 - 2\omega\xi qz + q^2 z^2 \rangle = \\ &= \langle \omega \xi^2 - 2\omega\xi qz \rangle + q^2 z^2 = q \langle \xi^2 \rangle - 2q^2 z^2 + q^2 z^2 = q \langle \xi^2 \rangle - q^2 z^2 = \\ &= q(D_o + z^2) - q^2 z^2 = qD_o + z^2 qp. \end{aligned}$$

$$D_{\eta} = qD_o + z^2 pq.$$

Здесь D_{η} , D_o – дисперсии случайных параметров η , o .

Подставив в (3) найденные выше моментные функции, получим тензор поправок \mathbf{h} и тензор $\tilde{\mathbf{C}}$ макромодулей упругости среды с микроструктурной поврежденностью:

$$\mathbf{h} = -E(qD_{\xi} + z^2 pq) \left(\frac{1+\nu}{3(1-2\nu)^2} \mathbf{V} + \frac{1.6-2\nu}{2(1+\nu)^2} \mathbf{D} \right);$$

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C} + \mathbf{h} = E \left(\frac{1}{1-2\nu} (1-A) \mathbf{V} + (1-B) \frac{1}{1+\nu} \mathbf{D} \right) = 3\tilde{K} \mathbf{V} + 2\tilde{G} \mathbf{D}; \quad (5)$$

$$A = (qD_{\xi} + z^2 pq) \frac{1+\nu}{3(1-2\nu)}, \quad B = (qD_{\xi} + z^2 pq) \frac{1.6-2\nu}{2(1+\nu)}.$$

Для перехода к изменившимся модулю Юнга и коэффициенту Пуассона \tilde{E} , $\tilde{\nu}$ от вычисленных в (5) макромодулей объемной деформации и сдвига \tilde{K} , \tilde{G} воспользуемся известной формуло:

$$\tilde{E} = \frac{9\tilde{G}}{3 + \tilde{G}/\tilde{K}}; \quad \tilde{\nu} = \frac{3 - 2\tilde{G}/\tilde{K}}{6 + 2\tilde{G}/\tilde{K}}; \quad \tilde{G} = \frac{1-B}{2(1+\nu)}; \quad \tilde{K} = \frac{1-A}{3(1-2\nu)}.$$

Тогда

$$\tilde{E} = \frac{3(1-A)(1-B)}{2(1-A)(1+\nu) + (1-B)(1-2\nu)}; \quad \tilde{\nu} = \frac{(1-A)(1+\nu) - (1-B)(1-2\nu)}{2(1-A)(1+\nu) + (1-B)(1-2\nu)}. \quad (6)$$

Чтобы использовать формулы (5–6) для расчета деформационных свойств материала, нужно задать распределение случайного уровня разрыхленности в поврежденных элементах микроструктуры. Воспользуемся для этого усеченным нормальным распределением $f_o(x)$ на интервале $[0; 1]$.

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2s\mu} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right), & \text{если } x \in [0; 1]; \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1] \end{cases} \quad (7)$$

$$\mu = \int_0^1 \frac{1}{2s} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2s^2}\right) dx.$$

Примем $m = z$ – средней степени разрыхленности элемента микроструктуры. Используем также аналог правила «трех сигма» для определения s . Если преобладает небольшая разрыхленность, то $s = (1-z)/3$. Для большой средней разрыхленности с преобладанием пор примем $s = z/3$.

На рис. 3 показаны графики плотностей распределения вероятностей $f_{\xi}(x)$ случайного уровня разрыхленности x . График (рис. 3, а) соответствуют небольшой средней разрыхленности z в диапазоне $0 \leq z \leq 0,5$ и имеют положительную асимметрию. На графике (рис. 3, б) разрыхленность достаточно велика при $0,5 < z \leq 1$, плотность распределения в этом случае имеет отрицательную асимметрию.

