

**Received:** 20.10.2021

**Revised:** 02.02.2022

**Accepted:** 25.02.2022

**DOI:** 10.17804/2410-9908.2022.1.016-024

## ON ONE MODEL OF DEFORMATION IN LAMINATED COMPOSITES

V. V. Struzhanov

*Institute of Engineering Science, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,  
34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation*

 <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  [stru@imach.uran.ru](mailto:stru@imach.uran.ru)

Corresponding author: E-mail: [stru@imach.uran.ru](mailto:stru@imach.uran.ru)

Address for correspondence: 34 Komsomolskaya St., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation

Tel.: +7(343)362 30 19

A technique is proposed that makes it possible to predict delamination in laminated composites. The technique is based on taking into consideration binder softening both under uniaxial transverse tension and in a plane stress state formed during longitudinal and transverse tension. The stratification moment is determined by the methods of the mathematical catastrophe theory.

**Keywords:** unidirectional laminated composite, full binder deformation diagram, delamination, catastrophe.

### Acknowledgment

*The work was performed according to the state assignment, theme No. AAAA-A18-118020790145-0.*

### References

1. Bataev A.A., Bataev V.A. *Kompozitsionnye materialy: stroenie, poluchenie, primeneniye* [Composite materials: structure, production, application]. Novosibirsk, Izd-vo NGTU, 2002, 384 p.
2. Mikhailin Yu.A. *Konstruksionnye polimernye kompozitsionnye materialy* [Structural polymer composite materials]. Moscow, Izd-vo Nauchnye osnovy i tekhnologii, 2008, 822 p.
3. Matthews F., Rawlings R. *Kompozitsionnye materialy i konstruksii: Mekhanika i tekhnologii* [Composite materials and structures. Mechanics and technologies]. Moscow, Tekhnosfera, 2004, 407 p.
4. Warden K. *Novye intelektualnye materialy i konstruksii* [New intellectual materials and structures, Rus. transl.]. Moscow, Tekhnosfera, 2006, 223 p.
5. Vorontsov A.N., Murzakhanov G.Kh. & Shchugorev V.N. Delamination failure of composite structures. *Mechanics of Composite Materials*, 1990, vol. 25, pp. 723–737. DOI: 10.1007/BF00613361.
6. Chernyakov S.A., Skvortsov Yu.V. Analysis of delamination propagation in composite structures. *Bulletin of SamGAU*, 2014, No. 4 (56), pp. 249–255.
7. Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bie-material media. *Engineering Fracture Mechanics*, 1987, vol. 28, No. 1, pp. 13–20. DOI: 10.1016/0013-7944(87)90115-9.
8. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. Modelling the formation of new material surfaces during adhesive delamination of a composite. *PNRPU Mechanics Bulletin*, 2018, No. 1, pp. 100–109. DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.09. (In Russian).
9. Astapov N.S., Kornev V.M., Kurguzov V.D. Separation model multimodulus bimaterial with crack. *Physical Mesomechanics*, 2016, vol. 19, no. 4, pp. 49–57. (In Russian).