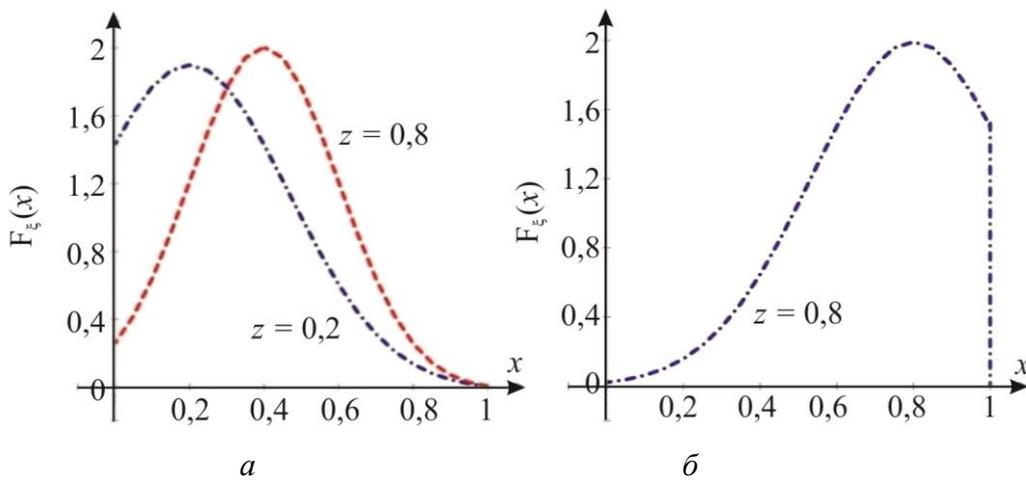


Рис. 3. Плотности распределения вероятностей для различной степени разрыхленности элементов микроструктуры:
 $a - 0 \leq z \leq 0,5$; $b - 0,5 < z \leq 1$

5. Изменение деформационных свойств материала в процессе нагружения

Рыхлоты приводят к уменьшению несущей способности элемента микроструктуры. Дegradация макросвойств материала при этом развивается медленнее, чем в моделях, учитывающих разрушение микроструктуры только в виде пор. Разрушение микроструктуры в виде пор предполагает полную потерю элемента к сопротивлению нагрузке. При вычислениях без учета разрыхлений происходит обрыв диаграммы деформирования при приближении к нулевым значениям модуля Юнга [11].

На рис. 4 показано изменение модуля \tilde{K} с возрастанием относительного числа поврежденных зерен q для композитов со степенью разрыхления $z = 0,1$; $z = 0,3$; $z = 0,5$. Здесь начальный коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$; коэффициент вариации разрыхленности $k_0 = 0,4$. При большой степени разрыхления модуль \tilde{K} убывает быстрее.

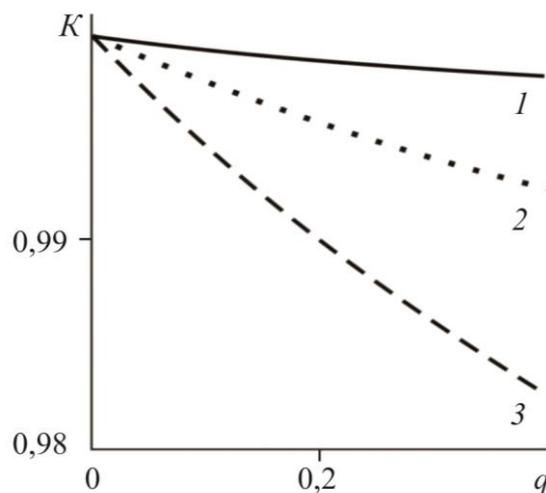


Рис. 4. Изменение модуля объемной деформации K с возрастанием относительного числа поврежденных зерен q и различной степенью разрыхленности z :
 $1 - z = 0,1$; $2 - z = 0,3$; $3 - z = 0,5$

Значительное влияние на вид диаграммы деформирования оказывает также начальный коэффициент Пуассона для неповрежденного материала. Расчеты показывают что, чем больше коэффициент Пуассона до начала нагружения, тем быстрее накапливаются изменения от числа разрушенных зерен и от степени разрыхленности [4].