10. Smirnov S.V., Veretennikova I.A., Vichuzhanin D.I. Modeling of delamination in multilayer metals produced by explosive welding under plastic deformation. *Computational Continuum Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 398–411. DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.38. (In Russian).
11. Brewer J.C., Lagacé P. Quadratic stress for initiation of delamination. *Journal of Composite Materials*, 1988, vol. 22, pp. 1141–1155. DOI: 10.1177/002199838802201205.
12. Zhang Y.W., Zeng K.Y., Thampurun R. Interface delamination generated by indentation in thin film systems – a computational mechanics study. *Materials Science and Engineering: A*, 2001, vols. 319–321, pp. 893–897. DOI: 10.1016/S0921-5093(01)01026-7.
13. Poston T., Stewart I. *Teoriya katastrof i ee primeneniya* [Catastrophe theory and its applications]. Moscow, Mir Publ., 1980, 608 p.
14. Gilmore R. *Prikladnaya teoriya katastrof* [Applied Theory of Catastrophe, book 1]. Moscow, Mir Publ., 1984, 350 p.
15. Struzhanov V.V., Mironov V.I. *Deformatsionnoe razuprochnenie materiala v elementakh konstruktsiy* [Deformational softening of material in structural elements]. Yekaterinburg, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences Publ., 1995, 190 p. (In Russian).
16. Wildemann V.E., Tretyakov M.P. Material testing by plotting total deformation curves. Testing of materials with the construction of complete deformation diagrams. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, pp. 166–170. DOI: 10.3103/S1052618813010159.
17. Sedov L.I. *Mekhanika sploshnoy sredy* [Continuum Mechanics, vol. 1]. Moscow, Nauka Publ., 1970, 492 p.
18. Pers L. *Analiticheskaya dinamika* [Analytical Dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1971, 636 p.
19. Wildemann V.E., Tretyakov M.P. Material testing by plotting total deformation curves. Testing of materials with the construction of complete deformation diagrams. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2013, vol. 42, pp. 166–170. DOI: 10.3103/S1052618813010159.

Подана в журнал: 20.10.2021

УДК 539.3

DOI: 10.17804/2410-9908.2022.1.016-024

## ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАССЛОЕНИЯ В СЛОИСТЫХ КОМПОЗИТАХ

В. В. Стружанов

*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Институт машиноведения имени Э.С. Горкунова Уральского отделения Российской академии наук,  
д. 34, ул. Комсомольская, 620049, г. Екатеринбург, Российская Федерация*

 <https://orcid.org/0000-0002-3669-2032>  [stru@imach.uran.ru](mailto:stru@imach.uran.ru)

Ответственный автор. Электронная почта: [stru@imach.uran.ru](mailto:stru@imach.uran.ru)  
Адрес для переписки: ул. Комсомольская, 34, Екатеринбург, Российская Федерация  
Тел.: +7(343)362–30–19

Предложена методика, позволяющая прогнозировать расслоение в слоистых композициях. Методика основана на включении в рассмотрение процесса разупрочнения связующего как при одноосном поперечном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии, образующемся при продольном и поперечном растяжении. Момент расслоения определяется методами математической теории катастроф.

**Ключевые слова:** однонаправленный слоистый композит, полная диаграмма деформирования связующего, расслоение, катастрофа.

### 1. Введение

Композиционные материалы широко используются в машиностроении благодаря их уникальным свойствам [1–4]. Одним из характерных дефектов, появляющихся при деформировании однонаправленных композиционных материалов, является расслоение. В местах соединения арматуры и связующего могут образоваться несплошности [5–7]. Очевидно, что расслоение существенно влияет на работоспособность конструкций. Поэтому разработке методов расчета на разрушение композиций по типу расслоений всегда уделяется большое внимание, например [8, 9].

В работе предложена новая модель расслоения в слоистых композициях, которая по крайней мере на качественном уровне иллюстрирует механизм данного процесса. Модель основана на включении в рассмотрение стадии разупрочнения связующего, предшествующего его разрушению как при одноосном поперечном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии, вызванном продольным и поперечным растяжениями. Предложены соответствующие модели материала. Для определения момента расслоения применяется аппарат математической теории катастроф [10, 11].

### 2. Качественная теория расслоения слоистого композита

Рассмотрим композиционный материал, состоящий из множества тонких пластин с начальной толщиной  $2h_0$ , соединенных в единую систему посредством некоторого связующего материала малой толщины. Полученную композицию будем растягивать вдоль пластин, задавая продольную деформацию  $\varepsilon$ . При этом считаем, что пластины работают только в области упругости и свойства их материала определяют продольный модуль упругости  $E$  и коэффициент поперечной деформации  $\nu$ .

Мысленно освободим слой от связей. Так как поперечная деформация слоев в свободном состоянии равна  $(-\nu\varepsilon)$ , то расстояние между свободными слоями равняется  $2\Delta = 2h_0\nu\varepsilon$ , при этом толщина слоя имеет величину  $2h = 2h_0(1 - \nu\varepsilon)$  (рис. 1).

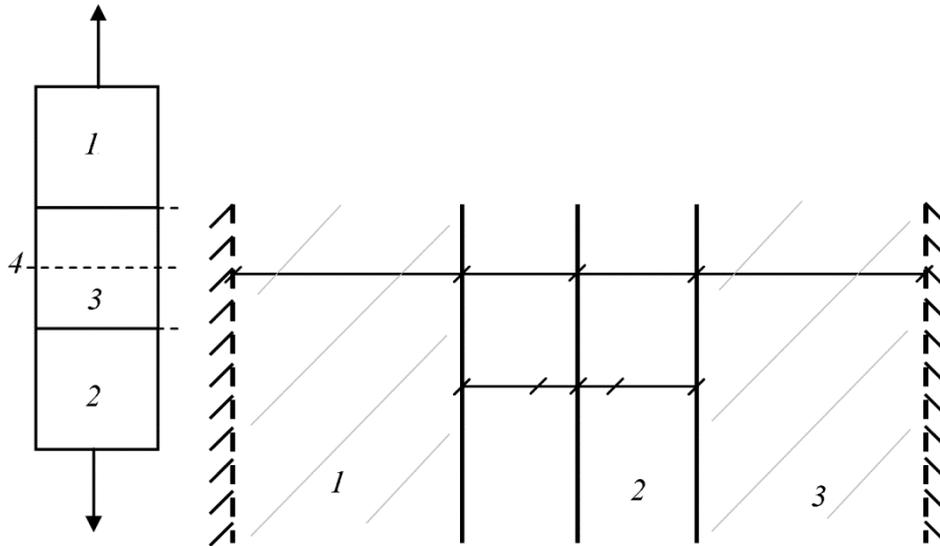


Рис. 1. Фрагменты композита после растяжения (продольный разрез):  
1, 3 – половины упругого слоя после растяжения в свободном состоянии; 2 – связующие;  
пунктирная линия – не перемещающаяся в поперечном направлении середина слоя

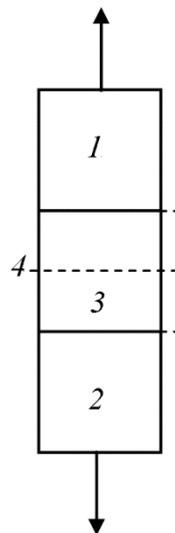


Рис. 2. Растяжение связующего 3, расположенного между жесткими стержнями 1 и 2  
(4 – средняя линия объема связующего)

Объединим слои в единую систему. Тогда слои должны растянуться в поперечном направлении на некоторую величину  $z$ , а связующие – на величину  $2x$  (рис. 1). В результате в композите возникают поперечные напряжения, приводящие к разрушению связующего.

Сопrotивление связующего отрыву задано функцией  $q(x)$  (без учета продольного растяжения), которую можно получить в ходе эксперимента по равновесному растяжению системы, состоящей из двух достаточно жестких стержней, соединенных данным связующим (рис. 2). В результате имеем зависимость  $P(x)$  ( $P$  – растягивающая сила) и отсюда зависимость  $q(x) = P(x)/F$  ( $F$  – площадь поперечного сечения жестких стержней). Отметим, что диаграмма  $q(x)$  обладает падающей до нуля ветвью, т. е. она аналогична полной диаграмме деформирования обычного материала [12, 13].

При квазистатическом возрастании продольной деформации  $\varepsilon$  величина  $h$  уменьшается, а величина  $\Delta$  возрастает (рис. 1). Следовательно, растяжение связующего увеличивается.

Вся система переходит из одного положения равновесия в другое. В конце концов происходит разрушение связующего. Так как разрушение есть невозможность равновесия [14], то необходимо найти момент перехода системы в неустойчивое состояние.