Изменение коэффициента Пуассона $\nu(e)$ с увеличением деформации e показано на рис. 5. Начальные коэффициенты $\nu(0)$ принимают значения 0,45; 0,35; 0,30; 0,25.

При $\nu(0) = 0,45$ деградация свойств происходит быстро, с переходом в асимптоту. Расчет диаграммы деформирования показывает быстрый ее обрыв [11]. Если $\nu(0) = 0,25$, то изменение деформационных свойств медленнее и соответствующие диаграммы обрываются при более значительных деформациях.

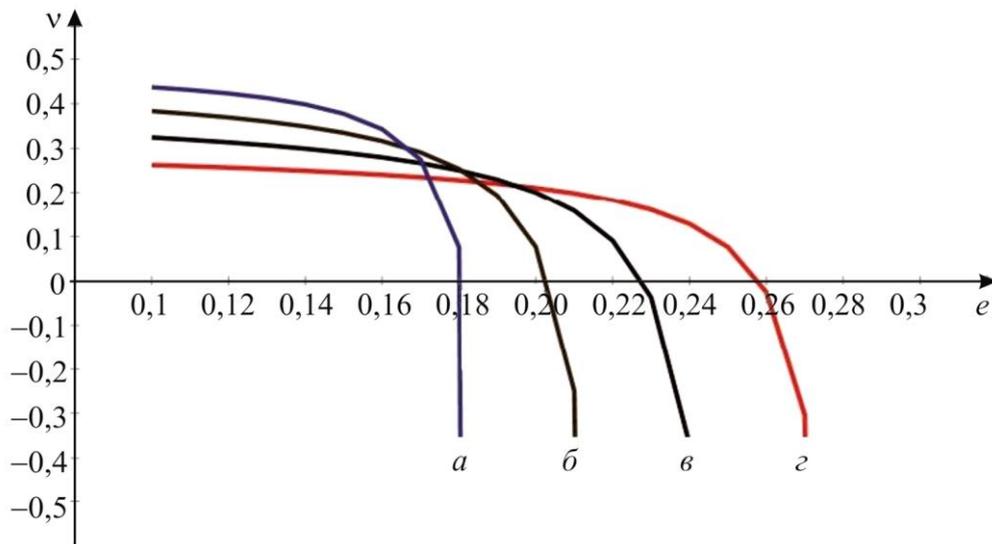


Рис.5. Изменение коэффициента Пуассона $\nu(e)$ под действием поврежденности, соответствующей деформации e , для различных значений начального коэффициента $\nu(0)$:
 $a - \nu(0) = 0,45$; $b - \nu(0) = 0,35$; $v - \nu(0) = 0,30$; $z - \nu(0) = 0,25$

Переход к малым и даже отрицательным коэффициентам Пуассона не приводит сразу к обрыву диаграммы деформирования. Поэтому для построения полных диаграмм деформирования можно попытаться провести расчеты для материалов со свойствами ауксетиков при отрицательных начальных коэффициентах поперечной деформации.

6. Зависимость между деформациями и напряжениями в процессе нагружения

6.1 Полные диаграммы деформирования

Пусть материал имеет начальные модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν . Микроструктурный предел прочности задан случайными критическими деформациями, распределенными на интервале $[\varepsilon_1; \varepsilon_2]$ по показательному распределению (4) с параметром λ . Предполагается, что поврежденный элемент микроструктуры получает случайное относительное разрыхление со средним значением z и усеченным нормальным распределением (7) на отрезке $[0; 1]$.

Рассмотрим алгоритм расчета диаграммы одноосного растяжения с учетом случайных свойств элементов микроструктуры. Деформирование производим поэтапно по жесткой схеме, задавая однородную по объему макродеформацию растяжения $e = e_i = i \cdot \Delta e$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $\Delta e = \text{const}$). Тогда на каждом $(i+1)$ -м этапе макронапряжение определяется

выражением, которое содержит \tilde{E}_i – макро модуль, вычисленный для поврежденности, достигнутой на предыдущем этапе:

$$\sigma = \sigma_{i+1} = \sigma_i + \tilde{E}_i \cdot \Delta e. \quad (8)$$

Диаграмма деформирования обрывается при исчерпывании критических уровней деформаций и микроразрушений.