Для решения этой задачи воспользуемся методикой, применяемой в теории катастроф при определении устойчивых и неустойчивых положений равновесия консервативных механических систем [10, 11]. Выпишем лагранжиан системы, учитывая, что кинетическая энергия практически равна нулю. Имеем

$$\Pi = \frac{1}{2} E \left(\frac{z}{h}\right)^2 \cdot hls \cdot 2 + 2ls \int_0^x q(x) dx.$$

Здесь первое слагаемое – энергия деформаций упругих слоев ( $\frac{z}{h}$  – деформация поперечного растяжения упругого слоя;  $l$  – длина слоя;  $s$  – его ширина;  $z = \Delta - x$ ), а второе – энергия связующего. Отметим, что система имеет один обобщенный параметр  $x$  (параметр состояния), а  $\Delta$  – параметр управления (в терминах теории катастроф).

Используя лагранжиан  $\Pi$ , получаем уравнение равновесия (уравнение Лангранжа II рода) [15]:

$$\frac{d\Pi}{dx} = -\frac{E}{h}(\Delta - x) + q(x) = 0, \quad (1)$$

или

$$\Delta = x + \frac{h}{E} q(x). \quad (2)$$

С формальной точки зрения уравнение (1) можно рассматривать как уравнение равновесия некоторой гипотетической системы при постепенном возрастании управляющего параметра  $\Delta$ , т. е. мысленно отодвигаем связующее от слоя.

Теперь необходимо при заданном значении  $h$  найти величину  $\Delta_h$ , при достижении которой связующее разрушается.

Уравнение (1) определяет критические точки функции  $\Pi(x)$ . Известно, что смена типа равновесия (переход системы из состояния устойчивого равновесия в неустойчивое) реализуется в вырожденной критической точке, которая определяется из совместного решения уравнения (1) и уравнения [10, 11]:

$$\frac{d^2\Pi}{dx^2} = \frac{E}{h} + \frac{dq(x)}{dx} = \frac{E}{h} + \lambda^p(x) = 0, \quad (3)$$

где  $\lambda^p(x)$  – касательная к кривой  $q(x)$  в точке  $x$ . В вырожденной критической точке и происходит разрушение связующего (катастрофа системы).

Если решение уравнения (3) существует, т. е. на диаграмме  $q(x)$  найдется такая точка, где касательная равняется  $\left(-\frac{E}{h}\right)$ , то, подставляя данное значение  $x$  в равенство (2), получаем значение  $\Delta = \Delta_h$ , при достижении которого возникает катастрофа. Когда решение уравнения (3) не существует, то система плавно переходит из одного устойчивого состояния в другое устойчивое состояние вплоть до разделения на части (разрушение связующего). В этом случае разрушение связующего реализуется при

$$\Delta_h = \Delta_h^r = x_r + \frac{h}{E} q(x_r) = x_r.$$

Здесь  $x_r$  – предельное поперечное удлинение связующего, где  $q(x_r) = 0$ .

Далее зададим композиту продольную деформацию  $\varepsilon$ . Вычисляем  $h(\varepsilon)$  и  $\Delta(\varepsilon)$ . Подставляем  $h = h(\varepsilon)$  в равенство (2) и уравнение (3). По изложенной выше методике определяем  $\Delta_h$ . При  $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h$  расслоение не происходит. Расслоение также не произойдет, если решение уравнения (3) не существует и  $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h^r$ .

Увеличивая деформацию  $\varepsilon$ , можно найти момент расслоения в композите, когда либо  $\Delta(\varepsilon) = \Delta_h$ , либо  $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h^r$ .

### 3. Свойства связующего при двухосном растяжении

Вообще говоря, связующее находится в условиях двухосного растяжения (плоско-напряженное состояние). Оно имеет продольную деформацию  $\varepsilon$  и поперечную деформацию  $x$ . Возьмем плоский квадратный элемент связующего с единичными размерами. Если материал находится в состоянии упругости, то энергия деформаций равна:

$$W^e = \frac{H}{2(1-\mu^2)}(\varepsilon^2 + 2\mu x\varepsilon + x^2), \quad (4)$$

где  $H$  – модуль упругости;  $\mu$  – коэффициент Пуассона связующего.

Выражение (4) определяет центральные эллипсы (линии уровня потенциала  $W^e$ ), главные оси которых наклонены к декартовым осям  $0x$ ,  $0\varepsilon$  под углом  $\frac{\pi}{4}$ . Произвольная точка  $(x, \varepsilon)$  плоскости  $0x\varepsilon$  расположена на линии уровня с большой полуосью:

$$g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(x + \varepsilon)^2 \frac{(1 + \mu)}{(1 - \mu)} + (x - \varepsilon)^2} = \sqrt{\frac{W^e}{G}}$$

Здесь  $G = \frac{H}{2(1+\mu)}$  – модуль сдвига в упругости.

Воспользуемся гипотезой, предполагающей, что деформирование происходит в потенциальном поле с теми же линиями уровня, только каждой линии уровня отвечает уже некоторая энергия  $W$  [16].

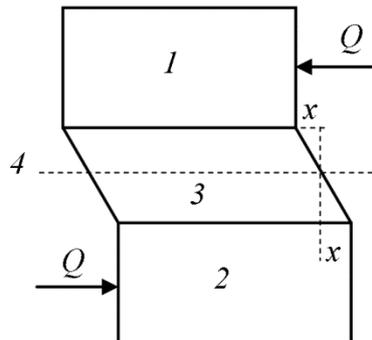


Рис. 3. Сдвиг связующего 3, расположенного между жесткими стержнями 1 и 2 (4 – средняя линия связующего)

Для построения функции  $W$  будем производить деформирование вдоль большой полуоси, реализуя чистый сдвиг. Воспользуемся диаграммой чистого сдвига  $\tau(\gamma)$ . Такую диаграмму можно получить, осуществляя следующий эксперимент. Пусть связующее соединяет два достаточно жестких стержня прямоугольного поперечного сечения, к которым приложены сдвигающие усилия  $Q$  (рис. 3).

Опыт ведем равномерно вплоть до разрушения связующего. В результате получаем зависимость  $Q(\gamma)$  и отсюда зависимость  $\tau(\gamma) = \frac{Q}{S}$ .

Здесь  $S$  площадь поверхности стержней, соприкасающихся со связующим. Тогда энергия, затраченная на сдвиг связующего, равна  $V = \int_0^{\gamma} \tau(\gamma) d\gamma$ . Отметим, что в общем случае функция  $\tau(\gamma)$  представляется полной диаграммой с падающей до нуля ветвью, которая пересекает ось  $O\gamma$  в точке  $\gamma = \gamma_r$ , где  $\tau(\gamma_r) = 0$  ( $\gamma_r$  – сдвиг, отвечающий разрушению при равновесном деформировании).

Теперь, осуществляя деформирование вдоль большой полуоси, имеем  $\gamma = \sqrt{2}g$ . В точках пересечения большой полуоси с линиями уровня энергия равна  $V(g) = \int_0^{\sqrt{2}g} \tau(r) dr$ . Таким образом, линиям уровня отвечает энергия  $W = V(g)$ . Теперь, чтобы получить выражение для энергии на любом пути деформирования, следует заменить  $g$  на  $\sqrt{\frac{W^e}{G}}$ . Так как напряжения определяются вектором-градиентом к линиям уровня, то  $\sigma_x = \frac{\partial W}{\partial x}$ ,  $\sigma_\varepsilon = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon}$ . Производя необходимые вычисления, находим определяющие соотношения для связующего при плоском напряженном состоянии. Они определяются выражением

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_\varepsilon \end{pmatrix} = \psi(x, \varepsilon) \frac{H}{1 - \mu^2} \begin{pmatrix} 1 & \mu \\ \mu & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\psi = \tau(\gamma) \frac{1}{\sqrt{2W^e G}}, \quad (5)$$

где  $\gamma = \sqrt{\frac{2W^e}{\sigma}}$ . Величина  $\psi$  в упругости равна единице, затем убывает до нуля в момент разрушения.