В расчете макро модуля \tilde{E}_i последовательно участвуют функции (4–7), содержащие переменные величину e и параметры ε_t , ε_z , E , ν , λ , z . Перечисленные шесть параметров управляют поведением диаграммы деформирования. От сочетания этих параметров зависит форма графика $\sigma = \sigma(e)$.

Выясним на числовых примерах влияние свойств материала на зависимость между напряжениями и деформациями. Ограничимся в расчетах интервалом $[0,1; 0,8]$ для распределения критических деформаций. Примем также модуль Юнга E неповрежденного материала равным единице. Используя малые приращения Δe , перейдем к интегральной зависимости между деформациями и напряжениями.

$$\sigma(e, \nu, \lambda, z) = \int_{\varepsilon 1}^e E(e, \nu, \lambda, z) de.$$

На рисунках 6–9 показаны результаты расчетов диаграммы одноосного растяжения для различных сочетаний числовых значений параметров ν , λ , z . Графики на рис. 6 показывают, что полная диаграмма при начальном коэффициенте Пуассона $\nu(0) = -0,2$ обеспечивает живучесть материала при деформациях $e = 0,74$. Если же $\nu(0) = -0,4$, то деформации живучести меньше и достигают лишь $e = 0,65$.

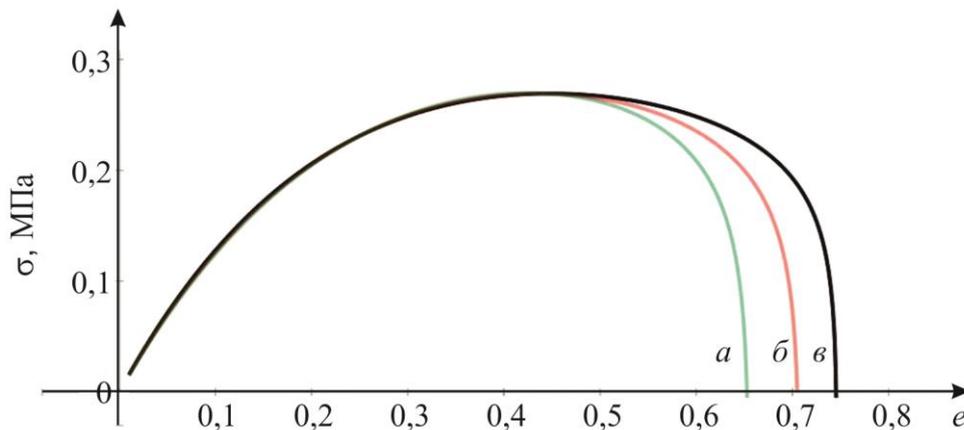


Рис. 6. Диаграммы деформирования для распределения критической деформации при $\lambda = 3$ и разрыхленности $z = 0,2$ для различных значений начального коэффициента Пуассона:

$$a - \nu(0) = -0,4; \quad б - \nu(0) = -0,3; \quad в - \nu(0) = -0,2$$

На графиках рис. 7 показано, что при прочих равных условиях полная диаграмма при более медленном накоплении поврежденности с $\lambda = 3$ имеет большую протяженность и обрывается при $e = 0,71$. Если параметр условия прочности $\lambda = 5$, то на первых же этапах деформирования быстро возрастает поврежденность. Затем процесс микроразрушения замедляется, тем не менее при $\lambda = 5$ деформация живучести будет лишь $e = 0,61$.