#### 4. Общая теория

Выпишем лагранжиан системы, учитывая, что слои и связующее находятся в условиях двухосного растяжения. Деформация слоя равна  $\varepsilon$  и  $\frac{z}{h(\varepsilon)}$ , а связующего –  $\varepsilon$  и  $x$ . Используя определяющие соотношения плоско-напряженного состояния для упругого слоя, получаем энергию деформаций  $L_1 = \frac{1}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \left( \varepsilon^2 + 2\nu\varepsilon \frac{z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) 2hls$ .

Энергия связующего равна  $L_2 = W 2ls$ . Здесь  $2hls$  – объем упругого слоя ( $2h$  – толщина;  $l$  – длина;  $s$  – площадь поперечного сечения);  $2ls$  – объем связующего единичной толщины. Итак лагранжиан равен  $L = L_1 + L_2$ . Параметр управления системой есть  $\varepsilon$ , а параметр состояния –  $x$ . Уравнение равновесия определяет выражение

$$\frac{dL}{dx} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu\varepsilon + \frac{\Delta-x}{h(\varepsilon)} \right) + \frac{H}{1-\mu^2} (x + \mu\varepsilon) \psi(x, \varepsilon) = 0. \quad (6)$$

Отсюда

$$\Delta = x - \nu\varepsilon h(\varepsilon) + \frac{H}{1-\mu^2} \frac{h(\varepsilon)(1-\nu^2)}{E} (x + \mu\varepsilon) \cdot \psi(x, \varepsilon). \quad (7)$$

Здесь  $\varepsilon, h(\varepsilon)$  – фиксированные величины, функции  $\psi(x, \varepsilon)$  при заданном  $\varepsilon$  определяются выражением (5).

С формальной точки зрения уравнения (6) и (7) опять можно рассматривать как уравнения равновесия гипотетической системы при постоянном возрастании параметра  $\Delta$ , т. е.

мысленно отодвигаем связующее от слоя. Увеличивая параметр  $\Delta$  из уравнения (7), находим функцию  $\Delta(x)$ . Отметим, что это возможно сделать, подставляя в правую часть уравнения (7) постепенно возрастающие значения  $x$ . Теперь следует при заданном значении  $h(\varepsilon)$  найти величину  $\Delta_h$ , при достижении которой связующее разрушается.

Уравнение (6) определяет критические точки функции  $L$ . Потеря устойчивости системы происходит в вырожденных критических точках [11]. Они определяются из уравнения

$$\frac{d^2L}{dx^2} = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{1}{n(\varepsilon)} + \frac{H}{1-\mu^2} \psi(x, \varepsilon) + \frac{H}{1-\mu^2} (x + \mu\varepsilon) \frac{\partial\psi(x, \varepsilon)}{\partial x} = 0$$

( $\varepsilon$  – фиксированная величина). Или из уравнения

$$\frac{\partial\Delta}{\partial x} = 1 + \frac{H}{1-\mu^2} \cdot \frac{h(\varepsilon)(1-\nu^2)}{E} \psi(x, \varepsilon) + \frac{H}{1-\mu^2} \cdot \frac{h(\varepsilon)(1-\nu^2)}{E} (x + \mu\varepsilon) \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\frac{\partial\Delta}{\partial x} = 0$  – это экстремум (максимум) функции  $\Delta(x)$ .

Если после подстановки функции  $\psi(x, \varepsilon)$  в выражении (8) не получаем тождество, то значит при данном  $\varepsilon$  функция  $\Delta(x)$  не имеет экстремума и катастрофы не произойдет. Когда  $\psi(x, \varepsilon)$  удовлетворяет уравнению (8), то после ее подстановки в выражение (7) получим значение  $\Delta_h$ , т. е. величину  $\Delta$ , при которой произойдет катастрофа (расслоение). Катастрофы также не произойдет при  $\Delta(\varepsilon) < \Delta_h$  ( $\Delta(\varepsilon)$  – реальное значение  $\Delta$  при данном  $\varepsilon$ ).