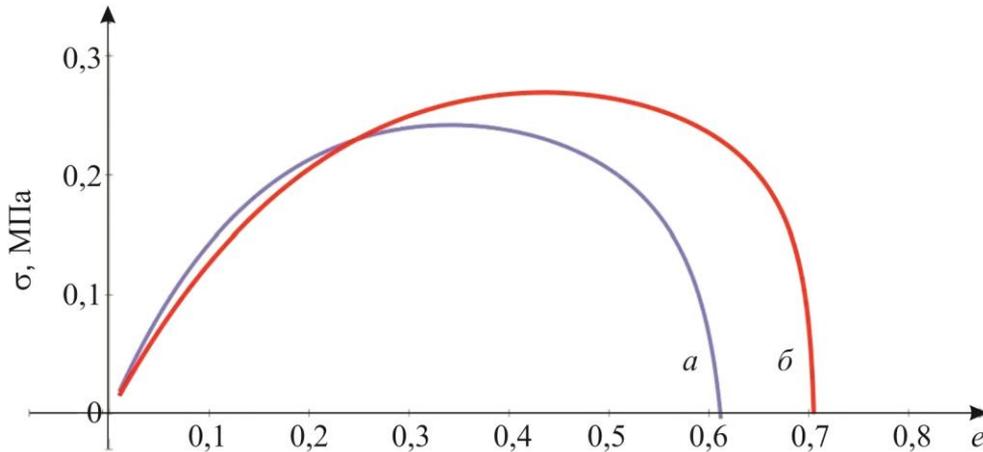


Рис. 7. Диаграммы деформирования для начального коэффициента Пуассона $\nu(0) = -0,3$ и степени разрыхленности $z = 0,2$ для двух видов распределения критической деформации при: $a - \lambda = 5$; $b - \lambda = 3$

На графиках рис. 8 и рис. 9 демонстрируется совместное влияние на диаграмму деформирования начального коэффициента Пуассона $\nu(0)$ и степени разрыхленности z . При небольшой разрыхленности $z = 0,2$ получаем полную диаграмму деформирования. Если же разрыхленность больше и $z = 0,4$, то полной диаграммы не получается. Обрыв происходит задолго до возникновения предельной деформации живучести. Аналогичное поведение диаграмм с учетом степени разрыхленности наблюдается на рис. 8 при $\nu(0) = -0,2$ и на рис. 9 при $\nu(0) = -0,4$. Но, как и следовало ожидать, полные диаграммы при $\nu(0) = -0,2$ достигают предельной деформации $e = 0,75$, а при $\nu(0) = -0,4$ получим лишь $e = 0,65$.

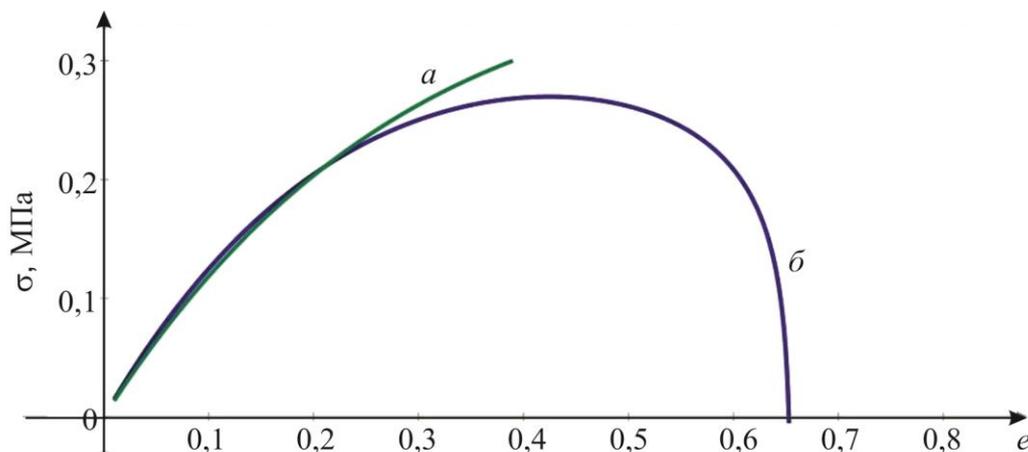


Рис. 8. Диаграммы деформирования для начального коэффициента Пуассона $\nu(0) = -0,2$, для распределения критической деформации при $\lambda = 3$ при двух вариантах степени разрыхленности: $a - z = 0,4$; $b - z = 0,2$

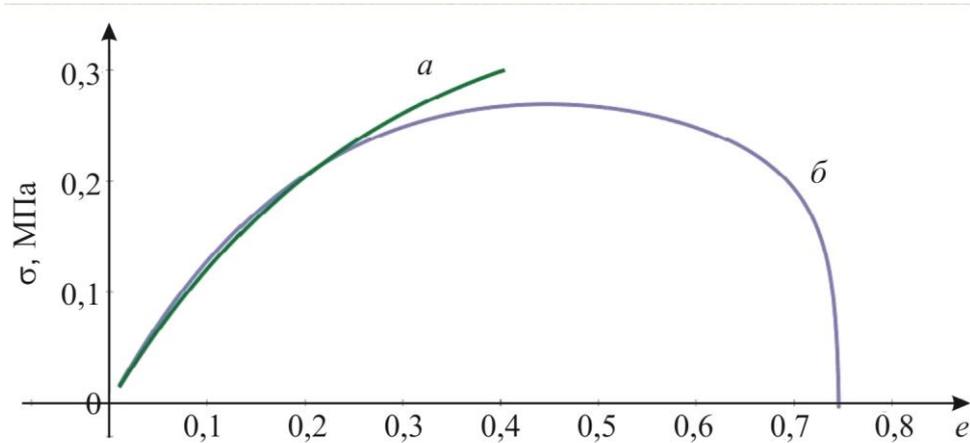


Рис. 9. Диаграммы деформирования для начального коэффициента Пуассона $\nu(0) = -0,4$, для распределения критической деформации при $\lambda = 3$ при двух вариантах степени разрыхленности: $a - z = 0,4$; $b - z = 0,2$

Таким образом, использование математической модели деформируемой среды с отрицательными коэффициентами Пуассона и поврежденностью в виде микро разрыхлений позволяет рассчитывать полные диаграммы деформирования и исследовать влияние на них свойств материала.

7. Заключение

Разработана методика расчета поврежденности микроструктуры, использующая плотность распределения случайной критической деформации материала. Показано изменение коэффициента Пуассона в процессе нагружения и обоснован переход к расчету полных диаграмм деформирования с отрицательным коэффициентом Пуассона. Исследовано влияние случайных свойств микроструктуры на диаграммы деформирования материала. Показано, что учет в модели не только пор, но и разрыхлений, несущих после разрушения некоторую нагрузку, дает возможность рассчитывать полную диаграмму деформирования, включающую ниспадающую ветвь.

Литература

1. Trusov P. V., Volegov P. S., Yanz A. Yu. Two-Scale Models of Polycrystals: Evaluation of Validity of Plyushin's Isotropy Postulate at Large Displacement Gradients // Phys. Mesomech. – 2016. – Vol. 19, no. 1. – P. 21–34. – DOI: 10.1134/S1029959916010033.
2. Вильдеман В. Э., Соколкин Ю. В., Ташкинов А. А. Механика неупругого деформирования и разрушения композитных материалов / под ред. Ю. В. Соколкина. – М. : Наука. Физматлит, 1997. – 288 с.
3. Sih G. C. Fracture mechanics in retrospect in contrast to multiscaling in prospect // Proceedings of the 17-th National Conference of Italian Group of Fracture, Bologna, June 16–18 / ed. by A. Finelli, L. Nobile. – 2004. – P. 15–37.
4. Волкова Т. А. Микромеханика зернистых композитов. – Екатеринбург: УрГУПС, 2008. – 174 с.
5. Установка для испытаний материалов с построением полных диаграмм деформирования / Н. Г. Чаусов, Д. Г. Войтюк, А. П. Пилипенко, А. М. Кузьменко // Проблемы прочности. – 2004. – № 5. – С. 117–123. – ISSN 0556-171X.
6. Struzhanov V. V., Volkov S. S., Volkova T. A. Development of Microstructure Damage in Structurally Heterogeneous Materials under Deformation. *Diagnosics, Resource and Mechanics*