Увеличивая продольную деформацию  $\varepsilon$  по изложенной выше методике можно определить, когда произойдет расслоение в композитах.

## 5. Заключение

Разработана методика определения расслоения в однонаправленном композите при его растяжении вдоль слоев. Методика основана на использовании свойства разупрочнения связующего как при одноосном растяжении, так и при плоском напряженном состоянии. Методика основана на применении методов теории катастроф.

## Благодарность

*Работа выполнена в соответствии с государственным заданием по теме № АААА-А18-118020790145-0.*

## Литература

1. Батаев А. А., Батаев В. А. Композиционные материалы: строение, получение, применение. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2002. – 384 с.
2. Михайлин Ю. А. Конструкционные полимерные композитные материалы. – М. : Изд-во Научные основы и технологии, 2008. – 822 с.
3. Мэттьюс Ф., Ролингс Р. Композиционные материалы и конструкции. Механика и технологии. – М. : Техносфера, 2004. – 407 с.
4. Уорден К. Новые интеллектуальные материалы и конструкции. – М. : Техносфера, 2006. – 223 с.
5. Vorontsov A. N., Murzakhanov G. Kh. & Shchugorev V. N. Delamination failure of composite structures // Mechanics of Composite Materials. – 1990. – Vol. 25. – P. 723–737. – DOI: 10.1007/BF00613361.
6. Черняков С. А., Скворцов Ю. В. Анализ роста расслоений в композитных конструкциях // Вестник СамГАУ. – 2014. – № 4 (56). – С. 249–255.

7. Sun C.T., Jih C.J. On strain energy release rates for interfacial cracks in bi-material media // *Engineering Fracture Mechanics*. – 1987. – Vol. 28 (1). – P. 13–20. – DOI: 10.1016/0013-7944(87)90115-9.
8. Глаголев В. В., Маркин А. А., Фурсаев А. А. Моделирование образования новых материальных поверхностей в процессах адгезионного расслоения композита // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2018. – № 1. – С. 100–109. – DOI: 10.15593/perm.mech/2018.1.09.
9. Астапов Н. С., Корнев В. М., Кургузов В. Д. Модель расслоения разномодульного биматериала с трещиной // *Физическая мезомеханика*. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 49–57.
10. Smirnov S. V., Veretennikova I. A., Vichuzhanin D. I. Modeling of delamination in multi-layer metals produced by explosive welding under plastic deformation // *Computational Continuum Mechanics*. – 2014. – Vol. 7, No. 4. – P. 398–411. – DOI: 10.7242/1999-6691/2014.7.4.38. (In Russian).
11. Brewer J. C., Lagacé P. Quadratic stress for initiation of delamination // *Journal of Composite Materials*. – 1988. – Vol. 22. – P. 1141–1155. – DOI:10.1177/002199838802201205.
12. Zhang Y. W., Zeng K. Y., Thampuram R. Interface delamination generated by indentation in thin film systems – a computational mechanics study // *Materials Science and Engineering: A*. – 2001. – Vols. 319–321. – P. 893–897. – DOI: 10.1016/S0921-5093(01)01026-7.
13. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. – М. : Мир, 1980. – 608 с.
14. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. 1 – М. : Мир, 1984. – 350 с.
15. Стружанов В. В., Миронов В. И. Деформационное разупрочнение материала в элементах конструкций. – Екатеринбург : УрО РАН, 1995. – 190 с.
16. Wildemann V. E., Tretyakov M. P. Material testing by plotting total deformation curves // *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2013. – Vol. 42. – P. 166–170. – DOI: 10.3103/S1052618813010159.
17. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1. – М. : Наука, 1970. – 492 с.
18. Перс Л. Аналитическая динамика. – М. : Наука, 1971. – 636 с.
19. Стружанов В. В., Коркин А. В., Чайкин А. Е. Об одном подходе к определению предельной несущей способности механических систем с разупрочняющимися элементами // *Вестн. Сам. Гос. тех. ун-та сер. Физ.-мат науки*. – 2018. – Т. 22, № 4. – С. 762–773.