- of materials and structures. – 2016. – Iss. 3. – P. 21–30. URL: http://dream-journal.org/issues/2016-3/2016-3_83.html (дата обращения: 25.02.2017). – DOI: 10.17804/2410-9908.2016.3.021-030.
7. Стружанов В. В. О построении структурной модели материала по результатам макроэксперимента // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2009. – Т. 1 (18) – С. 283–286.
 8. Стружанов В. В., Башуров Вяч. В. Модификационная модель Мазинга // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2007. – Т. 1 (14) – С. 29–39.
 9. Привалова В. В., Стружанов В. В. Некоторые закономерности изменения свойств упругохрупкого материала в ходе циклического растяжения // Ученые записки Комсомольского-на-Амуре государственного технического университета. Сер. Науки о природе и технике. – 2012. – № 1–1 (9). – С. 94–99.
 10. Volkova T. A., Volkov S. S. Microstructure damage related to deformation properties of grain composites // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2008. – Vol. 49, iss. 3. – P. 242–250. – DOI: 10.1016/j.tafmec.2008.02.004.
 11. Volkova T. A., Volkov S. S., Microstructure damage related to stress- strain curve for grain composites // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. – 2009. – Vol. 52, iss. 2. – P. 83–90. – DOI: 10.1016/j.tafmec.2009.08.007.
 12. Micromechanisms of Deformation and Fracture in a VT6 Titanium Laminate under Impact Load / N. S. Surikova, V. E. Panin, L. S. Derevyagina, R. Ya. Lutfullin, E. V. Manzhina, A. A. Kruglov, A. A. Sarkeeva // Phys. Mesomech. – 2015. – Vol. 18, no. 3. – P. 250–260. – DOI: 10.1134/S1029959915030091.
 13. Microstructure and properties of low-carbon weld steel after thermomechanical strengthening / V. M. Schastlivtsev, T. I. Tabatchikova, I. L. Yakovleva, S. Yu. Klyueva, A. A. Kruglova, E. I. Khlusova, V. V. Orlov // The Physics of Metals and Metallography. – 2012. – Vol. 113, no. 5. – P. 480–488. – DOI: 10.1134/S0031918X12050067.
 14. Using a Spatial Location Device for Express Diagnostics of Current Mechanical Properties of Metal Structures / S. V. Smirnov, E. N. Perunov, D. A. Konovalov, S. V. Vyskrebentsev // Diagnostics, Resource and Mechanics of materials and structures. – 2016. – Iss. 4. – P. 89–94. – URL: http://dream-journal.org/issues/2016-4/2016-4_96.html (дата обращения: 24.02.2017). – DOI: 10.17804/2410-9908.2016.4.089-094.
 15. Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор) / Д. А. Конёк, К. В. Войцеховский, Ю. М. Плескачевский, С. В. Шилько // Механика композитных материалов и конструкций. – 2004. – Т. 10, № 1. – С. 35–69.
 16. Choi J. B., Lakes R. S. Nonlinear properties of metallic cellular materials with a negative Poisson's ratio // J. Mater. Sci. – 1992. – Vol. 27, iss. 17. – P. 5373–5381. – DOI: 10.1007/BF01166005.
 17. Lakes R. Foam structure with a negative Poisson's ratio. Science. – 1987, – Vol. 235, iss. 4792. – P. 1038–1040. – DOI: 10.1126/science.235.4792.1038.
 18. Friis E. A., Lakes R. S., Park J. B. Negative Poisson's ratio polymeric and metallic materials // J. Mater. Sci. – 1988. – Vol. 23, iss. 12. – P. 4406–4414. – DOI: 10.1007/BF00551939.
 19. Ильиных А. В., Вильдеман В. Э. Моделирование структуры и процессов разрушения зернистых композитов. Вычислительная механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 443–451.
 20. Волков С. С. Механика анизотропных композитов. – Екатеринбург : УрО РАН. – 2010. – 85 с.
 21. Пермикин В. С. К механизму разрушения стали при высокотемпературной ползучести. // Механика микронеоднородных материалов и разрушение. – Екатеринбург: Вестник УГТУ УПИ. – 2006. – № 11 (82). – С. 104–109.